10. SPLINE – ok

Legyen $[a,b] \subset I\!R$ és $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ az intervallum egy felosztása,
$I_k := [x_{k-1}, x_k] \quad (k = 1,...,n)$.

10.1. Definíció: Az $S : [a,b] \rightarrow I\!R$ függvényt **l – edfokú spline-nak** nevezzük, ha

1. $S \in C^{(l-1)}[\mathrm{a,b}]$,
2. $S|I_k \in P_l \quad (k = 1,...,n)$.

Interpolációs spline-nak nevezzük, ha egy $f : [a,b] \rightarrow I\!R$ függvényre

3. $S(x_i) = f(x_i) \ (i = 0,...,n)$**.**

Megjegyzés:
1. Csak interpolációs spline-nal fogunk foglalkozni, ezért a továbbiakban spline név alatt mindig ezt értjük. A számunkra fontos spline-ok: $l = 1, 2, 3$.
2. A spline meghatározásakor n db $l-$ edfokú polinomot kell felírnunk, azaz az **ismeretlenek száma**: $n(l+1)$. Az 1), 3) feltételekbõl a **feltételek száma**: $(l+1)n - (l-1)$, ugyanis $l-1$ db simasági feltétel az $n-1$ belsõ pontban, azaz $(n-1)(l-1)$ és $2n$ db interpolációs feltétel (n db intervallum két végpontja).
Összesen $(n-1)(l-1) + 2n = (l+1)n - (l-1)$. Innen látszik, hogy $l-1$db feltétel hiányzik a spline egyértelmûségéhez. Ezeket a feltételeket általában a végpontokra adják meg.

10.1. Lineáris spline (l=1).

1), 2) és 3) egyértelmûen meghatározza.
$\forall \mathrm{I}_k$ intervallumon $P_k(x_{k-1}) = a_k x_{k-1} + b_k = f(x_{k-1})$
és $P_k(x_k) = a_k x_k + b_k = f(x_k)$,
Ebbõl az két ismeretlenes egyenletrendszerbõl a_k és b_k meghatározható.
Úgy is meghatározhatjuk a P_k polinomot, hogy az I_k intervallum végpontjaira felírjuk a lineáris interpolációs polinom Lagrange- illetve Newton alakját.
Az interpoláció miatt $s \in C[a;b]$, tehát 3) $\Rightarrow$ 1) teljesülése.

10.2. Kvadratikus spline (l=2).

$l-1=1$ feltétel hiányzik a spline egyértelmû felírásához. Ezt általában az intervallum elején vagy végén a derivált megadásával szokás teljesíteni. Ebben az esetben az egymás melletti intervallumokra Hermite interpolációt alkalmazva meghatározható a spline.

10.3. Köbös spline.

$l-1=2$ feltétel hiányzik a spline egyértelmû felírásához. Ezt általában az intervallum elején és végén peremfeltételek megadásával szokás teljesíteni. A leggyakrabban alkalmazott klasszikus peremfeltételek a következõk.

a) Természetes peremfeltétel: $S''(a) = 0, S''(b) = 0$.
b) Hermite-féle peremfeltétel: $S'(a) = f'(a), S'(b) = f'(b)$.
c) Periodikus peremfeltétel: ha $f(a) = f(b)$ akkor $S'(a) = S'(b)$ és $S''(a) = S''(b)$.

10.4. Példák.

1. Példa. Legyen $f(x)=\sin\left(\frac{p}{2}x\right)$, $x\in[-1;1]$. Interpoláljuk a függvényt a -1; 0; 1 pontokon

a) lineáris spline-nal,
b) kvadratikus spline-nal, melyre $S_2'(-1)=f'(-1)=0$,
c) köbös spline-nal, mely a következõ Hermite-féle peremfeltételt teljesíti:

$$S_3'(-1)=f'(-1)=0,\; S_3'(1)=f'(1)=0 .$$

Megoldás. Az alappontok: $x_0=-1, x_1=0, x_2=1$,
a függvényértékek: $f(-1)=-1,\; f(0)=0,\; f(1)=1$.
a) A lineáris spline felírásához lineárisan interpolálunk a $[-1;0]$ és a $[0;1]$ intervallumon, így

$$S_1(x)=\begin{cases} x, & \text{ha } x\in[-1;0] \\ x, & \text{ha } x\in[0;1] \end{cases} .$$

b) A kvadratikus spline-t a következõ alakban keressük.

