Az interpoláció hibájának optimalizálása :

$$|f(x) - L_n(f, x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)|$$

KÉRDÉS : Mikor lesz ez az érték a legkisebb?

$\boxed{\textbf{Tétel}}$

$[-1, 1]$ intervallumon az interpoláció hibája akkor lesz a legkisebb, ha $\omega(x) = \widetilde{T}_{n+1}(x)$

azaz, ha az interpolációs alappontoknak a $\widetilde{T}_{n+1}(x)$ Csebisev polinom gyökeit választjuk.

Ekkor az interpoláció hibája:

$$\boxed{|f(x) - L_n(f, x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!\ 2^n}} \qquad x \in [-1, 1]$$

$[a, b]$ intervallumon pedig a transzformált $\widetilde{T}_{n+1}(x)$ Csebisev polinom gyökeinek, mint alappontoknak a választása esetén lesz az interpoláció hibája optimális:

$$\boxed{|f(x) - L_n(f, x)| \leq \frac{M_{n+1}(b-a)^{n+1}}{(n+1)!\ 2^{2n+1}}} \qquad x \in [a, b]$$

1.7. SPLINE INTERPOLÁCIÓ

A kalsszikus interpolációt magas fokszámra nem előnyös alkalmazni a polinomok oszcilláló tulajdonsága miatt. Előnyösebb a szakaszonként (alacsony) adott fokszámú interpoláció (spline interpoláció) alakalmazása sok esetben. Továbbá, gyakran a fizikai feltételekből adódóan kell, hogy az approximáló függvény is folytonosan differenciálható legyen. Ez úgynevezett szakaszonként Hermite - típusú interpolációt jelent. A nehézség itt az lehet, hogy az approximálandó függvény értékei adottak csak sok esetben, de a deriváltak értékei nem.

A legegyszerűbb folytonosan deriválható (úgynevezett sima) approximáló függvény a szakaszonként másodfokú polinom. Napjainkban legelterjedtebb (legnépszerűbb) a köbös spline interpoláció.

A spline interpolációt (splineok elméletét) a gyakorlati szükségletek hozták létre: hajóépítés, navigáció, sima approximáló függvény konstruálása ballisztikai táblázatok alapján, computer grafika, differenciálegyenletek numerikus megoldása, stb.

A „spline függvény” elnevezést (jelentése: rugalmas fémpálca, amivel adott pontokon átmenő sima görbe rajzolható) 1946 - ban I. J. Schönberg vezette be, bár már korábban is használták a szakaszonkénti polinom - approximációt. Például Euler töröttvonal módszere közönséges differenciálegyenletek kezdetiérték - feladatának megoldására.

Definíció :

Harmadfokú (köbös) interpolációs spline :

Legyen $f \in C\,[\,a\,,\,b\,]$ adott és $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \quad f\,(x_i) = y_i \quad i = 0, \ldots, n.$

Az f függvényt interpoláló köbös $S\,(x) \quad x \in [\,a\,,\,b\,]$ spline-t a következő módon definiáljuk:

1. S szakaszonként harmadfokú polinom, $S_i\,(x) := S\big|_{[\,x_i\,,\,x_{i+1}\,]} \quad i = 0, \ldots, n-1$

2. $S\,(x_i) = y_i \quad i = 0, \ldots, n$ (Tehát S interpolálja f - et.)

3. $S_i\,(x_{i+1}) = S_{i+1}\,(x_{i+1}) \quad i = 1, \ldots, n-2$ (Folytonosan csatlakoznak.)

4. $S_i^{'}\,(x_{i+1}) = S_{i+1}^{'}\,(x_{i+1}) \quad i = 1, \ldots, n-2$ (S - nek nincsenek sarkai.)

5. $S_i^{''}\,(x_{i+1}) = S_{i+1}^{''}\,(x_{i+1}) \quad i = 1, \ldots, n-2$ (Görbületek egyenlősége.)

6. Továbbá teljesül még valamelyik a következő peremfeltételek közül:

a.) $S^{''}\,(a) = S^{''}\,(b) = 0$ természetes peremfeltételek

b.) $S^{'}\,(a) = f^{'}\,(a)\ , \quad S^{'}\,(b) = f^{'}\,(b)$ Hermite - peremfeltételek

c.) $S^{'}\,(a) = S^{'}\,(b)\ , \quad S^{''}\,(a) = S^{''}\,(b)$ periodikus peremfeltételek

1.7.1. Az interpolációs spline minimum tulajdonsága

Legyen adott $f \in C\,[\,a\,,\,b\,]\ , \quad f\,(x_i) = y_i \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$

FELADAT : Közelítsük f - et olyan g függvénnyel, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. $g\,(x_i) = y_i \quad i = 0, \ldots, n$

2. $g\,,\,g^{'} \in C\,[\,a\,,\,b\,]$

3. g többi deriváltjai is szakaszonként folytonosak és minden csomópontban létezik g deriváltjainak jobb és bal oldali határértéke.

