Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Interpoláció

Szakdolgozat

Mihalkó Zita

Matematika BSc

Matematikai elemző szakirány

Témavezető: Kurics Tamás

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

2010

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Az interpoláció matematikai közelítő módszer. A természettudományok gyakori feladata, hogy a mérésekből, mintavételezésekből származó adatai (adatpontjai) segítségével próbál az ismeretlen értékekre következtetni. Ehhez egy, az adatpontokra szorosan illeszkedő függvényt konstruál. Ez a függvény annál pontosabb, minél több adat áll rendelkezésünkre.

Az interpoláció során célunk az $f(x)$ függvény alakjának egy $I(x)$ függvénnyel való minél pontosabb megközelítése olyan formában, hogy a közelítő függvény is áthaladjon az ún. tabulált pontokon, tehát elégítse ki az $I(x_i) = f(x_i) = y_i$ feltételt. Interpolációról akkor beszélünk ha az x pont, melyben az $f(x)$ értéket szeretnénk megbecsülni, a megadott pontok által meghatározott intervallumon belül helyezkedik el.

Az interpolációs módszereket több osztályba sorolhatjuk. A közelítési függvények típusát tekintve lehetnek:

- Polinomiálisak: a közelítő függvények polinomok (a legelterjedtebb módszerek). Az interpoláció segítségével $n+1$ különböző számpárra, vagyis $n+1$ pontra egyértelműen illeszthető egy legfeljebb n-ed fokú polinom, amely átmegy az adott pontokon.

- Trigonometrikusak: trigonometrikus függvények segítségével interpolálunk. Ezek az interpolációval egybekötött Fourier-módszerek alkalmazása esetén hasznosak.

Attól függően, hogy milyen más tulajdonságokkal szeretnénk felruházni a közelítő függvényt, az interpoláció lehet:

- Lokális: ha az $I(x)$ közelítőfüggvény meghatározásakor az x közelében fellelhető néhány pontot vesszük figyelembe. Ezek a módszerek ismételten alkalmaznak egy algoritmust a teljes ponthalmaz egy kis részére.

- Globális: ha az összes rendelkezésre álló (x_i, y_i) pontot felhasználjuk, bármely x értékről lenne szó; a pontok egyetlen függvényt határoznak meg. Mivel egy új pont függvényértékének meghatározásához minden ismert pontot felhasználunk, emiatt az eljárás számításigényes. Ezek a módszerek általában simább függvényeket eredményeznek, amelyeken a változások kevésbé kiugróan jelennek meg.

2. Motiváció

Az interpoláció segítsével nem csupán elméleti matematikai kérdésekre, hanem a gyakorlati életből vett problémákra is választ kaphatunk.

Egy ilyen gyakorlatból eredő numerikus feladat a kőolaj-lelőhelyek feltárásának problémája (ld. [3]). A kőolaj $u = u(x, y, z)$ nyomása a földalatti rétegekben leírható az

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(a\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0 \qquad (1)$$

egyenlettel, amelyből az u függvény bizonyos mellékfeltételek esetén határozható meg. Ezen feltételek egyike, hogy az (1) egyenletben szereplő $a = a(x, y, z)$ együttható a vizsgált tartományban mindenhol ismert, pozitív és korlátos legyen. Ez az a a kőolajat rejtő kőzet, valamint a kőolaj tulajdonságaitól függ. Az a együtthatót fúrással állapíthatjuk meg néhány (x_k, y_k) helyen és sok z értékre. Mivel az a együttható ismerete szükséges az egyenlet megoldásához, a fúrás viszont költséges, ezért kell a meglévő információkat minél jobban hasznosítani, hogy abból kapjuk az együtthatót az egész vizsgált tartományban.

Egy másik, elméleti matematikai feladat (ld. [2]): Egy nagyméretű A mátrix valamelyik közbülső λ sajátértékét csak költségesen lehet kiszámítani. Gyakori eset, hogy az A mátrix folytonosan függ egy x paramétertől, ennek következtében λ az x folytonos függvénye lesz. Célszerűnek tűnik a λ függvényt csak egyes paraméterértékekre kiszámítani és ezután valahogy simán összekötni – interpolálni – a kapott λ-értékeket lényegesen kevesebb műveletigénnyel járó eljárást használva. Ekkor azzal kell számolnunk, hogy a csökkentett műveletigény ára az lesz, hogy a pontos értékektől eltávolodva növekvő hibával kapjuk a $\lambda(x)$ értékét. Amennyiben viszont újabb, pontosan kiszámított λ-értékeket beiktatunk, azt kívánjuk, hogy az említett hiba csökkenjen. Nyilvánvaló, hogy a feladat lényege nem változik, ha $\lambda(x)$ nem sajátérték, hanem az x változónak egy másik, költségesen kiszámítható függvénye.

3. Polinomiális interpoláció

A matematikusok évszázadok óta vizsgálják a polinomokat számos tulajdonságuk miatt. A polinomok olyan kifejezések, melyben csak számok és változók egész kitevőjű hatványainak összegei és szorzatai szerepelnek, így kényelmesen lehet velük számolni. Kiszámításuk egyszerű és a Horner-módszerrel a legkisebb műveletigénnyel megoldható. Ezért természetes, ha polinomokat használunk bonyolultabb függvények közelítésére.

Emlékeztetőként:

- $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ esetén jelölje P_n a
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$
összegképlettel megadható, legfeljebb n-edfokú polinomok terét, ahol az x valós változó valós $a_0, \dots, a_n$ együtthatókkal.

- Egy $p \in P_n$ polinomot n-edfokúnak nevezünk, ha $a_n \neq 0$.

- Az $[a, b]$ intervallumon $(a < b)$ folytonos, valós értékű függvények $C[a, b]$ terének egy altereként tekintünk P_n-re.

- A Horner-módszer segítségével könnyen kiszámítható $p(x)$ helyettesítési értéke. Ehhez kissé átalakítjuk a polinomot:
$$p(x) = (\dots(a_n x + a_{n-1})x + \dots + a_1)x + a_0.$$
Tehát, ha egy α számról szeretnénk megtudni, gyöke-e a polinomnak, a következőképp számoljuk ki a helyettesítési értékét:
$$p(\alpha) = (\dots(a_n \alpha + a_{n-1})\alpha + \dots + a_1)\alpha + a_0.$$
A módszer lényeges eleme az ún. Horner-séma, vagyis a fenti egyenlet értékeinek táblázatba rendezése a számolás megkönnyítésének céljából.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_0
α	a_n	$\alpha a_n + a_{n-1}$	$\alpha(\alpha a_n + a_{n-1}) + a_{n-2}$	$\dots$	$p(\alpha)$

A séma második sorában szereplő elemek az $x - \alpha$-val vett polinomosztás együtthatói. Tehát, ha egy gyököt megtalálva folytatjuk a módszert, végül eljutunk a polinom gyöktényezős alakjához.

- $m \in \mathbb{N}$ esetén jelölje $C^m[a,b]$ az $[a,b]$-n m-szer folytonosan differenciálható valós értékű függvényeket.

Mivel az algebra alaptételéből következő – polinomokra vonatkozó – egyik lényeges tulajonságra a későbbiekben többször hivatkozunk, hasznos, ha felidézzük, és mutatunk rá egy egyszerű indukciós bizonyítást.

