8. Hermite-féle interpoláció

Tegyük fel, hogy az $x_0,...,x_k \in [a,b]$ különböző alappontok $(k \le n)$, továbbá $m_0,...,m_k \in \mathbb{N}$: $\sum_{i=0}^{k} m_i = n+1$ multiplicitások. Adottak az $f^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)}$, $(i = 0,...,k,\ j = 0,...,m_i - 1)$ értékek.
Olyan $P \in \mathrm{P}_n$ n-edfokú polinomot keresünk, melyre

$$P^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)},\ (i = 0,...,k,\ j = 0,...,m_i - 1).$$

8.1. Tétel. $\exists!\, P \in \mathrm{P}_n$, melyre $P^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)},\ (i = 0,...,k,\ j = 0,...,m_i - 1)$.

Bizonyítás. A határozatlan együtthatók módszerével felírt lineáris egyenletrendszer egyértelmű megoldhatóságát kell bizonyítanunk.
Vizsgáljuk először a homogén egyenletrendszer megoldhatóságát.
Tegyük fel indirekt módon, hogy $\exists\ P \ne \widetilde{P} \in \mathrm{P}_n$ Hermite interpolációs polinom.
Ekkor a $P - \widetilde{P}$ polinom legfeljebb n-edfokú és multiplicitással számolva n+1 gyöke van, tehát $P - \widetilde{P} \equiv 0$, azaz $P = \widetilde{P}$, egyértelmű a megoldás.
Tehát a homogén egyenletnek $\exists!$ mo.-a ($\exists\ P \equiv 0$). Innen következik, hogy az inhomogén egyenletnek is $\exists!$ mo.-a.

8.2. Tétel. (A Hermite-interpoláció hibaformulája)
Legyen $f \in D^{n+1}(a,b), x \in \mathbb{R}$ tetszőleges és [a,b]-vel jelöljük az x és az x_i alappontok által kifeszített intervallumot, ekkor

$$\exists \xi \in [a,b]: \quad f(x) - P(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x),$$

$$\text{ahol } \omega(x) = \prod_{i=0}^{k} (x - x_i)^{m_i} .$$

Ha $\sup_{y\in[a,b]} \left| f^{(n+1)}(y) \right| =: M_{n+1} < \infty$, akkor az

$$|f(x) - P(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |\omega(x)|$$

becslést kapjuk az interpoláció hibájára.

Megjegyzés.
1. Ha $m_i = 1\ \forall i$-re, akkor a 7. fejezetben tárgyalt polinom interpolációt kapjuk.
2. Ha $m_i = 2\ \ \forall i$-re, akkor a Fejér-Hermite interpolációt kapjuk, melynek ismert az explicit alakja és az a Lagrange-alappolinomok segítségével felírható.

8.1. Osztott differenciák ismétlődő argumentumokkal

Azonos alappontok esetén az osztott differencia nem definiálható a szokásos formulával. A forgalom kiterjesztése határátmenettel történik.

$$f[x,x] := \lim_{y\to x} f[x,y] = \lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(x)$$

Hasonlóan a $k-1$ -edrendű osztott differenciára adódik, hogy

$$f[x,x,\ldots,x] := \frac{f^{(k)}(x)}{k!}$$

A többi, azonos alappontokat is tartalmazó osztott differencia a fentiekből a szokásos definícióval számolható.

8.2. Hermite-interpolációs polinom előállítása Newton alakkal:

Az osztott differencia táblázat felépítése:
a) Minden alappontot annyiszor veszünk fel egymás után, amennyi a multiplicitása, pl. x_i-t m_i+1-szer egymás után.

b) Beírjuk az $f(x_i)$ értékeket és a megfelelő $\frac{f^{(j)}(x_i)}{j!}$ értékeket az x_i alappontra támaszkodó $j-1$-edrendű osztott differenciák helyére ($f^{(j)}(x_i)$ ismeretében).

c) A táblázat többi részét az osztott differencia fogalom definíciója alapján töltjük ki.

d) Az interpolációs polinom felírása a táblázatból a szokásos módon történik, a táblázat átlójában szereplő elemek, mint együtthatók segítségével.

8.3. Hermite-interpolációs polinom előállítása Lagrange alakkal:

Felírjuk a megfelelő alappolinomokat, majd mindegyiket a megfelelő $f^{(j)}(x_i)$-vel szorozva az interpolációs polinomot. Az alappolinomok előállítása bonyolult, az alappontok illetve a multiplicitás értékektől függ az alakjuk.