$$S_2(x)=\begin{cases} P_1(x)=a_1x^2+b_1x+c_1, & \text{ha } x\in[-1;0] \\ P_2(x)=a_2x^2+b_2x+c_2, & \text{ha } x\in[0;1] \end{cases}$$

Az interpolációs feltételeket felírva egyben a spline folytonosságát is teljesítjük.

$$1)\quad S_2(-1)=P_1(-1)=f(-1) \quad\Leftrightarrow\quad a_1-b_1+c_1=-1$$
$$2)\quad S_2(0)=P_1(0)=f(0) \quad\Leftrightarrow\quad c_1=0$$
$$3)\quad S_2(0)=P_2(0)=f(0) \quad\Leftrightarrow\quad c_2=0$$
$$4)\quad S_2(1)=P_2(1)=f(1) \quad\Leftrightarrow\quad a_2+b_2+c_2=1 .$$

A spline deriváltjának folytonosságát is teljesítenie kell a spline-nak. $\left(P_i'(x)=2a_ix+b_i, (i=1,2)\right)$

$$5)\quad P_1'(0)=P_2'(0) \quad\Leftrightarrow\quad b_1=b_2$$

Látjuk, hogy eddig a 6 ismeretlenhez csak 5 egyenletünk van, a feladatban megadott $S_2'(-1)=f'(-1)=0$ peremfeltétellel kapjuk a 6. egyenletet.

$$6)\quad P_1'(-1)=2a_1\cdot(-1)+b_1=0$$

Oldjuk meg a lineáris egyenletrendszert. 6)-ból fejezzük ki b_1-et és helyettesítsük be 1)-be.

$$6)\quad b_1=2a_1$$
$$1)\quad a_1-2a_1=-a_1=-1$$

Innen $a_1=1$ és $b_1=2$. Az 5) egyenlet miatt

$$4)\quad a_2+2=1 \quad\Rightarrow a_2=-1 .$$

Tehát a keresett másodfokú spline

$$S_2(x)=\begin{cases} x^2+2x, \text{ ha } x\in[-1;0] \\ -x^2+2x, \text{ ha } x\in[0;1] \end{cases}.$$

c) A köbös spline-t a következõ alakban keressük.

$$S_3(x)=\begin{cases} P_1(x)=a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1, \text{ ha } x\in[-1;0] \\ P_2(x)=a_2x^3+b_2x^2+c_2x+d_2, \text{ ha } x\in[0;1] \end{cases}$$

Az interpolációs feltételeket felírva egyben a spline folytonosságát is teljesítjük.

$$\begin{aligned} &1)\quad S_2(-1)=P_1(-1)=f(-1) \quad\Leftrightarrow\quad -a_1+b_1-c_1+d_1=-1 \\ &2)\quad S_2(0)=P_1(0)=f(0) \quad\Leftrightarrow\quad d_1=0 \\ &3)\quad S_2(0)=P_2(0)=f(0) \quad\Leftrightarrow\quad d_2=0 \\ &4)\quad S_2(1)=P_2(1)=f(1) \quad\Leftrightarrow\quad a_2+b_2+c_2+d_2=1 \end{aligned}$$

A spline elsõ és második deriváltjának folytonosságát is teljesítenie kell a spline-nak.
$P_i'(x)=3a_ix^2+2b_ix+c_i,\ P_i''(x)=6a_ix+2b_i\ ,(i=1,2)$

$$\begin{aligned} &5)\quad P_1'(0)=P_2'(0) \quad\Leftrightarrow\quad c_1=c_2 \\ &6)\quad P_1''(0)=P_2''(0) \quad\Leftrightarrow\quad b_1=b_2 \end{aligned}$$