1. Tétel. (ld. [5]) *Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ekkor minden P_n-beli polinomnak legfeljebb n gyöke van (multiplicitásokkal számolva) – vagy a polinom azonosan nulla. (Amelynek több mint n gyöke van, azonosan nulla, azaz minden együtthatónak egyenlőnek kell lennie nullával.)*

Bizonyítás: Nyilvánvalóan az állítás igaz $n = 0$-ra. Tegyük fel, hogy bebizonyítottuk néhány $n > 0$-ra. Legyen most $p \in P_{n+1}$ és tegyük fel, hogy p-nek több mint $n+1$ gyöke van. A binomiális tételt, valamint az $x^k = [(x-z)+z]^k$ átalakítást használva átírjuk a polinomot a következő formába:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n+1} b_k(x-z)^k + b_0,$$

ahol $b_0, b_1, \ldots, b_{n+1}$ együtthatók $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$-től és z-től függenek. Ha z a p egy gyöke, akkor $b_0 = 0$ kell legyen, és ez azt jelenti, hogy $p(x) = (x-z)q(x)$, ahol $q \in P_n$. Nyilvánvalóan q-nak több mint n gyöke van, mivel p-nek $n+1$-nél több gyöke van. Mivel az indukciós feltétel miatt $q \equiv 0$, ez azt jelenti, hogy $p \equiv 0$. ∎

2. Tétel. *Az $u_k := x^k$ egytagú kifejezések minden $k = 0, \ldots, n$ esetén lineárisan függetlenek.*

Bizonyítás: Az előző állítás bizonyítására tegyük fel, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} a_k u^k = 0,$$

vagyis

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0, \qquad x \in [a,b].$$

Ekkor a polinom $a_0, a_1, \ldots, a_n$ együtthatói közül több mint n egyenlő nullával, és az 1. tételből következően minden együttható nulla. ∎

Az egytagú $u_0, \ldots, u_n$ kifejezések lineáris függetlensége azt jelenti, hogy P_n-ben egy bázist alkotnak, és ekkor a P_n dimenziója $n+1$ lesz.

3.1. Lagrange-interpoláció

3. Tétel. (ld. [5]) *Adott $n+1$ különböző pont az $[a,b]$ intervallumon. Legyenek ezek $x_0, \ldots, x_n$. Ezenkívül adott $n+1$ különböző valós érték: $y_0, \ldots, y_n$. Ekkor pontosan egy olyan $p_n \in P_n$ polinom létezik, amelyre teljesül a*

$$p_n(x_j) = y_j, \qquad j = 0, \ldots, n. \tag{2}$$

feltétel.

Ez a polinom megadható

$$p_n = L_n := \sum_{k=0}^{n} y_k l_k \tag{3}$$

alakban, ahol l_k az alábbi módon számolható:

$$l_k(x) = \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

L_n-et Lagrange-féle interpolációs polinomnak nevezzük.
Bizonyítás: Megfigyelhetjük, hogy $l_k \in P_n$ $(k = 0, \ldots, n)$, továbbá:

$$l_k(x_j) = \delta_{jk}\ , \qquad j, k = 0, \ldots, n, \tag{4}$$

ahol

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{ha } j = k, \\ 0, & \text{ha } j \neq k. \end{cases}$$

Ebből következően (3) alapján adott L_n benne van a legfeljebb n-edfokú polinomok osztályában (P_n-ben), valamint megfelel az előírt (2)-es interpolációs feltételnek.

Az interpolációs polinom unicitásának bizonyításához tegyük fel, hogy $L_{n,1}, L_{n,2} \in P_n$ két (2)-nek eleget tevő nem azonos polinom. Ekkor a különbségük, $L_n := L_{n,1} - L_{n,2}$ teljesíti az $L_n(x_j) = 0, \quad j = 0, \ldots, n$ feltételt. Tehát az $L_n \in P_n$ polinomnak $n+1$ gyöke van és ez az 1. tétel alapján csak úgy lehetséges, ha azonosan nulla, amiből következően $L_{n,1} = L_{n,2}$. ∎

Tehát végül a következő képlethez jutottunk:

$$L_n(x) := \sum_{k=0}^{n} y_k\ l_k(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}\ , \tag{5}$$

vagyis

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_k)(x-x_k)} \ , \tag{6}$$

ahol

$$\omega_0 := 1, \qquad \omega_m(x) := \prod_{k=0}^{m-1} (x - x_k), \qquad\qquad m = 1, 2, \dots . \tag{7}$$

1. Példa. *Legyen* $x = (-1, 0, 1)$*, a hozzá tartozó* $y = (6, 3, 2)$*. Olyan másodfokú polinomot keresünk, amely átmegy a* (x_i, y_i) *pontokon* $(0 \le i \le 2)$*.*

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\frac{x-x_2}{x_0-x_1} = \frac{x(x-1)}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2}x(x-1),\\
l_1(x) &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{(x+1)(x-1)}{1(-1))} = -(x^2-1),\\
l_2(x) &= \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{(x+1)x}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}x(x+1),\\
L_2(x) &= \sum_{k=0}^{2} y_k \ l_k(x) = 6l_0(x) + 3l_1(x) + 2l_2(x) = \\
&= 3x(x-1) - 3(x^2-1) + x(x+1) = x^2 - 2x + 3.
\end{aligned}$$

A (2) feltétel ekvivalens egy lineáris egyenletrendszerrel. Az L_n polinomot kereshetjük $L_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ alakban, ahol az a_j együtthatók egyelőre ismeretlenek. Ezek meghatározásához az

$$a_0 + a_1 x_k + \cdots + a_n x_k^n = y_k, \qquad k = 0, 1, \dots, n, \tag{8}$$

lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk. A 3. tétel szerint kell, hogy ennek mátrixa reguláris legyen. A (8)-as rendszer mátrixa az ún. Vandermonde-féle mátrix (V). Ez a mátrix reguláris, ha $x_j \neq x_k, \quad j \neq k$. Determinánsára pedig a következő összefüggés teljesül:

$$\det(V) = \prod_{0 \le j < k \le n} (x_k - x_j).$$

Összefoglalva a feladatot mátrix-vektor alakban:

$$Va = y, \quad V := \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}, \ a := \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, \ y := \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

A Lagrange által 1794-ben felfedezett (3)-as kifejezés nagyon hasznos elméleti vizsgálatokhoz az egyszerű szerkezete miatt. Azonban a gyakorlatban csak kis n-ek esetére alkalmazható. Nagy n-ek esetén az l_k-k nagyon nagyok, és nagy az oszcillációjuk, ez pedig a Lagrange-interpolációs polinom rosszult kondicionáltságát okozza. Newton már 1696-ban, a kvadratúra-formulákról szóló tanulmányában eljutott egy olyan interpolációs formulához, amely praktikusabb a számítási célokra.

3.2. Newton-interpoláció

Az interpolációs polinom kiszámításának egy lényegesen kevesebb műveletigénnyel járó rekurzív módja az ún. Newton-féle rekurzió.

Jelölje N_m azt a legfeljebb m-edfokú polinomot ($0 \leq m \leq n$), amely interpolálja az $\{x_j, y_j\}_{j=0}^m$ pontokat. Az interpolációs feladat unicitása miatt $N_m(x) = L_m(x)$, csak $N_m(x)$ felírásmódja lesz más.

Az $m = 0$ esetben

$$N_0 = b_0, \quad b_0 := y_0, \tag{9}$$

és általában az

$$N_m(x) = N_{m-1}(x) + b_m\omega_m, \quad m = 1, \dots, n \tag{10}$$

rekurzióval állítható elő, ahol $\omega_m(x)$ (7) szerint definiálható. Definíció szerint ugyanis $N_m - N_{m-1}$ egy legfeljebb m-edfokú polinom, amely – mivel gyökei $x = x_0, \dots, x_{m-1}$ – valóban $\omega_m(x)$ konstansszorosa. Mivel N_m egyértelműen meghatározott, így b_m is:

$$b_m = \sum_{k=0}^{m} y_k \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{m} \frac{1}{x_k - x_i}. \tag{11}$$

Mindebből következik a Newton-interpolációs polinom alakja, melyet a következő képlet ad:

$$N_n(x) := \sum_{m=0}^{n} b_m\omega_m(x). \tag{12}$$

A b_m együtthatók $m = 1, 2$ esetben:

$$b_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad b_2 = \frac{1}{x_2 - x_0}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right).$$

3.3. Osztott differenciák

A b_m együtthatókra keresünk egy általánosabb, kényelmesebb kiszámítási módot.

