

## 8. Hermite-féle interpoláció

Tegyük fel, hogy az  $x_0, \dots, x_k \in [a, b]$  különböző alappontok ( $k \leq n$ ), továbbá  $m_0, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ :

$\sum_{i=0}^k m_i = n + 1$  multiplicitások. Adottak az  $f^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)}$ , ( $i = 0, \dots, k, j = 0, \dots, m_i - 1$ ) értékek.

Olyan  $P \in P_n$   $n$ -edfokú polinomot keresünk, melyre

$$P^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)}, \quad (i = 0, \dots, k, j = 0, \dots, m_i - 1).$$

**8.1. Tétel.**  $\exists! P \in P_n$ , melyre  $P^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)}$ , ( $i = 0, \dots, k, j = 0, \dots, m_i - 1$ ).

**Bizonyítás.** A határozatlan együtthatók módszerével felírt lineáris egyenletrendszer egyértelmű megoldhatóságát kell bizonyítanunk.

Vizsgáljuk először a homogén egyenletrendszer megoldhatóságát.

Tegyük fel indirekt módon, hogy  $\exists P \neq \tilde{P} \in P_n$  Hermite interpolációs polinom.

Ekkor a  $P - \tilde{P}$  polinom legfeljebb  $n$ -edfokú és multiplicitással számolva  $n+1$  gyöke van, tehát  $P - \tilde{P} \equiv 0$ , azaz  $P = \tilde{P}$ , egyértelmű a megoldás.

Tehát a homogén egyenletnek  $\exists!$  mo.-a ( $\exists P \equiv 0$ ). Innen következik, hogy az inhomogén egyenletnek is  $\exists!$  mo.-a.

**8.2. Tétel.** (A Hermite-interpoláció hibaformulája)

Legyen  $f \in D^{n+1}(a, b)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  tetszőleges és  $[a, b]$ -vel jelöljük az  $x$  és az  $x_i$  alappontok által kifeszített intervallumot, ekkor

$$\exists \xi \in [a, b]: \quad f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x),$$

$$\text{ahol } \omega(x) = \prod_{i=0}^k (x - x_i)^{m_i}.$$

Ha  $\sup_{y \in [a, b]} |f^{(n+1)}(y)| =: M_{n+1} < \infty$ , akkor az

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |\omega(x)|$$

becslést kapjuk az interpoláció hibájára.

**Megjegyzés.**

1. Ha  $m_i = 1 \forall i$ -re, akkor a 7. fejezetben tárgyalt polinom interpolációt kapjuk.

2. Ha  $m_i = 2 \forall i$ -re, akkor a Fejér-Hermite interpolációt kapjuk, melynek ismert az explicit alakja és az a Lagrange-alappolinomok segítségével felírható.

## 8.1. Osztott differenciák ismétlődő argumentumokkal

Azonos alappontok esetén az osztott differencia nem definiálható a szokásos formulával. A fogalom kiterjesztése határátmenettel történik.

$$f[x, x] := \lim_{y \rightarrow x} f[x, y] = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x)$$

Hasonlóan a  $k - 1$  -edrendű osztott differenciára adódik, hogy

$$f[x, x, \dots, x] := \frac{f^{(k)}(x)}{k!}$$

A többi, azonos alappontokat is tartalmazó osztott differencia a fentiekből a szokásos definícióval számolható.

## 8.2. Hermite-interpolációs polinom előállítása Newton alakkal:

Az osztott differencia táblázat felépítése:

a) Minden alappontot annyiszor veszünk fel egymás után, amennyi a multiplicitása, pl.  $x_i$ -t  $m_i + 1$ -szer egymás után.

b) Beírjuk az  $f(x_i)$  értékeket és a megfelelő  $\frac{f^{(j)}(x_i)}{j!}$  értékeket az  $x_i$  alappontra támaszkodó  $j - 1$ -edrendű osztott differenciák helyére ( $f^{(j)}(x_i)$  ismeretében).

c) A táblázat többi részét az osztott differencia fogalom definíciója alapján töltjük ki.

d) Az interpolációs polinom felírása a táblázatból a szokásos módon történik, a táblázat átlójában szereplő elemek, mint együtthatók segítségével.