Látjuk, hogy eddig a 8 ismeretlenhez csak 6 egyenletünk van, a feladatban megadott Hermite-féle $S_3'(-1)=f'(-1)=0,\ S_3'(1)=f'(1)=0$ peremfeltétellel kapjuk a 7. és 8. egyenletet.

$$\begin{aligned} &7)\quad P_1'(-1)=3a_1-2b_1+c_1=0 \\ &8)\quad P_2'(1)=3a_2+2b_2+c_2=0 \end{aligned}$$

Oldjuk meg a lineáris egyenletrendszert. A 2) 3) 5) és 6) egyenletek segítségével redukálható az eredeti egyenletrendszer.

$$\begin{aligned} &1)\quad -a_1+b_1-c_1=-1 \\ &4)\quad a_2+b_1+c_1=1 \\ &7)\quad 3a_1-2b_1+c_1=0 \\ &8)\quad 3a_2+2b_1+c_1=0 \end{aligned}$$

Ezt megoldva

$4)-1)\quad a_2+a_1+2c_1=2 \quad\Rightarrow\quad a_1+a_2=2-2c_1$

$7)+8)\quad 3(a_1+a_2)+2c_1=0 \quad\Rightarrow\quad 3(2-2c_1)+2c_1=6-4c_1=0 \quad\Rightarrow\quad c_1=c_2=\dfrac{3}{2}$ és $a_1+a_2=-1$

$1)+4)\quad a_2-a_1+2b_1=0 \quad\Rightarrow\quad a_1-a_2=2b_1$

$7)-8)\quad 3(a_1-a_2)-4b_1=0 \quad\Rightarrow\quad 3(2b_1)-2b_1=4b_1=0 \quad\Rightarrow\quad b_1=b_2=0.$

Innen $a_1 - a_2 = 0$ és $a_1 + a_2 = -1$ miatt $a_1 = a_2 = -\frac{1}{2}$.

Tehát a keresett harmadfokú spline

$$S_3(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x, \text{ ha } x \in [-1; 0] \\ -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x, \text{ ha } x \in [0; 1] \end{cases}.$$

2. Példa. Létezik-e olyan $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, melyre

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) = x + 1, & \text{ha } x \in [-2; -1] \\ P_2(x) = ax^3 + bx^2 cx + d, & \text{ha } x \in [-1; 1] \\ P_3(x) = x - 1, & \text{ha } x \in [1; 2] \end{cases}$$

természetes köbös spline. Miért?

Megoldás. A természetes peremfeltétel triviálisan teljesül, hiszen lineáris függvények második deriváltja mindenhol 0. Mivel a két szélsõ intervallumon adott a spline képlete, ezért csak a definíció 1. feltételét kell felírnunk, azaz a folytonosság, a derivált és a második derivált folytonosságát.

$$\begin{array}{lll} 1) & P_1(-1) = P_2(-1) & \Leftrightarrow \quad 0 = -a + b - c + d \\ 2) & P_2(1) = P_3(1) & \Leftrightarrow \quad a + b + c + d = 0 \\ 3) & P_1'(-1) = P_2'(-1) & \Leftrightarrow \quad 1 = 3a - 2b - c \\ 4) & P_2'(1) = P_3'(1) & \Leftrightarrow \quad 3a + 2b + c = 1 \\ 5) & P_1''(-1) = P_2''(-1) & \Leftrightarrow \quad 0 = -6a + 2b \\ 6) & P_2''(1) = P_3''(1) & \Leftrightarrow \quad 6a + 2b = 0 \end{array}$$

5)+6)-ból $b = 0$ és így $a = 0$.
3) és 4)-bõl $c = 1$, 2)-bõl $d = -1$, de ez ellentmond 1)-nek. Tehát a feltételek egyszerre nem teljesíthetõek, nincs ilyen köbös spline.