1. Definíció. *Adott $n+1$ különböző pont az $[a,b]$ intervallumon: $x_0,\dots,x_n$, valamint $n+1$ valós $y_0,\dots,y_n$ érték. Az x_j pontbeli k-adrendű D_j^k osztott differenciát a következő rekurzív módon definiáljuk:*

$$D_j^0 := y_j, \qquad j=0,\dots,n, \tag{13}$$

$$D_j^k := \frac{D_{j+1}^{k-1}-D_j^{k-1}}{x_{j+k}-x_j}, \qquad j=0,\dots,n-k, \quad k=1,\dots,n. \tag{14}$$

Az osztott differenciák az $\{x_j,y_j\}_{j=0}^n$ adatok sorrendjétől nem függenek, mert felcserélve az (x_r,y_r) és (x_s,y_s) adatokat, az összeg nem változik, csupán az s-edik és r-edik tagja cserélődik fel.

1. Megjegyzés. *A D_j^k k-adrendű osztott differencia egy másik, gyakran használt jelölési módja: $f[x_j,\dots,x_{j+k}]$.*

1. Lemma. (ld. [5])

$$D_j^k = \sum_{m=j}^{j+k} y_m \prod_{\substack{i=j\\ i\neq m}}^{j+k} \frac{1}{x_m-x_i}, \qquad j=0,\dots,n-k, \quad k=1,\dots,n. \tag{15}$$

Bizonyítás: (ld. [5]) Teljes indukcióval igazolhatjuk a lemmát. Nyilvánvalóan $k=1$-re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $k-1$-re már beláttuk ($k\geq 2$). Ekkor (15)-öt, az indukciós feltételt, és a

$$\frac{1}{x_{j+k}-x_j}\left(\frac{1}{x_m-x_{j+k}}-\frac{1}{x_m-x_j}\right)=\frac{1}{(x_m-x_{j+k})(x_m-x_j)}$$

azonosságot használva kapjuk:

$$\begin{aligned}
D_j^k &= \frac{1}{x_{j+k}-x_j}\left(\sum_{m=j+1}^{j+k} y_m \prod_{\substack{i=j+1\\ i\neq m}}^{j+k}\frac{1}{x_m-x_i} - \sum_{m=j}^{j+k-1} y_m \prod_{\substack{i=j\\ i\neq m}}^{j+k-1}\frac{1}{x_m-x_i}\right) = \\
&= \frac{1}{x_{j+k}-x_j}\sum_{m=j+1}^{j+k} y_m\left(\frac{1}{x_m-x_{j+k}}-\frac{1}{x_m-x_j}\right)\prod_{\substack{i=j+1\\ i\neq m}}^{j+k-1}\frac{1}{x_m-x_i} + \\
&\quad + y_{j+k}\prod_{i=j}^{j+k-1}\frac{1}{x_{j+k}-x_i} + y_j\prod_{i=j+1}^{j+k}\frac{1}{x_j-x_i} = \sum_{m=j}^{j+k} y_m \prod_{\substack{i=j\\ i\neq m}}^{j+k}\frac{1}{x_m-x_i},
\end{aligned}$$

amivel bizonyítottuk is a lemmát. ∎

Tehát a keresett b_m együtthatók az 1. lemma alapján $j = 0$ esetben adódnak:

$$b_m = D_0^m = f[x_0, \dots, x_m].$$

Az osztott differenciákat célszerű a differenciaséma-táblázat szerint rendezni:

$$\begin{array}{cccccccc}
x_0 & y_0 & = \mathbf{D_0^0} & & & & & \\
 & & & \mathbf{D_0^1} & & & & \\
x_1 & y_1 & = D_1^0 & & \mathbf{D_0^2} & & & \\
 & & & D_1^1 & & \cdots & & \\
x_2 & y_2 & = D_2^0 & & & & \cdots & \\
 & & & & \vdots & & & \mathbf{D_0^n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & \cdots & \\
 & & & & & \cdots & & \\
x_{n-1} & y_{n-1} & = D_{n-1}^0 & & \cdots & & & \\
 & & & D_{n-1}^1 & & & & \\
x_n & y_n & = D_n^0 & & & & &
\end{array}$$

A teljes táblázat előállításához $\frac{1}{2}n^2 + O(n)$ művelet (1 művelet = 2 kivonás és 1 osztás) szükséges.

Az egyes b_m együtthatók a differenciaséma-táblázat háromszögének felső oldaláról olvashatók le.

2. Példa. *Adott 4 pont:* $(0,0), (1,2), (3,8), (4,9)$, *és keresett az a legfeljebb* 3*-adfokú polinom, amely illeszkedik az adott pontokra.*

Ekkor a differenciaséma részletesen:

$$\begin{array}{cccccc}
0 & \mathbf{0} & & & \\
 & & \frac{2-0}{1-0} = \mathbf{2} & & \\
1 & 2 & & \frac{3-2}{3-0} = \mathbf{\frac{1}{3}} & \\
 & & \frac{8-2}{3-1} = 3 & & \frac{-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}{4-0} = -\mathbf{\frac{1}{4}} \\
3 & 8 & & \frac{1-3}{4-1} = -\frac{2}{3} & \\
 & & \frac{9-8}{4-3} = 1 & & \\
4 & 9 & & &
\end{array}$$

A $b_0, \dots, b_n$ együtthatókat a háromszög felső oldaláról olvashatjuk le: $0, 2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$. Ezeket felhasználva kapjuk az N_3 polinomot:

$$N_3(x) = 2x + \frac{1}{3}x(x-1) - \frac{1}{4}x(x-1)(x-3).$$

A differenciaséma segítségével könnyebben megoldható további (x_{n+1}, y_{n+1}) adatok hozzáadása, mint a Lagrange-interpoláció felírásából kiindulva. Ehhez a differenciasémát az új adattal egészítjük ki és csak egy további (pl. alsó) átlóját számítjuk ki. Ebben az esetben ha a séma végén nulla szerepel, akkor az interpolációs polinom nem változik, általában viszont új adat hozzáadásával az interpolációs polinom fokszáma növekszik.

3.4. Neville-rekurzió

Abban az esetben, ha az interpolációs polinom explicit alakjának megadása nem lényeges, inkább a behelyettesítési értékek fontosak, a Neville-rekurzió nagyon praktikus.

Legyenek $\{x_j\}_{j=1}^n$ alappontok, $\{y_j\}_{1=0}^n$ a hozzá tartozó értékek, $(x \neq x_j)$. Ekkor a Neville-rekurzió általános alakja:

$$L_{12\dots m}(x) = \frac{1}{x_m - x_1} \begin{vmatrix} L_{12\dots(m-1)}(x) & (x_1 - x) \\ L_{23\dots m}(x) & (x_m - x) \end{vmatrix},$$

ahol

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} L_{12\dots(m-1)}(x) & (x_1 - x) \\ L_{23\dots m}(x) & (x_m - x) \end{vmatrix} &= \det \begin{pmatrix} L_{12\dots(m-1)}(x) & (x_1 - x) \\ L_{23\dots m}(x) & (x_m - x) \end{pmatrix} = \\ &= L_{12\dots(m-1)}(x)(x_m - x) - L_{23\dots m}(x)(x_1 - x). \end{aligned}$$

Így könnyen eljuthatunk $L_{12\dots n}(x)$-hez, ami az n-edfokú Lagrange-interpolációs polinom x helyen vett helyettesítési értékét jelöli.

