Numerikus módszerek 2. **1. ZÁRTHELYI** **2013. március 26.**

Programtervező informatikus BSc szak, B szakirány

1. A Lagrange-alappolinomok: (2 pont)

$$l_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}, \quad (k=0,\dots n).$$

2. A Newton-alak rekurziója: (2 pont)

$$N_{n+1}(x) = N_n(x) + f[x_0,\dots,x_{n+1}]\omega(x) = N_n(x) + f[x_0,\dots,x_{n+1}]\prod_{j=0}^{n}(x-x_j).$$

3. A Csebisev-polinomok rekurziója: (2 pont)

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$

$$T_{n+1}(x) = 2x\cdot T_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (n=1,2,\dots).$$

4. Az ℓ-edfokú interpolációs spline-ok definíciója:
Legyen $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ az $[a;b]$ intervallum egy felosztás. (4 pont)
Jelöljük a részintervallumokat $I_k = [x_{k-1};x_k]$-val $(k=1,\dots n)$.
Az $S_\ell : [a;b] \to \mathbb{R}$ függvényt ℓ-edfokú interpolációs spline-nak nevezzük, ha
- S_ℓ bármely I_k részintervallumon legfeljebb ℓ-edfokú polinom,
- $S_\ell \in C^{\ell-1}[a;b]$ és
- adott $f(x_0),\dots,f(x_n)$ függvényértékek esetén $S_\ell(x_k) = f(x_k)$, $(k=0,\dots,n)$.

5. Mivel $f(x) = x^2 + \sin(\pi x)$, az alappontokhoz tartozó függvényértékek a következők.

x_i	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y_i	1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	1

Készítsük el az osztott differencia táblázatot a Newton-alak felírásához.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$\dots$	$\dots$
-1	$\boxed{1}$				
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{-\frac{3}{4}-1}{-\frac{1}{2}+1} = \boxed{-\frac{7}{2}}$			
0	0	$\frac{0+\frac{3}{4}}{0+\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$	$\frac{\frac{3}{2}+\frac{7}{2}}{0+1} = \boxed{5}$		
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{\frac{5}{4}-0}{\frac{1}{2}-0} = \frac{5}{2}$	$\frac{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$	$\frac{1-5}{\frac{1}{2}+1} = \boxed{-\frac{8}{3}}$	
1	1	$\frac{1-\frac{5}{4}}{1-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$	$\frac{-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}}{1-0} = -3$	$\frac{-3-1}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{8}{3}$	$\boxed{0}$

A táblázat bekeretezett értékei segítségével írjuk fel az interpolációs polinom Newton-alakját.

$$P(x) = N_4(x) = 1 - \frac{7}{2}\cdot(x+1) + 5\cdot(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right) - \frac{8}{3}\cdot(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)x =$$

$$= -\frac{8}{3}x^3 + x^2 + \frac{8}{3}x$$

(6 pont)

Az $x = \frac{1}{6}$ pontban a hibabecslés

$$\left|f\left(\frac{1}{6}\right) - P\left(\frac{1}{6}\right)\right| \leq \frac{M_5}{5!}\left|\omega\left(\frac{1}{6}\right)\right|,$$

ahol

$$\omega(x) = (x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1),$$

$$\omega\left(\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{1}{6}+1\right)\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}-1\right) = \frac{35}{972}.$$

Mivel $f(x) = x^2 + \sin(\pi x)$, így a deriváltjai

$$f'(x) = 2x + \pi \cdot \cos(\pi x), \quad f''(x) = 2 - \pi^2 \cdot \sin(\pi x), \quad f'''(x) = -\pi^3 \cdot \cos(\pi x),$$

$$f^{(4)}(x) = \pi^4 \cdot \sin(\pi x), \quad f^{(5)}(x) = \pi^5 \cdot \cos(\pi x)$$

a becslés

$$|f^{(5)}(x)| \le \pi^5 = M_5 \quad \forall x \in [-1;1].$$

A kapott értékeket a hibabecslésbe helyettesítve

$$\left| f\left(\frac{1}{6}\right) - P\left(\frac{1}{6}\right)\right| \le \frac{\pi^5}{5!} \cdot \frac{35}{972} \approx 0.09.$$