4. Legyen az **1 - 3.** tulajdonságú függvények közül $\widetilde{g}$ az a függvény, amelyre a

(1) $$J[g] = \int_a^b \left[g''(x)\right]^2 \mathrm{d}x$$ integrál (funkcionál) minimális.

Tétel

Az **1 - 4.** feltételeknek eleget tevő $\widetilde{g}$ függvény egyértelműen létezik.

Bizonyítás

Először belátjuk, hogy $\widetilde{g}$ egy szakaszonként harmadfokú polinom kell legyen, bizonyos tulajdonságokkal. Majd megkonstruáljuk ezt a köbös splinet, ami bizonyítja $\widetilde{g}$ létezését. A konstrukció egyértelműsége $\widetilde{g}$ egyértelműségét is bizonyítja.

A **4.** miatt $\Longrightarrow$ $J[\widetilde{g}] \leq J[g]$ tetszőleges **1 - 3.** tulajdonsággal rendelkező g függvényre.

Tekintsük g - t a következő alakban: $g = \widetilde{g} + \varepsilon \cdot h$, ahol $\varepsilon \in \mathbb{R}$ adott szám és a h olyan függvény, amelyre **1.** helyett $h(x_i) = 0$ teljesül és kielégíti **2** - t és **3** - at. Így g - re **1 - 3.** teljesül.

g - nek ezt az alakját *(1)* - be írva $\Longrightarrow$ $$J[g] = \int_a^b \left[\widetilde{g}''(x) + \varepsilon \cdot h''(x)\right]^2 \mathrm{d}x =: J[\varepsilon]$$

Ez ε - ban másodfokú polinom.

Tudjuk, hogy $\varepsilon = 0$ - ra $J[\varepsilon]$ - nak minimuma van, azaz $J[0] = J[g]$ minimális érték.

$\Longrightarrow$ $J'[\varepsilon]$ deriváltfüggvény $\varepsilon = 0$ - ban nulla.

Négyzetre emelés és deriválás után:

(2) $$J'[0] = 2\int_a^b \underbrace{\widetilde{g}''(x)}_{u}\underbrace{h''(x)}_{v'} \mathrm{d}x = 0$$

Kétszer parciálisan deriválva *(2)* - t részintervallumonként:

$$\frac{1}{2}J'[0] = \int_a^b \widetilde{g}''(x)\,h''(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \widetilde{g}''(x)\,h''(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1}\left[\widetilde{g}''(x)\,h'(x)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \widetilde{g}'''(x)\,h'(x)\,\mathrm{d}x\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left[\widetilde{g}''(x)\, h'(x) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \widetilde{g}'''(x)\, h'(x) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \widetilde{g}^{(4)}(x)\, h(x)\, \mathrm{d}x \right] =$$

$$= -\widetilde{g}''(x_0)\, h'(x_0) + \left[\widetilde{g}''\left(x_1^-\right) h'\left(x_1^-\right) - \widetilde{g}''\left(x_1^+\right) h'\left(x_1^+\right) \right] + \left[\widetilde{g}''\left(x_2^-\right) - \widetilde{g}''\left(x_2^{+-}\right) \right] h'(x_2) + \ldots +$$

$$+ \ldots + \widetilde{g}''(x_n)\, h'(x_n) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \widetilde{g}^{iv}(x)\, h(x)\, \mathrm{d}x = 0$$

tetszőleges h megengedett függvényre.

Hogy az utóbbi kifejezés nulla legyen, kell hogy:

a.) $\widetilde{g}^{(4)}(x) = 0$

b.) $\widetilde{g}''\left(x_i^-\right) = \widetilde{g}''\left(x_i^+\right) \qquad i = 1, \ldots, n-1$

c.) $\widetilde{g}''(x_0) = 0\,, \qquad \widetilde{g}''(x_n) = 0$

Tehát a fenti **1 - 3.** tulajdonságú és a **4.** integrált minimalizáló $\widetilde{g}$ függvény egy kétszer folytonosan deriválható, szakaszonként harmadfokú (interpolációs) spline kell legyen.

■

Megjegyzés :

A fenti tétel és a minimum tulajdonság a másik két peremfeltétel esetén is igaz.

A tétel fizikai jelentése :

Az adott f függvényt interpoláló függvények közül a köbös interpolációs spline esetén lesz a deformációs energia a legkisebb (minimális).