A rekurzió elemei egy differenciasémához hasonló táblázatba rendezhetők:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_1 - x & y_1 & & & & \\ & & & L_{12}(x) & & & \\ x_2 & x_2 - x & y_2 & & L_{123}(x) & & \\ & & & L_{23}(x) & & L_{1234}(x) & \\ x_3 & x_3 - x & y_3 & & L_{234}(x) & & \\ & & & L_{34}(x) & & & \\ x_4 & x_4 - x & y_4 & & & & \end{array}$$

$L_{1\ldots m}$ kiszámítási módja $m = 2, 3$ esetben:

$$\begin{aligned} L_{12}(x) &= \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{vmatrix} y_1 & (x_1 - x) \\ y_2 & (x_2 - x) \end{vmatrix}, \\ L_{12}(x_1) &= y_1, \\ L_{12}(x_2) &= y_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{123}(x) &= \frac{1}{x_3 - x_1} \begin{vmatrix} L_{12}(x) & (x_1 - x) \\ L_{23}(x) & (x_3 - x) \end{vmatrix}, \\ L_{123}(x_1) &= \frac{1}{x_3 - x_1} \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ L_{23}(x_1) & (x_3 - x_1) \end{vmatrix} = y_1, \\ L_{123}(x_2) &= \frac{1}{x_3 - x_1} \begin{vmatrix} y_2 & (x_1 - x_2) \\ y_2 & (x_3 - x_2) \end{vmatrix} = y_2, \\ L_{123}(x_3) &= y_3. \end{aligned}$$

3.5. Hibabecslés

Miután eljutottunk az L_n, N_n interpolációs alakokhoz, az eredményt úgy is értelmezhetjük, hogy létezik egy f függvény, amely az interpolációs feladat $y_j = f(x_j)$ értékeit adja: $f(x_j) = f_j,\ j = 0, \ldots, n$, és ezt a függvényt approximáltuk az L_n polinommal.

Mivel a Lagrange-interpolációs polinom által adott approximáció az alapja több numerikus eljárásnak (pl. numerikus integrálás, közönséges differenciálegyenletek megoldása) fontos kérdés, hogy $L_n(x)$ mennyire tér el $f(x)$-től.

Legyen f egy olyan $(n+1)$-szer folytonosan differenciálható függvény, amelyhez konstruálunk egy $p_n(x) \in P_n$ polinomot, amelyre

$$p_n(x_j) = y_j = f(x_j) = f_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Becslést szeretnénk adni az $|f(x) - p_n(x)|$ eltérésre.

1. Állítás. (ld. [6]) *Ha $f \in C^{(n+1)}[a, b]$, akkor minden $x \in [a, b]$-hez létezik olyan $\xi = \xi_x \in (a, b)$ szám, amely mellett*

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\ \omega_{n+1}(x), \tag{16}$$

ahol $\omega_{n+1}(x)$-et (7) alapján számoljuk.

Bizonyítás: ([6] szerint) Legyen $\widetilde{x} \in [a,b]$, $\widetilde{x} \neq x_j$, $j = 0,1,\dots,n$, ($\widetilde{x}$ tetszőleges, de rögzített pont). Célunk: $f(\widetilde{x}) - p_n(\widetilde{x})$ becslése. Ehhez vezessünk be egy új függvényt ($\varphi(x)$).

$$\varphi(x) = f(x) - p_1(x) - K\omega_{n+1}(x), \tag{17}$$

ahol K egyelőre tetszőleges állandó, $\omega_{n+1}(x)$ (7) szerint adott, $\varphi(x_j) = 0$.

Válasszuk meg a K állandót úgy, hogy $\varphi(\widetilde{x}) = 0$, azaz
$\varphi(\widetilde{x}) = f(\widetilde{x}) - p_n(\widetilde{x}) - K\omega_{n+1}(\widetilde{x}) = 0$. Ekkor

$$K = \frac{f(\widetilde{x}) - p_n(\widetilde{x})}{\omega_{n+1}(\widetilde{x})}. \tag{18}$$

A (17), (18) alapján létrehozott φ függvény az $\{x_0,\dots,x_n,\widetilde{x}\}$ pontokban is nulla. Tehát $n+2$ db pontban nulla.

A Rolle-tétel alapján legalább $n+1$ pontban $\varphi'(x) = 0$. Ezt a lépést folytatva legalább n darab pontban $\varphi''(x) = 0$, és így tovább egészen addig, míg el nem jutunk a $\varphi^{(n+1)}$ deriváltig, ami legalább egy pontban nulla. Jelöljön ξ egy ilyen pontot. Vagyis

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= f(x) - p_n(x) - K\omega_{n+1}(x), \\
\varphi^{(n+1)}(x) &= f^{(n+1)}(x) - 0 - K(n+1)!, \\
\varphi^{(n+1)}(\xi) &= f^{(n+1)}(\xi) - K(n+1)! = 0, \\
K &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{f(\widetilde{x}) - p_n(\widetilde{x})}{\omega_{n+1}(\widetilde{x})}, \\
f(\widetilde{x}) - p_n(\widetilde{x}) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(\widetilde{x}).
\end{aligned}$$

Vezessünk be néhány jelölést:

- $h := \max\limits_{1 \le j \le n} |x_j - x_{j-1}|$ az alappontok közötti legnagyobb távolság ,
- $|\omega_{n+1}(x)| = |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \le (b-a)^{n+1}$.

Ekkor

$$\begin{aligned}|f(x)-p_n(x)| &\le \frac{1}{(n+1)!}\ \max_{[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|\ \omega_{n+1}(x)\le\\ &\le \frac{1}{(n+1)!}\ \max_{[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|\ (b-a)^{n+1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x)-L_n(x) &= f(x)-\sum_{k=0}^{n} f_k\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}=\\ &= \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\left(\frac{f(x)}{\prod\limits_{i=0}^{n}(x-x_i)}-\sum_{k=0}^{n} f_k\ \frac{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{1}{x_k-x_i}}{x-x_k}\right)=\\ &= \omega_{n+1}(x)\left(\frac{f(x)}{\prod\limits_{i=0}^{n}(x-x_i)}-\sum_{k=0}^{n} f_k\ \frac{1}{(x-x_k)\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)}\right)=\\ &= \omega_{n+1}(x)b_{n+1},\end{aligned}$$

mivel

$$\begin{aligned}b_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} f_k\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n+1}\frac{1}{x_k-x_i}=\\ &= f_{n+1}\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n+1}\frac{1}{x_{n+1}-x_i}+\sum_{k=0}^{n} f_k\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n+1}\frac{1}{x_k-x_i}=\\ &\quad (x_{n+1}\equiv x)\\ &= f(x)\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n+1}\frac{1}{x-x_i}+\sum_{k=0}^{n} f_k\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n+1}\frac{1}{x_k-x_i}.\end{aligned}$$

Tehát a következő összefüggéshez jutottunk:

$$\begin{aligned}f(x)-L_n(x) &= b_{n+1}\ \omega_{n+1}(x)\\ f(x) &= L_n(x)+b_{n+1}\ \omega_{n+1}(x).\end{aligned}$$

A hibabecslésük miatt:

$$\begin{aligned}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega_{n+1}(x) &= b_{n+1}\,\omega_{n+1}(x)\\ b_{n+1} &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Végül, a Newton-féle interpoláció következtében:

$$\begin{aligned}b_m &= D_0^m = f[x_0,\ldots,x_m] = \frac{f^{(m)}(\xi_m)}{m!}\\ N_n(x) &= \sum_{m=0}^{n} b_m\omega_m(x) = \sum_{m=0}^{n}\frac{f^{(m)}(\xi_m)}{m!}\omega_m(x).\end{aligned}$$

■

A (16) hibaképletet közvetlenül ritkán használjuk, de gyakran adott egy becslés az $(n+1)$-edik deriváltra:

$$\max_{x\in[a,b]}|f^{(n+1)}(x)| \le M_{n+1}, \tag{19}$$

amelynek segítségével becsülhető az eltérés:

$$|f(x)-L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}, \qquad x\in[a,b], \tag{20}$$

mivel $x\in[a,b]$ esetén ω_{n+1} minden $(x-x_j)$ tényezőjében $a\le x_j\le b \;\; j=0,\ldots,n$. Így teljesül az $|\omega_{n+1}|\le(b-a)^{n+1}$ összefüggés.