Az $x = \frac{1}{6}$ pontban a helyettesítési értékek (6 pont)

$$P\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{216} + \frac{1}{36} + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{149}{324} \approx 0.46,$$

$$f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{19}{36} \approx 0.53.$$

A megadott intervallumon a legkisebb hibát akkor érjük el, ha az ötödfokú Csebisev-polinom gyökeit választjuk alappontoknak.

$$T_5(x) = \cos(5 \arccos(x)) = 0$$

$$x_0 = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right), \quad x_1 = \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right), \quad x_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) = 0, \quad x_3 = \cos\left(\frac{7\pi}{10}\right), \quad x_4 = \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)$$

Ekkor a hiba a $[-1;1]$ intervallumon

$$|f(x) - P(x)| \le \frac{\pi^5}{5!} \cdot \frac{1}{2^4} \approx 0.16.$$

(4 pont)

6. $f(x) = \cos(\pi x)$, az alappontokhoz tartozó függvény- és deriváltértékek a következők.

x_i	-1	0	1
$f(x_i)$	-1	1	-1
$f'(x_i)$	0	0	0

Készítsük el az osztott differencia táblázatot a Newton-alak felírásához.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	...	...	...
-1	$\boxed{-1}$					
-1	-1	$\boxed{0}$				
0	1	$\frac{1-(-1)}{0-(-1)} = 2$	$\frac{2-0}{0-(-1)} = \boxed{2}$			
0	1	0	$\frac{0-2}{0-(-1)} = -2$	$\frac{-2-2}{0-(-1)} = \boxed{-4}$		
1	-1	$\frac{-1-1}{1-0} = -2$	$\frac{-2-0}{1-0} = -2$	$\frac{-2-(-2)}{1-(-1)} = 0$	$\frac{0-(-4)}{1-(-1)} = \boxed{2}$	
1	-1	0	$\frac{0-(-2)}{1-0} = 2$	$\frac{2-(-2)}{1-0} = 4$	$\frac{4-0}{1-(-1)} = 2$	$\frac{2-2}{1-(-1)} = \boxed{0}$

A táblázat bekeretezett értékei segítségével írjuk fel az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakját.

$$H(x) = H_5(x) = -1 - 2 \cdot (x+1)^2 - 4 \cdot x(x+1)^2 + 2 \cdot x^2(x+1)^2$$

(4 pont)

A $[-1;1]$ intervallumon a hibabecslés

$$|f(x) - H(x)| \le \frac{M_6}{6!} ||\Omega||_\infty,$$

ahol
$$\Omega(x) = (x+1)^2 x^2 (x-1)^2,$$
Vizsgáljuk az Ω függvény szélsőértékeit. Mivel minden gyöke kétszeres, ezért elegendő az egyszerűbb $\omega(x) = (x+1)x(x-1) = x^3 - x$ függvény szélsőértékhelyeit vizsgálni.
$$\omega'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\omega\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$
és ω páratlanságából
$$\omega\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \Omega_\infty = \frac{4}{27}.$$
Mivel $f(x) = \cos(\pi x)$, így az f deriváltjai
$$f'(x) = -\pi \cdot \sin(\pi x), \quad f''(x) = -\pi^2 \cdot \cos(\pi x), \quad f'''(x) = \pi^3 \cdot \sin(\pi x),$$
$$f^{(4)}(x) = \pi^4 \cdot \cos(\pi x), \quad f^{(5)}(x) = -\pi^5 \cdot \sin(\pi x), \quad f^{(6)}(x) = -\pi^6 \cdot \cos(\pi x)$$
ahonnan a becslés
$$|f^{(6)}(x)| \le \pi^6 = M_6.$$
A kapott értékeket a hibabecslésbe helyettesítve a $[-1;1]$ intervallumon a hibabecslés
$$|f(x) - H(x)| \le \frac{M_6}{6!}||\Omega||_\infty = \frac{\pi^6}{6!} \cdot \frac{4}{27} \approx 0.20.$$
(6 pont)

7. Mivel $f(x) = \cos(\pi x)$, az alappontokhoz tartozó függvényértékek a következők.

x_i	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y_i	-1	0	1	0	-1

A feladat 4 részintervallumra bomlik, ezek a következők.
$$I_1 = \left[-1; -\frac{1}{2}\right], I_2 = \left[-\frac{1}{2}; 0\right], I_3 = \left[0; \frac{1}{2}\right], I_4 = \left[\frac{1}{2}; 1\right].$$
Írjuk fel mind a négy intervallumra a lineáris interpolációs polinomot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$
-1	$\boxed{-1}$	
$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{0-(-1)}{-\frac{1}{2}-1} = \boxed{2}$