1.7.2. A köbös interpolációs spline konstrukciója

Legyen az $[\, x_i\,,\, x_{i+1}\,]$ intervallumon a spline (harmadfokú polinom) alakja a következő:

$$S_i(x) = a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}x^2 + a_{i3}x^3$$

$$S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i)$$

Így n darab harmadfokú polinomot kell meghatározni. Ez $4n$ darab ismeretlen.

A feltételek száma :

$S(x_i) = y_i \quad \Longrightarrow \quad (n+1)$ darab feltétel

$S\,,\ S'\,,\ S''$ folytonos a belső pontokban $\quad \Longrightarrow \quad 3(n-1)$ darab feltétel

Ez eddig $4n-2$ darab feltétel.

A hiányzó két feltételt megadja valamelyik a peremfeltételek közül.

Az $S(x)$ köbös spline-t az $S''(x_i) = M_i \quad i = 0, \ldots, n$ úgynevezett momentumai segítségével állítjuk elő.

Legyen $\quad h_{i+1} := x_{i+1} - x_i \quad i = 0, \ldots, n-1.$

Az S köbös spline második deriváltja szakaszonként lineáris függvény.

Az $x \in [\,x_i\,,\,x_{i+1}\,]$ intervallumon:

$$S''(x) = M_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Ez tulajdonképpen az $L_1(x)$ elsőfokú Lagrange interpolációs polinom.

$$\textit{(3)} \qquad \boxed{S''(x) = M_i \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{h_{i+1}}} \qquad x \in I_i = [\,x_i\,,\,x_{i+1}\,]$$

(3) - at kétszer integrálva:

$$\textit{(4)} \qquad S'(x) = -M_i \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^2}{2h_{i+1}} + A_i \qquad x \in [\,x_i\,,\,x_{i+1}\,]$$

$$\textit{(5)} \qquad S(x) = M_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_{i+1}} + A_i(x - x_i) + B_i$$

ahol $A_i,\ B_i$ integrációs állandók.

$$S(x_i) = y_i \quad \Longrightarrow \quad M_i \frac{(h_{i+1})^2}{6} + B_i = y_i \quad \Longrightarrow \quad \boxed{B_i = y_i - M_i \frac{(h_{i+1})^2}{6}}$$

$$S(x_{i+1}) = y_{i+1} \qquad \Longrightarrow \qquad M_{i+1}\frac{(h_{i+1})^2}{6} + A_i h_{i+1} + y_i - M_i\frac{(h_{i+1})^2}{6} = y_{i+1} \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{A_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6}(M_{i+1} - M_i)}$$

Így az S köbös spline az adatok és az M_i momentumok segítségével meghatározható.

Legyen:

(6) $\quad S(x) = \delta_i + \gamma_i(x - x_i) + \beta_i(x - x_i)^2 + \alpha_i(x - x_i)^3 \qquad$ alakú $\quad x \in [\,x_i\,,\,x_{i+1}\,]$ - on

$$S(x_i) = y_i \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\delta_i = y_i}$$

$$S'(x_i) = \gamma_i \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\gamma_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{2M_i + M_{i+1}}{6}\, h_{i+1}}$$

$$S''(x_i) = 2\beta_i \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\beta_i = \frac{M_i}{2}}$$

$$S'''(x_i) = 6\alpha_i \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\alpha_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_{i+1}}}$$

Az $\mathbf{M_i}$ momentumok meghatározása :

Ezeket az S spline deriváltjának a belső csomópontokbeli folytonosságából lehet meghatározni.

$$S'\left(x_i^+\right) = S'\left(x_i^-\right) \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

$$x \in [\,x_{i-1}\,,\,x_i\,] \qquad S_i'(x) = -M_{i-1}\frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1})$$

$$x \in [\,x_i\,,\,x_{i+1}\,] \qquad S_i'(x) = -M_i\frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_{i+1}} + M_{i+1}\frac{(x - x_i)^2}{2h_{i+1}} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6}(M_{i+1} - M_i)$$

Így

$$S'\left(x_i^-\right) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \frac{h_i}{3}\, M_i + \frac{h_i}{6}\, M_{i-1} \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

$$S'\left(x_i^+\right) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{3}\, M_i - \frac{h_{i+1}}{6}\, M_{i+1} \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

Ezek egyenlőségéből M_i - kre a következő $(n-1)$ darab egyenletből álló rendszer jön:

$$\textit{(7)} \qquad \frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} M_i + \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

(7) - et szorozzuk $\dfrac{6}{h_{i+1} + h_i}$ - vel $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \qquad \mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \qquad i = 1, \ldots, n-1 \qquad \text{ahol}$$

$$\mu_i = \frac{h_i}{h_{i+1} + h_i}, \qquad \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_{i+1} + h_i} \qquad d_i = \frac{6}{h_{i+1} + h_i} \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right]$$

