9. Csebisev – polinomok (elsõfajú)

Legyen $n \in I\!N$, $T_n(x) := \cos(n \cdot \arccos(x))$, $x \in [-1,1]$.

9.1. Tulajdonságai:

9.1.1. Az elsõfajú Csebisev polinomra teljesül a következõ **rekurzió.**

$$
\begin{aligned}
&T_0(x) = 1 \\
&T_1(x) = x \\
&T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad (\mathrm{n} = 1,2,\ldots)
\end{aligned}
$$

Bizonyítás: Vezessük be az $x = \cos(\alpha)$ helyettesítést!

$$
\begin{aligned}
2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x) &= 2x \cdot \cos(n \cdot \arccos(x)) - \cos((n-1) \cdot \arccos(x)) = \\
&= 2\cos(\alpha) \cdot \cos(n\alpha) - \cos((n-1) \cdot \alpha) = \\
&= 2\cos(\alpha) \cdot \cos(n\alpha) - (\cos(n\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \sin(n\alpha) \cdot \sin(\alpha)) = \\
&= \cos(n\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \sin(n\alpha) \cdot \sin(\alpha) = \cos((n+1)\alpha) = T_{n+1}(x).
\end{aligned}
$$

9.1.2. A rekurzióból látható, hogy T_n n-edfokú valós együtthatós polinom és $n \geq 1$ esetén a **fõegyütthatója:** 2^{n-1} .

Definiáljuk az **1 fõegyütthatós Csebisev-polinom**ot.

$$t_n(x) := \frac{1}{2^{n-1}} \cdot T_n(x), \quad x \in [-1,1]$$

9.1.3. T_n - nek **n darab különbözõ**, **valós gyöke** van [-1; 1] – en.

Bizonyítás: $\cos(n \cdot \arccos(x)) = 0$

$$n \cdot \arccos(x_k) = -\frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{2k-1}{2}\pi$$

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \qquad (\mathrm{k} = 1,2,\ldots,\mathrm{n})$$

Azaz a gyökök 0-ra szimmetrikusan helyezkednek el. Ha n páratlan, akkor a 0 is gyök.

9.1.4. T_n - nek **(n+1) darab extremális pontja van** (szélsõértékhelye).

$$
\begin{aligned}
&\cos(n \cdot \arccos(x_k)) = \pm 1 \\
&n \cdot \arccos(x_k) = k\pi \\
&x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \qquad (\mathrm{k} = 0,\ldots,\mathrm{n})
\end{aligned}
$$

Ekkor $\mathrm{T_n}(x_k) = (-1)^k$, $\quad$ (k = 0,...,n).

9.1.5. Kielégíti a következõ **differenciálegyenletet**.

$$(1-x^2)\cdot T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0 \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

9.1.6. Ortogonális polinomrendszer az $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ súlyfüggvénnyel, azaz

$$0 = \langle T_n, T_k \rangle = \int_{-1}^{1} T_n(x)\cdot T_k(x)\cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (n \neq k).$$

9.1.7. Csebisev tétel: Az 1 fõegyütthatós legfeljebb n-edfokú polinomok közül a t_n polinom abszolútérték maximuma a legkisebb, azaz

$$\min_{p_n \in P_n \text{ 1 fõeh.-s}} \left(\max_{x\in[-1;1]} |p_n(x)| \right) = \max_{x\in[-1;1]} |t_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Az $\|f\|_{C[-1;1]} := \max_{x\in[-1;1]} |f(x)|$ jelölést használva:

$$\min_{p_n \in P_n \text{ 1 fõeh.-s}} \|p_n\|_{C[-1;1]} = \|t_n\|_{C[-1;1]} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

9.2. Interpolálás Csebisev gyök alappontokon.

Legyen $f \in D^{(n)}$ [-1;1], $x_k = \cos\left(\dfrac{2k-1}{2n}\pi\right)$ (k = 1,...,n) és az $f(x_k)$ értékek adottak.

Ekkor az interpoláció hibaformuláját felhasználva $\forall\, x \in \mathbb{R}$-re

$$|f(x) - p_{n-1}(x)| \le \frac{M_n}{n!}\cdot |w(x)| = \frac{M_n}{n!}\cdot \prod_{k=1}^{n}(x - x_k) = \frac{M_n}{n!}\cdot t_n(x) \le \frac{M_n}{n!}\cdot \frac{1}{2^{n-1}}$$

Megjegyzés: A Csebisev tétel miatt a Csebisev gyökökön való interpolálás minimalizálja a hibát.

9.3. Interpolálás [a;b] – n, a transzformált Csebisev gyökökön.

$x_k := \cos\left(\dfrac{2k-1}{2n}\pi\right)$ (k=1,…,n)

$y_k := \dfrac{b-a}{2}\cdot x_k + \dfrac{a+b}{2}$ (k=1,…,n) a transzformált gyökök és

$f(y_k)$ a megfelelõ függvény értékek.

Az $y_n, f(y_k)$ (k=1,..,n) értékekre felírt p_{n-1} interpolációs polinomra

$$|f(y) - p_{n-1}(y)| \le \frac{M_n}{n!}\cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2^{n-1}}.$$

1. Példa: Közelítsük az $x^3 - x$ függvényt a [0;2] intervallumon másodfokú polinommal, hogy a közelítés hibája minimális legyen. Mekkora lesz a maximális hiba?

Megoldás: T_3 gyökei: $x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{6}\pi\right)$ (k=1, 2, 3) azaz $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow y_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$x_2 = 0 \rightarrow y_2 = 1$$

$$x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \underset{\text{trf.}}{\rightarrow} y_3 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|f(y) - p_2(y)| \le \frac{M_3}{3!} \cdot \left(\frac{2-0}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{3!}{3!} \cdot \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}} \qquad y \in [0;2]\text{- re}$$

ahol $M_3 = \max\limits_{y \in [0,2]} |f'''(y)| = 3!$.