8.4. Kidolgozott példák.

1.Példa. Mi lesz az f -et közelítő Hermite-interpolációs polinom, ha

$$\begin{matrix} f(0)=-1 \\ f'(0)=-4 \end{matrix},\quad \begin{matrix} f(2)=-1 \\ f'(2)=4 \end{matrix} \quad \text{és} \quad f''(2)=12 \to \frac{f''(2)}{2!}=6 \ .$$

Megoldás. Elkészítjük az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$				
0	$\boxed{-1}$				
		$\boxed{f'(0)=-4}$			
0	-1		$\boxed{\frac{0-(-4)}{2-0}=2}$		
		$\frac{1-(-1)}{2-0}=0$		$\boxed{\frac{2-2}{2-0}=0}$	
2	-1		$\frac{4-0}{2-0}=2$		$\boxed{\frac{2-0}{2-0}=1}$
		$f'(2)=4$		$\frac{6-2}{2-0}=2$	
2	-1		$\frac{f''(2)}{2!}=6$		
		$f'(2)=4$			
2	-1				

$$P(x)=-1+(-4)(x-0)+2(x-0)^2+0\cdot(x-0)^2(x-2)+1\cdot(x-0)^2(x-2)^2$$
$$=-1-4x+2x^2+x^2(x-2)^2=\underline{\underline{x^4-4x^3+6x^2-4x-1}}$$

(Deriválással és helyettesítéssel ellenőrizhető az eredmény!)

2. Példa. Legyen $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$, $x\in[0,1]$. $f(0)=0,\ f'(0)=-1,\ f(1)=\frac{1}{2},\ f'(1)=-\frac{1}{4}$.

Írjuk fel a Hermite interpolációs polinomot és becsüljük a hibát a [0,1] intervallumon illetve az 1/3 pontban!

Megoldás. Elkészítjük az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$			
0	$\boxed{1}$			
		$\boxed{-1}$		
0	1		$\boxed{\frac{1}{2}}$	
		$-\frac{1}{2}$		$\boxed{-\frac{1}{4}}$
1	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$	
		$-\frac{1}{4}$		
1	$\frac{1}{2}$			

$$P(x)=1+(-1)x+\frac{1}{2}x^2+\left(-\frac{1}{4}\right)x^2(x-1)=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{4}x^2=$$
$$=\underline{\underline{1-x+\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{4}x^3}}$$

Hibabecslés $[0,1]$-en:

$$f'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}\ ,\ f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}\ ,\ f'''(x)=\frac{-3!}{(1+x)^4}\ ,\ f^{IV}(x)=\frac{4!}{(1+x)^5}$$

$$|f(x)-P(x)|\le\frac{M_4}{4!}|\omega(x)|=\frac{4!}{4!}\left|(x-0)^2(x-1)^2\right|=x^2(x-1)^2,$$

$$\text{ahol } M_4=\max_{\xi\in[0,1]}\left|f^{IV}(\xi)\right|=\max_{\xi\in[0,1]}\frac{4!}{(1+\xi)^5}=4!$$

Az $\omega(x)=(x(x-1))^2$ az $x=\frac{1}{2}$ helyen maximális, így $\max_{x\in[0,1]}|\omega(x)|=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}-1\right)^2\right|=\frac{1}{16}$.

$$|f(x)-P(x)|\le\frac{M_4}{4!}|\omega(x)|=\frac{4!}{4!}\cdot\frac{1}{16}=\underline{\underline{\frac{1}{16}}}$$

Hibabecslés az $x=\frac{1}{3}$ pontban:

$$\left|f\left(\frac{1}{3}\right)-P\left(\frac{1}{3}\right)\right|\le\frac{M_4}{4!}\left|\omega\left(\frac{1}{3}\right)\right|=\frac{4!}{4!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}-1\right)^2=\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{9}=\underline{\underline{\frac{4}{81}}}$$

3. Példa. Az $f(a), f'(a),..., f^{(k)}(a)$ felhasználásával írjuk fel az Hermite interpolációs polinomot! Mit kapunk?

Megoldás. Elkészítjük az osztott differencia táblázatot.

	x_i	$f(x_i)$				
0.	a	$\boxed{f(a)}$				
			$\boxed{f'(a)}$			
1.	a	$f(a)$		$\boxed{\frac{f''(a)}{2!}}$		
			$f'(a)$			
2.	a	$f(a)$			$\ddots$	
			$\vdots$	$\vdots$		$\boxed{\frac{f^{(k)}(a)}{k!}}$
	$\vdots$	$\vdots$				
			$f'(a)$		$\cdot^{\cdot^{\cdot}}$	
	a	$f(a)$		$\frac{f''(a)}{2!}$		
			$f'(a)$			
k.	a	$f(a)$				

$P(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+...+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ az a középpontú k-adfokú Taylor-polinom!