0 - ra és n - re legyen $\lambda_0 = d_0 = \mu_n = d_n = 0$

Így M_i - kre kapott lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}
2M_0 + \lambda_0 M_1 &= d_0 \\
\mu_1 M_0 + 2M_1 + \lambda_1 M_2 &= d_1 \\
&\vdots \\
\mu_{n-1} Mn - 2 + 2M_{n-1} + \lambda_{n-1} M_n &= d_{n-1} \\
\mu_n M_{n-1} + 2M_n &= d_n
\end{aligned}$$

Vagy mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix}
2 & \lambda_0 & 0 & & \cdots & & 0 \\
\mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & & \\
0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & 0 \\
 & & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\
0 & & \cdots & & 0 & \mu_n & 2
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

Ez tridiagonális mátrixú egyenletrendszer, ami a rövidített Gauss - algoritmussal hatékonyan megoldható.

1.7.3. Konvergenciatétel köbös spline interpolációra

Legyen $f \in C^{(4)}\,[\,a\,,\,b\,]$ és $f^{''}\,(a) = f^{''}\,(b) = 0.$

Jelöljük $\|\,g\,\|_\infty := \max\limits_{x \in [\,a\,,\,b\,]} |g\,(x)|\,,\quad M_4 := \|\,f^{(4)}\,\|_\infty\,.$

$S_h\,(x)$ az f - et interpoláló köbös spline $[\,a\,,\,b\,]$ - n Ω_h egyenletes felosztás esetén ($h := x_{i+1} - x_i$ lépésköz).

Ekkor érvényesek a következő becslések:

$$\|\,f\,(x) - S_h\,(x)\,\|_\infty \le M_4 \cdot h^4$$

$$\|\,f^{'}\,(x) - S_h^{'}\,(x)\,\|_\infty \le M_4 \cdot h^3$$

$$\|\,f^{''}\,(x) - S_h^{''}\,(x)\,\|_\infty \le M_4 \cdot h^2$$

Tehát, ha $h \to 0$, akkor az $S_h\,(x)\,,\ S_h^{'}\,(x)\,,\ S_h^{''}\,(x)$ függvények egyenletesen konvergálnak a megfelelő $f\,(x)\,,\ f^{'}\,(x)\,,\ f^{''}\,(x)$ függvényekhez.

Természetes peremfeltételek mellett:

$$S^{''}\,(a) = S^{''}\,(b) = 0.$$

Megjegyzés :

Az egyenletes konvergencia igaz a másik két peremfeltétel esetén is.

Hasonló tétel érvényes nem egyenletes felosztás esetén is, csak a konvergencia egy kicsit lassabb.

1.8. AZ m - EDRENDŰ POLINOMIÁLIS SPLINEOK TERE: $\mathbf{S_m}(\boldsymbol{\Omega}_\mathbf{n})$

Legyen $\Omega_n := \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\},$

$I_k := [x_k,\, x_{k-1}] \quad k = 1, \ldots, n,$

$h_i := x_i - x_{i-1} \quad i = 1, \ldots, n.$

Definíció :

Az $S(x) : [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ függvényt m - edfokú polinomiális spline - nak nevezzük, ha

1. $S(x)_{|_{I_k}} \in P_m(x)$ szakaszonként m - edfokú polinom.

2. $S(x) \in C^{(m-1)}\,[\,a\,,\,b\,]$ $(m-1)$ - szer folytonosan deriválható ”feszített” spline.

Ha azt tesszük fel csak, hogy $S \in C^{(q)}\,[\,a\,,\,b\,]$, ahol $q < m-1$, ”laza” spline-ról (subspline-ról) beszélünk.

Ha adott $f \in C\,[\,a\,,\,b\,]$ esetén még teljesül, hogy

3. $S(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0, \ldots, n)$ akkor az $S(x)$ - et m - edfokú interpolációs spline - nak nevezzük.

Példa:

$m = 1$ esetén a szakaszonként lineáris ”töröttvonal” függvény, elsőfokú spline.

$m > 1$ esetén:

m - EDFOKÚ EGYOLDALI SPLINEOK

Deriváljuk a

$q_{m_i}(x) : [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ függvényt a következő módon:

$$\textit{(1)} \qquad q_{m_i}(x) := \begin{cases} (x - x_i)_+^m, & \text{ha} \quad x \geq x_i \\ 0, & \text{ha} \quad x < x_i \end{cases} \qquad (i = 0, \ldots, n-1).$$

Definíció :

A fent definiált m - edfokú splineok terét jelölje: $S_m(\Omega_n)$.

Nyilvánvalóan: $S_m(\Omega_n) \subset C^{(m-1)}\,[\,a\,,\,b\,]$.