$P_1(x) = -1 + 2(x+1) = 2x + 1$

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$
0	$\boxed{1}$	
$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{0-1}{-\frac{1}{2}-0} = \boxed{2}$

$P_2(x) = 1 + 2x = 2x + 1$
Ez nem meglepő, ha felrajzoljuk a grafikonra a megadott értékeket. A másik két intervallumra is hasonló eredményt kapunk, de kevesebb számolással. A függvény páros voltát felhasználva tükrözzük az $y = 2x + 1$ egyenest az y tengelyre, így $P_{3,4}(x) = -2x + 1$. (4 pont)

A hibabecsléshez a gyakorlaton bizonyított $n = 2$ esetnek megfelelő $\frac{M_2}{8}h^2$ hibabecslést használjuk minden intervallumra, ahol $M_2 = \pi^2$ és $h = \frac{1}{2}$. Így
$$|f(x) - S(x)| \le \frac{\pi^2}{32} \approx 0.31$$
(2 pont)

8. Egyik megoldás:

A feladatot szétbontjuk két intervallumra, majd felírjuk intervallumonként az Hermite-interpolációs polinomokat. Utána átírjuk a megadott bázisba.

A $[0;1]$ intervallumon a feltételeink a P_1 polinomra

$$P_1(0)=0,\ \ P_1'(0)=0,\ \ P_1(1)=1.$$

Az osztott differencia táblázat

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
0	$\boxed{0}$		
0	0	$S_1'(0)=\boxed{0}$	
1	1	$\frac{1-0}{1-0}=1$	$\frac{1-0}{1-0}=\boxed{1}$

Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakja

$$P_1(x)=x^2.$$

A $[1;2]$ intervallumon a feltételeink a P_2 polinomra

$$P_2(1)=1,\ \ P_2'(1)=P_1'(1)=2,\ \ P_2(2)=0.$$

Az osztott differencia táblázat

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
1	$\boxed{1}$		
1	1	$\boxed{2}$	
2	0	$\frac{0-1}{2-1}=-1$	$\frac{-1-2}{2-1}=\boxed{-3}$

Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakja

$$P_2(x)=1+2\cdot(x-1)-3\cdot(x-1)^2=-3\,x^2+8\,x-4.$$

Tehát a keresett spline

$$S(x)=\begin{cases} P_1(x)=x^2 & \text{,ha } x\in[0;1] \\ P_2(x)=-3\,x^2+8\,x-4 & \text{,ha } x\in[1;2]. \end{cases}$$

(6 pont)

A spline-t a globális bázisban felírva a következő alakban keressük:

$$S(x)=ax^2+bx+c+\beta(x-1)_+^2$$

A $[0;1]$ intervallumon

$$S(x)=P_1(x)=x^2\ \ \Rightarrow\ \ c=0,b=0,a=1.$$

Az $[1;2]$ intervallumon

$$S(x)=x^2+\beta(x-1)^2=P_2(x)=-3\,x^2+8\,x-4.$$

Innen

$$\beta\,(x-1)^2=-4x^2+8x-4=-4(x-1)^2\ \ \Rightarrow\ \ \beta=-4.$$

A kért bázisban az előállítás

$$S(x)=x^2-4(x-1)_+^2.$$

(2 pont)

Másik megoldás:

A spline-t a globális bázisban felírva a következő alakban keressük:

$$S(x)=ax^2+bx+c+\beta(x-1)_+^2$$

Az interpolációs feltételeket és a peremfeltételt felírva

$$\begin{aligned} S'(0)&=b=0\\ S(0)&=c=0\\ S(1)&=a+b+c=1\\ S(2)&=4a+2b+c+\beta=0 \end{aligned}$$

Az első három egyenletből $c = 0, b = 0, a = 1$.
A negyedik egyenletből $4 + \beta = 0 \;\Rightarrow\; \beta = -4$.
A kért bázisban az előállítás

$$S(x) = x^2 - 4(x-1)_+^2.$$

(8 pont)