Spline interpoláció

A klasszikus interpolációt magas fokszámra nem előnyös alkalmazni. Sok esetben előnyösebb a szakaszonként (alacsony) adott fokszámú interpoláció (spline interpoláció) alkalmazása. Ez szakaszonként Hermite típusú interpolációt jelent. Legegyszerűbb a másodfokú, legelterjedtebb a köbös (harmadfokú) spline interpoláció használata.
Jelölje $\mathcal{C}[a,b]$ az $[a,b]$-n folytonos függvények halmazát.

Definíció 2 ***(Köbös interpolációs spline)***
Legyen $f \in \mathcal{C}[a,b]$ adott és $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $f(x_i) = y_i \quad i = 0,\ldots,n$. Az f függvényt interpoláló köbös $S(x)$ spline-t a következő módon definiáljuk:

1. *S szakaszonként harmadfokú polinom, $S_i(x) := S|_{[x_i,x_{i+1}]} \quad i = 0,\ldots,n-1$*
2. *$S(x_i) = y_i$ (Tehát S interpolálja f-et)*
3. *$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) \quad i = 1,\ldots,n-2$ (Folytonosan csatlakoznak)*
4. *$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}) \quad i = 1,\ldots,n-2$ (S-nek nincsenek sarkai)*
5. *$S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}) \quad i = 1,\ldots,n-2$ (Görbületek egyenlősége)*
6. *Továbbá teljesül még valamelyik a következő peremfeltételek közül:*
   (a) *$S''(a) = S''(b) = 0$ természetes peremfeltételek*
   (b) *$S'(a) = f'(a), \quad S'(b) = f'(b)$ Hermite feltételek*
   (c) *$S'(a) = S'(b), \quad S''(a) = S''(b)$ periodikus feltételek*

Interpoláció használata numerikus integrálásnál

Az eredeti függvény integrálja helyett az interpolációs polinom integrálját lehet használni.

1. Trapézformulánál a függvényt az elsőfokú Lagrange interpolációs polinomjával helyettesítjük.
2. Simpson formulánál a függvényt a másodfokú Lagrange interpolációs polinomjával helyettesítjük.
3. Interpolációs típusú kvadratúraformuláknál
   Legyenek $[a,b]$-ben az alappontok $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ és $f(x)$-et interpoláljuk a Lagrange interpolációs polinommal. Ekkor $f(x) = L_n(f,x) + H_n(f,x)$, ahol $H_n(f,x)$ a hibatag. Ekkor
   $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(f,x)dx + \int_a^b H_n(f,x)dx$$
   Ha a hibaintegrál kicsi, akkor f integrálja helyett L_n integrálját számolhatjuk.