10.5. Köbös spline-ok megadása ekvidisztans alappontok esetén

Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $x_k = a + kh$, ahol $h = \frac{b-a}{n}$, $(k = 0, \ldots, n)$. Az $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ intervallumon a spline-t a következõ alakban keressük.

$$P_k(x) = a_k + b_k(x - x_{k-1}) + c_k(x - x_{k-1})^2 + d_k(x - x_{k-1})^3$$

Az interpolációs feltételeket felírva egyben a spline folytonosságát is teljesítjük.

$$P_k(x_{k-1}) = a_k = f(x_{k-1}) \quad (k = 1, \ldots, n)$$
$$P_k(x_k) = a_k + b_k h + c_k h^2 + d_k h^3 = f(x_k) \quad (k = 1, \ldots, n)$$

A spline deriváltjának illetve második deriváltjának folytonosságát felírva a belsõ osztópontokra

$$P_k'(x_k) = P_{k+1}'(x_k) \quad \Leftrightarrow \quad b_k = b_{k+1} + 2c_{k+1}h + 3d_{k+1}h^2 \quad (k = 1,...,n-1)$$
$$P_k''(x_k) = P_{k+1}''(x_k) \quad \Leftrightarrow \quad 2c_k = 2c_{k+1} + 6d_{k+1}h \quad (k = 1,...,n-1).$$

A klasszikus peremfeltételeket felírva

a) természetes peremfeltétel esetén

$$P_1''(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_0 = 0$$
$$P_n''(x_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2c_n + 6d_n h = 0$$

b) Hermite-féle peremfeltétel esetén

$$P_1'(x_0) = f'(a) \quad \Leftrightarrow \quad b_1 = f'(a)$$
$$P_n'(x_n) = f'(b) \quad \Leftrightarrow \quad b_n + 2c_n h + 3d_n h^2 = f'(b)$$

c) perikodikus peremfeltételek esetén, ha $f(a) = f(b)$

$$P_1'(x_0) = P_n'(x_n) \quad \Leftrightarrow \quad b_1 = b_n + 2c_n h + 3d_n h^2$$
$$P_1''(x_0) = P_n''(x_n) \quad \Leftrightarrow \quad c_0 = c_n + 3d_n h \quad .$$

Az a_k, b_k, d_k együtthatókat fejezzük ki a fenti egyenletekbõl, így

$$a_k = f(x_{k-1})$$
$$b_k = f[x_{k-1}; x_k] - \frac{h}{3}(2c_k + c_{k+1})$$
$$d_k = \frac{1}{3h}(c_{k+1} - c_k) \quad (k = 1,...,n).$$

A c_k-kra a következõ redukált lineáris egyenletrendszereket kapjuk.

a) természetes peremfeltétel esetén tridiagonális mátrixot kapunk

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} \cdot \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} f[x_0, x_1, x_2] \\ f[x_1, x_2, x_3] \\ \vdots \\ \vdots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] \end{pmatrix},$$

ahol $c_1 = 0$ és $c_{n+1} := 0$ segédváltozó.

b) Hermite-féle peremfeltétel esetén tridiagonális mátrixot kapunk

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} f[x_0, x_0, x_1] \\ f[x_0, x_1, x_2] \\ \vdots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] \\ f[x_{n-1}, x_n, x_n] \end{pmatrix},$$

ahol $f[x_0, x_0] = f'(a)$, $f[x_n, x_n] = f'(b)$ és c_{n+1} segédváltozó.

c) perikodikus peremfeltételek esetén ciklikus mátrixot kapunk

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 4 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 4 & 1 \\ 1 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{n\times n} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} f[x_{-1}, x_0, x_1] \\ f[x_0, x_1, x_2] \\ \vdots \\ \vdots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] \end{pmatrix},$$

ahol $x_{-1} := x_0 - h = a - h$, $f(x_{-1}) := f(x_{n-1})$ és $c_{n+1} := c_1$ segédváltozó.

Megjegyzés.
A képletekben szereplõ $f[x_{k-1}; x_k]$ jelölés az x_{k-1}, x_k pontokra felírt elsõrendû osztott differenciát jelöli, míg az $f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$ jelölés az x_{k-1}, x_k, x_{k+1} pontokra felírt másodrendû osztott differenciát jelöli.