## 8.3. Hermite-interpolációs polinom előállítása Lagrange alakkal:

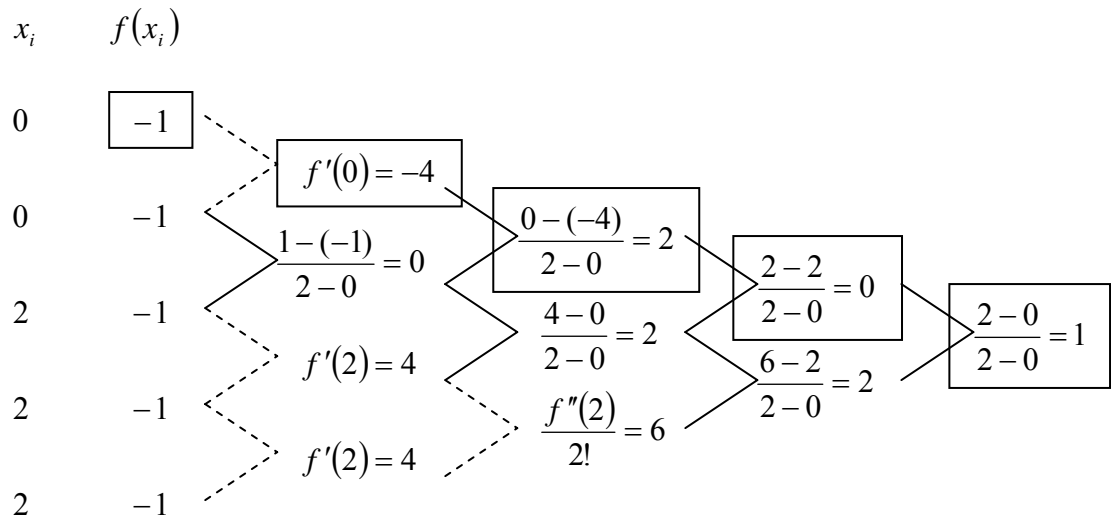
Felírjuk a megfelelő alappolinomokat, majd mindegyiket a megfelelő  $f^{(j)}(x_i)$ -vel szorozva az interpolációs polinomot. Az alappolinomok előállítása bonyolult, az alappontok illetve a multiplicitás értékektől függ az alakjuk.

## 8.4. Kidolgozott példák.

**1. Példa.** Mi lesz az  $f$  -et közelítő Hermite-interpolációs polinom, ha

$$\begin{aligned} f(0) = -1 \quad f(2) = -1 \\ f'(0) = -4 \quad f'(2) = 4 \end{aligned} \quad \text{és} \quad f''(2) = 12 \rightarrow \frac{f''(2)}{2!} = 6 .$$

**Megoldás.** Elkészítjük az osztott differencia táblázatot.



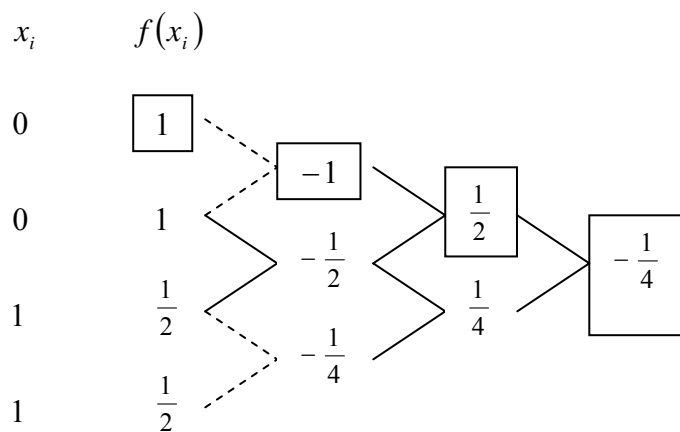
$$\begin{aligned}
 P(x) &= -1 + (-4)(x-0) + 2(x-0)^2 + 0 \cdot (x-0)^2(x-2) + 1 \cdot (x-0)^2(x-2)^2 \\
 &= -1 - 4x + 2x^2 + x^2(x-2)^2 = \underline{\underline{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 1}}
 \end{aligned}$$

(Deriválással és helyettesítéssel ellenőrizhető az eredmény!)

**2. Példa.** Legyen  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ,  $x \in [0,1]$ .  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = -1$ ,  $f(1) = \frac{1}{2}$ ,  $f'(1) = -\frac{1}{4}$ .