3. Példa. (ld. [2]) *A* $\sin(x)$ *függvényt* $[a,b]$ *intervallumon a Lagrange-féle polinommal interpoláljuk. Mekkora az approximációs hiba?*

$$\begin{aligned}|\sin(x)-L_n(x)| &\le \frac{1}{(n+1)!}\max_{[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|\;\omega_{n+1}(x)\le\\ &\le \frac{(b-a)^n}{(n+1)!},\end{aligned}$$

hiszen a $\sin(x)$ függvény $(n+1)$. deriváltja n-től függően $\sin(x)$, $\cos(x)$, $-\sin(x)$, $-\cos(x)$, de mindegyikre teljesül a $|f^{(n+1)}(x)|\le 1$ összefüggés.

2. Állítás. (ld. [6]) *Jelölje* $h:=\max\limits_{1\le j\le n}(x_j-x_{j-1})$. *Ekkor*

$$|\omega_{n+1}(x)|\le\frac{1}{4}\,n!\;h^{n+1}.$$

Bizonyítás: Teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1$ esetben teljesül, hiszen

$$|\omega_2(x)| = |(x - x_0)(x - x_1)| \leq \frac{1}{4}\ h^2.$$

Feltesszük, hogy $n = k$-ra igaz. Megmutatjuk, hogy akkor $k + 1$-re is:

$$\begin{aligned} |\omega_{k+1}(x)| &= |\omega_k(x)(x - x_{k+1})| = |\omega_k(x)||x - x_{k+1}| \leq \\ &\leq \frac{1}{4}\ (k-1)!\ h^k \cdot k \cdot h\ = \frac{1}{4}\ k!\ h^{k+1}. \end{aligned}$$

■

Az előbbi állítás következtében

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{\max|f^{(n+1)}|}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{4}\ n!\ h^{n+1}\ = \max|f^{(n+1)}| \cdot \frac{1}{4(n+1)}\ h^{n+1}.$$

2. Definíció. *Egy $e(h)$ hiba p-edrendű, ha létezik olyan c konstans, amelyre*

$$||e(h)|| \leq c \cdot h^p.$$

4. Tétel (Faber). (ld. [5]) *Minden alappontrendszer-sorozathoz létezik olyan $f \in C[a, b]$ függvény, hogy az $L_n f$ interpolációs polinomok sorozata nem konvergál egyenletesen f-hez $[a, b]$-n.*

5. Tétel (Marzienkiewicz). (ld. [5]) *Minden $f \in C[a, b]$ függvényhez létezik olyan alappontrendszer-sorozat, hogy az $L_n f$ interpolációs polinomok sorozata egyenletesen konvergál f-hez.*

3.6. Hermite-interpoláció

Ezt a módszert akkor használjuk, amikor az $f(x_j)$ függvényértékeken kívül néhány alappontra ismerjük a derivált értékeit is.

Adottak $\{x_j\}_{j=0}^n$ alappontok. Az Hermite-féle interpolációs polinom olyan H polinom, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

$$j = 0, \ldots, n: \qquad H^{(k)}(x_j) = f_{jk}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m_j - 1, \tag{21}$$

ahol $f_{jk} \in \mathbb{R}$, $m_j \in \mathbb{N}$, $H^{(k)}$ pedig a H függvény k-adik deriváltját jelöli. Továbbá legyen $m := \sum_{j=0}^{n} m_j$ a (21)-ben szereplő feltételek száma.

6. Tétel. *Ha a fenti feltételek teljesülnek, akkor létezik az Hermite-féle interpolációs feladatnak egyértelmű megoldása P_{m-1}-ben.*

Az egyértelműség bizonyítása hasonlóan zajlik, mint a Lagrange-féle feladatnál. Tegyük fel, hogy H_1 és H_2 két olyan (legfeljebb $m-1$-edfokú) polinom, amelyre teljesülnek a fenti feltételek. Vizsgáljuk a $h = H_1 - H_2 \in P_{m-1}$ polinomot. Ennek x_j m_j-szeres gyöke. Multiplicitással számítva összesen m gyök van, de h fokszáma legfeljebb $m-1$. Tehát $h \equiv 0$, vagyis $H_1 = H_2$.

Az interpolációs feladat megoldásának megtalálásához felhasználjuk a Lagrange-féle polinomot, a Newton-féle alakban felírva. Ott ugyanis az $\omega_m(x)$ ((7) szerint) polinomok használatának eredményeképp a feladatot x_{m-1}-ről x_m-hez haladva lehetett megoldani. Ebben az esetben ezt a következőképp lehet elérni:

$$F_0(x) := \sum_{k=0}^{m_0-1} f_{0k}\,\frac{(x-x_0)^k}{k!},$$

és

$$s_j(x) := \prod_{l=0}^{j-1} (x-x_l)^{m_l};$$

akkor

$$F_j(x) = F_{j-1}(x) + s_j(x)G_j(x), \qquad j = 0, 1, \ldots, n, \tag{22}$$

alakban konstruálható a keresett H_{m-1} polinom, és $H_{m-1}(x) := F_n(x)$.

$F_0(x)$ – mint a Taylor-sor kezdete – eleget tesz a (21)-es feltételeknek $j = 0$ és $k = 0, 1, \ldots, m_0 - 1$ esetben. Ezenkívül

$$s_j^{(k)}(x_0) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, m_0 - 1, \quad j \geq 1,$$

is érvényes. Ezért minden $F_j(x)$ teljesíti a (21) feltételeket $j = 0$-ra. Ezután feltehetjük, hogy (21) teljesül minden olyan j-re, amelyre $n \geq m > j \geq 0$.

Kell még, hogy $F_m(x)$ eleget tegyen (21) feltételeknek $j = m$ esetben. Ehhez (22)-at k-szor deriváljuk, és az eredménybe behelyettesítjük $x = x_m$-et:

$$f_{mk} = F_m^{(k)}(x_m) = F_{mk} + s_m(x_m) \cdot G_m^{(k)}(x_m), \tag{23}$$

ahol $s_m(x_m)$ ismert nemnulla szám, és

$$F_{mk} := F_{m-1}^{(k)}(x_m) + \binom{k}{0} s_m^{(k)}(x_m) \cdot G_m(x_m) + \cdots + \binom{k}{k-1} s_m'(x_m) \cdot G_m^{(k-1)}(x_m).$$

Mivel feltehetjük, hogy $G_m^{(l)}(x_m)$ már ismert $(l = 0, \ldots, k-1)$, így F_{mk} is rendelkezésre áll, tehát $G_m^{(k)}(x_m)$ a (23)-ből kifejezhető.

A gyakorlatiasabb megközelítés szerint is eljuthatunk H_{m-1}-hez. Az Hermite-féle interpolációs feladat megoldásához a Newton-féle alakban a differenciasémából nyert Lagrange-interpolációs polinom segítségével juthatunk el. Ehhez feltesszük, hogy az adott f_{jk} értékek valamilyen elegendően sokszor differenciálható f függvényből kiszámolhatóak: $f_{j0} = f(x_j), f_{jk} = f^{(k)}(x_j), \quad k = 0, 1, \ldots, m_j - 1.$

A H_{m-1} közvetlen konstrukciója: A hagyományos differenciasémában minden x_j alappontot m_j-szer szerepeltetünk. Ahol a differenciaséma azon oszlopában, melyben az k-adrendű osztott differenciák állnak, értelmetlen $\frac{0}{0}$ kifejezés adódna, oda $\frac{f_{jk}}{k!}$ kerül. Az egyéb helyeken a korábbi módokon számolunk.