Írjuk fel a Hermite interpolációs polinomot és becsüljük a hibát a  $[0,1]$  intervallumon illetve az  $1/3$  pontban!

**Megoldás.** Elkészítjük az osztott differencia táblázatot.



$$\begin{aligned}
 P(x) &= 1 + (-1)x + \frac{1}{2}x^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)x^2(x-1) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^2 = \\
 &= \underline{\underline{1 - x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3}}
 \end{aligned}$$

Hibabecslés  $[0,1]$ -en:

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f'''(x) = \frac{-3!}{(1+x)^4}, \quad f^{IV}(x) = \frac{4!}{(1+x)^5}$$

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M_4}{4!} |\omega(x)| = \frac{4!}{4!} |(x-0)^2(x-1)^2| = x^2(x-1)^2,$$

$$\text{ahol } M_4 = \max_{\xi \in [0,1]} |f^{IV}(\xi)| = \max_{\xi \in [0,1]} \frac{4!}{(1+\xi)^5} = 4!$$

Az  $\omega(x) = (x(x-1))^2$  az  $x = \frac{1}{2}$  helyen maximális, így  $\max_{x \in [0,1]} |\omega(x)| = \left| \left( \frac{1}{2} \right)^2 \left( \frac{1}{2} - 1 \right)^2 \right| = \frac{1}{16}$ .

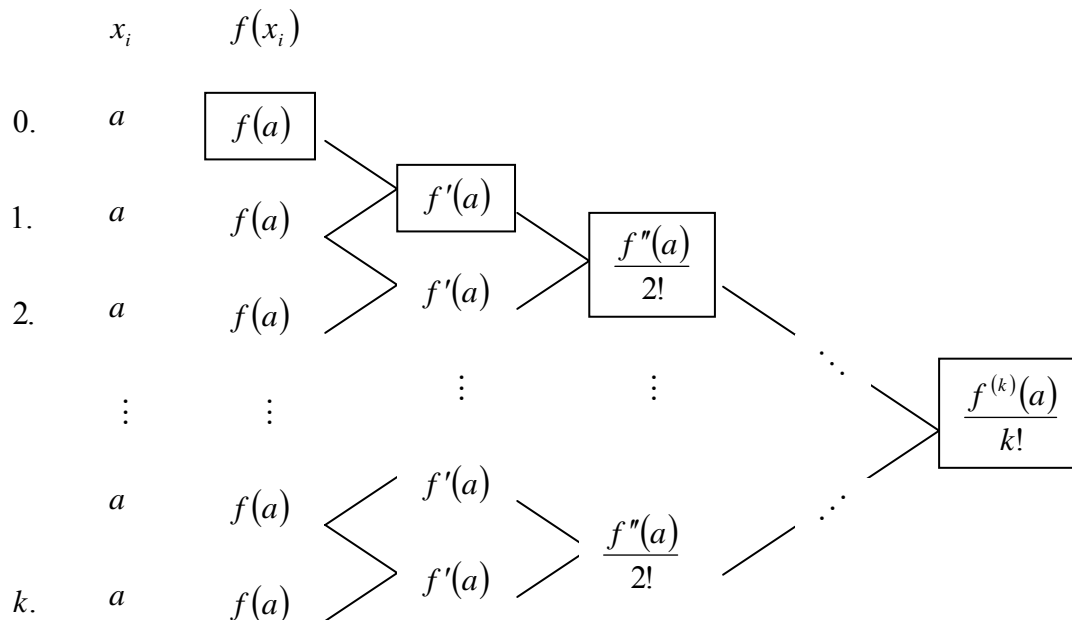
$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M_4}{4!} |\omega(x)| = \frac{4!}{4!} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

Hibabecslés az  $x = \frac{1}{3}$  pontban:

$$\left| f\left(\frac{1}{3}\right) - P\left(\frac{1}{3}\right) \right| \leq \frac{M_4}{4!} \left| \omega\left(\frac{1}{3}\right) \right| = \frac{4!}{4!} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{81}$$

**3. Példa.** Az  $f(a), f'(a), \dots, f^{(k)}(a)$  felhasználásával írjuk fel az Hermite interpolációs polinomot! Mit kapunk?

**Megoldás.** Elkészítjük az osztott differencia táblázatot.



$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$  az  $a$  középpontú  $k$ -adfokú Taylor-polinom!