4. Példa. (ld. [2]) *Adott*

$$\begin{aligned} (0,0,0) &= (x_0, f(0), f'(0)), \\ (1,1,3,6) &= (x_1, f(1), f'(1), f''(1)), \end{aligned}$$

tehát $m_0 = 2, m_1 = 3,$ *és keresett az a legfeljebb* $m_0 + m_1 - 1 = 4$*-edfokú polinom, amely ezeket az adatokat interpolálja.*

$$\begin{array}{cccccc}
0 & \mathbf{0} & & & & \\
 & & \frac{0}{0} \to \mathbf{0} & & & \\
0 & 0 & & \mathbf{1} & & \\
 & & 1 & & \mathbf{1} & \\
1 & 1 & & 2 & & \mathbf{0} \\
 & & \frac{0}{0} \to 3 & & 1 & \\
1 & 1 & & \frac{0}{0} \to \frac{6}{2} = 3 & & \\
 & & \frac{0}{0} \to 3 & & & \\
1 & 1 & & & &
\end{array}$$

Ebből leolvashatók a b_k együtthatók: $0, 0, 1, 1, 0$. Tehát a keresett interpolációs polinom:

$$H_4 = 0 + 0 \cdot x + x^2 + x^2(x-1) + 0 \cdot x^2(x-1)^2 = x^3.$$

Az interpolációs polinom csak harmadfokú lett, de teljesíti az összes feltételt, tehát ez az egyetlen megoldás.

Egy m-szer differenciálható f függvény és az Hermite-interpoláció eltérésére a következő összefüggés teljesül:

$$f(x) - H_{m-1}(x) = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}\,\widetilde{\omega}_m(x)\ , \qquad \xi = \xi_x \in (a,b), \tag{24}$$

ahol

$$\widetilde{\omega}_m(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)^{m_j}.$$

Innen (20) mintájára érvényes

$$f(x) - H_{m-1}(x) = \frac{M_m}{m!}\,(b-a)^m, \qquad \xi = \xi_x \in (a,b), \tag{25}$$

ahol M_m (35) alapján számolható.

Az Hermite-féle polinom lokálisan jobb approximációt ad, de a szélső alappontok közelében, a polinom magasabb fokszáma miatt, még erősebb kilengésekre kell számítani, mint a Lagrange-interpoláció esetén.

4. Trigonometrikus interpoláció

Munkánk során elég gyakran fordulnak elő periodikus függvények, amelyek a következő tulajdonsággal rendelkeznek:

$$f(t+T) = f(t)\ , \qquad t \in \mathbb{R}\ , \quad T > 0.$$

A polinomiális interpoláció használata nem alkalmas periodikus függvények esetén, mivel az algebrai polinomok nem periodikusak. Ezért a továbbiakban az interpoláció vizsgálatát a trigonometrikus polinomokkal folytatjuk, melyeket először Clairaut 1759-ben, majd Lagrange 1762-ben használt egymástól függetlenül.

Ezt követően feltesszük, hogy a periódus egységesen: $T = 2\pi$.

3. Definíció. *$n \in \mathbb{N}$ esetén jelölje T_n a trigonometrikus polinomok terét, amelyek a*

$$q(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kt + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kt$$

képlettel adhatók meg. Legyenek $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ valós együtthatók. Egy $q \in T_n$ trigonometrikus polinomot n-edfokú nevezünk, ha $|a_n| + |b_n| > 0$.

A szinusz és koszinusz függvények addíciós képleteiből következően $q_1 q_2 \in T_{n_1+n_2}$, ha $q_1 \in T_{n_1}$ és $q_2 \in T_{n_2}$. Ez indokolja a trigonometrikus polinomokkal való foglalkozást.

7. Tétel. (ld. [5]) *Egy T_n-beli trigonometrikus polinom, amelynek több mint $2n$ különböző gyöke van a $[0, 2\pi)$ periódusban, azonosan nulla, tehát minden együtthatójának nullának kell lennie.*

Bizonyítás: ([5] szerint) Tekintsük a $q \in T_n$ trigonometrikus polinomot

$$q(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos kt + b_k \sin kt] \tag{26}$$

alakban. Legyen $b_0 = 0$,

$$\gamma_k := \frac{1}{2}(a_k - ib_k)\ , \quad \gamma_{-k} := \frac{1}{2}(a_k + ib_k)\ , \qquad k = 0, \dots, n, \tag{27}$$

és az Euler-formulát használva

$$e^{it} = \cos t + i \sin t,$$

(26) másképp felírva:

$$q(t) = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ikt}. \tag{28}$$

Legyen $z = e^{it}$ és

$$p(z) := \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k z^{n+k},$$

így kapjuk, hogy

$$q(t) = z^{-n} p(z).$$

Most tegyük fel, hogy a $q \in T_n$ polinomnak több mint $2n$ különböző gyöke van $[0, 2\pi)$. Ekkor a $p \in P_{2n}$ algebrai polinomnak több mint $2n$ különböző gyöke a komplex egységkörön van, mivel a $t \mapsto e^{it}$ függvény $[0, 2\pi)$-t bijektíven leképezi az egységkörre. Ebből következően az 1. tétel miatt $p \equiv 0$, tehát $q \equiv 0$. ∎

A $c_k(t) := \cos kt, \quad k = 0, \dots, n$ koszinusz és a $s_k(t) := \sin kt, \quad k = 1, \dots, n$ szinusz függvények lineárisan függetlenek $C[0, 2\pi]$-n.

8. Tétel. (ld. [5]) *Adott $2n + 1$ különböző pont: $t_0, \dots, t_{2n} \in [0, 2\pi)$, és $2n + 1$ érték: $y_0, \dots, y_{2n} \in \mathbb{R}$. Ekkor létezik egy egyértelműen meghatározott trigonometrikus polinom a következő tulajdonsággal:*

$$q_n(t_j) = y_j, \qquad j = 0, \dots, 2n. \tag{29}$$

A Lagrange-féle alakot felhasználva a trigonometrikus interpolációs polinom megadható

$$q_n = \sum_{k=0}^{2n} y_k l_k \tag{30}$$

alakban, ahol

$$l_k(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{2n} \frac{\sin \frac{t-t_i}{2}}{\sin \frac{t_k-t_i}{2}}, \qquad k = 0, \dots, 2n.$$

Ekvidisztáns felosztás esetén legyen

$$t_j = \frac{2\pi j}{2n+1}, \qquad j = 0, \dots, 2n.$$

Ennek segítségével felírva az összeget

$$\sum_{j=0}^{2n} e^{ikt_j} = \sum_{j=0}^{2n} e^{ijt_k} = \begin{cases} 2n+1, & k = 0, \\ 0, & k = \pm 1, \dots, \pm 2n, \end{cases} \tag{31}$$

amely a mértani sor összegképletéből következik $e^{it_k} \neq 1$ esetén:

$$\sum_{j=0}^{2n} e^{ijt_k} = \frac{1 - e^{i(2n+1)t_k}}{1 - e^{it_k}} = 0,$$

mivel $e^{it_k} = 1$ esetén az összeg minden tagja egyenlő eggyel.

Megpróbáljuk megtalálni az egyértelműen meghatározott interpolációs polinomot

$$q_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ikt}$$

formában. A

$$q_n(t_j) = y_j, \qquad j = 0, \dots, 2n$$

interpolációs feltételekből látható, hogy az interpolációs feladat megoldása ekvivalens egy lineáris egyenletrendszer megoldásával. Ezek az egyenletek

$$\sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ikt} = y_j, \qquad j = 0, \dots, 2n \tag{32}$$

alapján írhatók fel. Tegyük fel, hogy (32) megoldásai a γ_k együtthatók. Ekkor (31) segítségével jutunk a

$$\sum_{j=0}^{2n} y_j e^{-imt_j} = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k \sum_{j=0}^{2n} e^{i(k-m)t_j} = (2n+1)\gamma_k$$

összefüggéshez. Azaz (32) bármely megoldása megkapható a következő képlettel:

$$\gamma_k = \frac{1}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} y_j e^{-ikt_j}, \qquad k=-n,\dots,n. \tag{33}$$

Másrészt (31) és (33) felhasználásával kapjuk:

$$\sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ikt_j} = \frac{1}{2n+1}\sum_{m=0}^{2n} y_m \sum_{k=0}^{2n} e^{ik(t_j-t_m)} = y_j, \qquad j=0,\dots,2n,$$

azaz a (32) lineáris rendszernek van egyértelmű megoldása, mely (33) szerint adott.

Az előző, valamint a (26), (27), (28) összefüggések alkalmazásával juthatunk a következő tételhez.

9. Tétel. (ld. [5]) *Létezik a*

$$q_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos kt + b_k \sin kt]$$

egyértelműen meghatározott trigonometrikus polinom, amely teljesíti a

$$q_n\left(\frac{2\pi j}{2n+1}\right) = y_j, \qquad j=0,\dots,2n$$

interpolációs feltételeket. Az együtthatók az alábbi módon számolhatók:

$$a_k = \frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} y_j \cos\frac{2\pi jk}{2n+1}, \qquad k=0,\dots,n,$$

$$b_k = \frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} y_j \sin\frac{2\pi jk}{2n+1}, \qquad k=1,\dots,n.$$

A trigonometrikus interpoláció hibájának vizsgálata jóval bonyolultabb, mint a polinomiális interpolációé. Jelölje $L_n : C[0,2\pi] \mapsto T_n$ trigonometrikus interpolációs operátort, amely az f függvényt az $L_n f$ trigonometrikus interpolációs polinomra képezi. Ekvidisztáns rácsháló esetén a konvergenciára két állítás teljesül ([5] szerint):

- $||L_n f - f||_2 \to 0, n \to \infty$, minden folytonos, 2π szerint periodikus f esetén, és
- $||L_n f - f||_\infty \to 0, n \to \infty$, minden folytonosan differenciálható, 2π szerint periodikus f esetén.

5. Spline interpoláció

A spline fogalmát 1946-ban először Isaac Jacob Schoenberg vezette be.

Spline-okat többnyire interpolációra és ábrázolásra használnak. Az így nyert görbék olyan simák, amennyire csak lehetnek, nincsenek rajtuk nagyobb kilengések, és rugalmasabban módosíthatók, mint a polinomok. Egyes típusaik szakaszonként változtathatók úgy, hogy közben a görbe nagyobb része megmarad.

A spline név a hajóépítésből ered; ott az építéshez használt hajlékony vonalzót nevezték spline-nak.

A már bemutatott polinomiális interpolációk könnyen előállíthatók, de nagyobb fokszám esetén nem mindig komplikációmentesek. Ezek az interpolációk a szélső alappontok között gyakran rosszabb eredményt adnak, mintha egyszerű töröttvonallal összekötnénk az alappontokat.

Ekkor lehet segítségünkre a spline – vagyis szakaszonkénti polinomiális interpoláció.

[2] szerint legyen az $[a, b]$ intervallum egy felosztása

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \ , \tag{34}$$

továbbá

$$h_j := |x_j - x_{j-1}| \ , \quad h := \max_{0 \le j \le n-1} h_j \ . \tag{35}$$

A szakaszonkénti interpoláció esetén az egyik lehetőség szerint minden $[x_{j-1}, x_j]$ szakaszra külön készítjük az interpolációt. Ha csak $\{f(x_j)\}_{j=0}^{n}$ függvényértékek adottak, akkor a szakaszonkénti elsőfokú Lagrange-féle interpolációs polinomot (L_{j1}) használva kapjuk a töröttvonal-interpolációt, melynek hibája:

$$|f(x) - L_{j1}(x)| \le \frac{M_2}{2} \cdot h^2, \qquad x \in [x_{j-1}, x_j],$$

ahol $f \in C^2[a, b]$, és M_2 (19) szerinti.

Ha magasabbrendű interpolációt akarunk kapni, a szakaszonkénti Hermite-interpoláció alkalmazása vezethet eredményre. Ehhez x_{j-1}-ben és x_j-ben megfelelő számú derivált értékének megadása szükséges.

Célszerű a minden szakaszon páratlan $2p+1$-edfokú Hermite-interpoláció, amelyhez minden x_j pontban az f függvény értékén kívül még adott az első p derivált is. Ezt a polinomot jelölje $H_{j,2p+1}$, $(j = 0, \ldots, n)$.

Ekkor (23) becslés alapján, rögzített $m = 2p + 2$ mellett egyre kisebb (h hosszúságú) részintervallumok esetén nincs probléma azzal, hogy a függvény és az interpoláció eltérése tetszőlegesen kicsi legyen:

$$|f(x) - H_{j,2p+1}(x)| \leq \frac{M_{2p+2}}{(2p+2)!} \cdot h^{(2p+2)}, \qquad x \in [x_{j-1}, x_j]. \tag{36}$$

Tehát a szakaszonkénti Hermite-interpoláció hibája h-ban $(2p + 2)$-edrendű. A $H_{j,2p+1}$ minden j-re vett összessége olyan függvényt definiál $[a, b]$-n, amelynek első p deriváltja folytonos, viszont a $(p + 1)$-edik általában már nem az.

A spline interpoláció egy másik módszer szerint: az egész $[a, b]$ intervallumra egyszerre készítjük a szakaszonkénti polinomiális interpolációt, amely g-edfokú lesz minden $[x_{j-1}, x_j]$ szakaszban. Ez az eljárás is csak függvényértékeket használ, de azonos fokszámra több differenciálhatóságot kínál, mint az előbbi szakaszonkénti Hermite-interpoláció.

Mivel a felosztás alapján n szakasz adott, $(g + 1)$ szabad paraméterünk van. Minden x_j alappontban megköveteljük az interpolációs feltételeket. Ez $(n + 1)$ db egyenletet jelent. Ezen kívül minden belső pontban ($\{x_j\}_{j=1}^{n-1}$) azon feltételeket, hogy a szakaszonkénti interpoláció és első d deriváltja folytonos legyen. Ez összesen $(d + 1)(n - 1)$ egyenlet. Mindezek a feltételek lineáris egyenletekre vezetnek. Az összes egyenlet rendszerének megoldhatósága érdekében szükséges, hogy ne legyen kevesebb szabad paraméter, mint feltétel, vagyis

$$(g + 1)n \geq n + 1 + (d + 1)(n - 1) = (d + 2)n - d.$$

Ennek az egyenlőtlenségnek a $d = g - 1$ a legkézenfekvőbb megoldása. Így marad lehetőségünk d további feltételre, hiszen még d-vel több szabad paraméter van, mint ahány feltétel. Ezeket az x_0, x_n pontokban célszerű felhasználni peremfeltételként.

Tehát a spline interpoláció alapötlete az, hogy a függvényértékek megadása után a szakaszonkénti magasabbfokú interpolációt folytonossági követelmények előírásával hozzuk létre ahelyett, hogy deriváltakat adnánk meg a megfelelő számú feltétel eléréséig.

A spline interpolációnál még a $g - 1 = d$-edik derivált is folytonos, és $g > 1$ esetén speciális egyenletrendszer megoldása kell a szabad paraméterek meghatározásához. A lineáris rendszer mérete $(g + 1)n$ lesz, de soronként kevés nemnulla együtthatója van. Így végül a rendszer megoldása n-ben lineáris műveletigénnyel állítható elő.

4. Definíció. *Az $[a, b]$ intervallumon definiált $S = S_g$ függvényt akkor hívjuk spline-nak, ha az ott folytonos, a (34) felosztás összes $[x_{j-1}, x_j]$ részintervallumán polinom:*

$S_g|_{[x_{j-1},x_j]} = s_j \in P_g([x_{j-1},x_j])$, *és a meghatározásához a felosztás belső pontjaiban csak az adott f függvény helyettesítési értékei szükségesek.*

A töröttvonal interpoláció is ennek egy fajtája $g = 1$ és $d = 0$ esetén. Emiatt elsőfokú spline-nak is nevezhetjük. Ez a módszer egyszerű, megtartja a nemnegativitást és a konvexitást.

Gyakori a harmadfokú spline használata. Itt $g = 3$ és $d = 2$. Tehát marad két feltételünk, amelyet peremfeltételként x_0, x_n pontokban használunk fel. A harmadfokú spline-hoztartozó lineáris rendszer tridiagonális alakra hozható, ha szakaszonként olyan Hermite-interpolációs feladatból indulunk ki, amelynek minden alappontja kétszeres: az adatai $\left(x_{j-1}, f_{j-1}, f'_{j-1}\right), \left(x_j, f_j, f'_j\right)$ alakúak. Ezáltal biztosítottuk, hogy ez a szakaszonkénti Hermite-interpoláció és első deriváltja folytonos legyen $[a,b]$-n. Az f'_j-k úgy választhatóak meg egyértelműen, hogy a szakaszonkénti interpoláció második deriváltja is folytonos legyen. Ez a követelmény adja az

$$\begin{aligned} f'_0 &= f'(x_0), \\ j = 1, 2, \ldots, n-1 : \\ h_j f'_{j-1} + 2(h_j + h_{j-1}) f'_j + h_{j-1} f'_{j+1} &= 3\{h_j D^1_{j-1} + h_j D^1_j\}, \\ f'_n &= f'(x_n), \end{aligned}$$

egyenleteket, melyek alapján látható, hogy a rendszer megoldható. Ha az $f'(x_0), f'(x_n)$ értékek nem állnak rendelkezésre, akkor az első, ill. utolsó négy alappontra kiszámítva a Lagrange-féle polinomot, majd ezt lederiválva és $x = x_0$-t, ill. $x = x_n$-t behelyettesítve kaphatjuk f'_0-t, ill. f'_n-t.

Az így kiszámított spilne-nak konstrukció szerint a második deriváltja is folytonos, de a szakaszonkénti harmadfokú Hermite-interpoláció második deriváltja a legtöbb esetben szakadásos.

Általában a szakaszonkénti $(2p+1)$-edfokú Hermite-interpoláció p-edik deriváltja folytonos, mígy egy $g = 2p+1$-edfokú spline-nak még a $g-1 = 2p$-edik deriváltja is folytonos.

5.1. B-spline

A bázisspline-ok, vagy más néven B-spline-ok a spline-ok olyan halmaza, melyek bázisfüggvények segítségével konstruálhatók meg.

Az egyszerűség kedvéért csak ekvidisztáns felosztású, h lépésközű B-spline-okkal foglalkozunk.

A B-spline-ok rekurzívan definiálhatók:

$$B_0 := \begin{cases} 1, & |x| \le \frac{1}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$B_{m+1}(x) := \int\limits_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} B_m(y)\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad m = 0, 1, \dots. \tag{37}$$

B_m $(m-1)$-szer folytonosan differenciálható, nemnegatív, a $[\frac{-m-1}{2}, \frac{m+1}{2}]$ intervallumon kívül $\equiv 0$, és az m-edfokú polinomra teljesül, hogy minden $[j, j+1]$ intervallum esetén m páratlan, $[j-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}]$-ra pedig m páros $(j \in \mathbb{Z})$.

Elemi integrációval megkapható $B_m(x)$ $m = 1, 2, 3$ esetén:

$$B_1 := \begin{cases} 1-|x|, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| \ge 1, \end{cases} \tag{38}$$

$$B_2 := \frac{1}{2} \begin{cases} 2 - (|x|-\frac{1}{2})^2 - (|x|+\frac{1}{2})^2, & |x| \le \frac{1}{2}, \\ (|x|-\frac{3}{2})^2, & \frac{1}{2} \le |x| \le \frac{3}{2}, \\ 0, & |x| \ge \frac{3}{2}, \end{cases} \tag{39}$$

$$B_3 := \frac{1}{6} \begin{cases} (2-|x|)^3 - 4(1-|x|)^3 & |x| \le 1, \\ (2-|x|)^3 & 1 \le |x| \le 2 \\ 0, & |x| \ge 2. \end{cases} \tag{40}$$

6. Bézier-polinomok

Az elkövetkezőkben bevezetésre kerül ([5] szerint) a számítógépes grafika néhány alapvető fogalma. Ezt az ismertetést csupán a síkbeli és térbeli görbékre korlátozzuk. A számítógépes grafikában alapvető követelmény, hogy a geometriai objektumok megjelenítése és mozgatása elég hatékony és gyors legyen.

5. Definíció. *$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ esetén jelölje P_n^m a*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \qquad x \in \mathbb{R}$$

képlettel megadható polinomok terét, ahol $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$. Egy $p \in P_n^m$ polinom n-edfokú, ha $a_n \ne 0$.

Legyen $[a, b] \in \mathbb{R}, \quad (a < b)$. Az

$$x \mapsto t(x) := \frac{x-a}{b-a} \tag{41}$$

affin lineáris transzformáció az $[a, b]$ intervallumot a $[0, 1]$-be képezi. A binomiális tétel alapján

$$1 = [t + (1-t)]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Ezeket a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett Bernstein-polinomoknak nevezzük. Mindebből (41) segítségével kaphatjuk az $[a, b]$-n értelmezett Bernstein-polinomokat.

6. Definíció. *A $[0, 1]$-en értelmezett n-edfokú Bernstein-polinomot a*

$$B_k^n(t) := \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \qquad k = 0, \ldots, n \tag{42}$$

képlet adja. Ennek következtében a

$$B_k^n(x; a, b) := B_k^n\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = \frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{k} (x-a)^k (b-x)^{n-k}, \qquad k = 0, \ldots, n$$

polinomot $[a, b]$-n értelmezett Bernstein polinomnak nevezzük.

A Bernstein-polinom néhány tulajdonsága:

- Nemnegatívak $[0, 1]$-en.
- $$\sum_{k=0}^{n} B_k^n(t) = 1, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{43}$$
- A Bernstein-polinomok eleget tesznek a

  $$B_k^n(t) = B_{n-k}^n(t)(1-t), \qquad k = 0, \ldots, n, \tag{44}$$

  és

  $$B_0^n(t) = (1-t)B_0^{n-1}(t), \quad B_n^n(t) = tB_{n-1}^{n-1}(t) \tag{45}$$

  relációknak minden $t \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén. A $t = 0$ pont a k-adrendű B_k^n egy gyöke, és $t = 1$ az $(n-k)$-adrendű egy gyöke. Minden B_k^n polinom a maximális értékét csak $t = \frac{k}{n}$-ben veszi fel.

- A Bernstein-polinomok rekurzív módon adhatók meg:

$$B_k^n(t) = tB_{k-1}^{n-1}(t) + (1-t)B_k^{n-1}(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{46}$$

  $n \in \mathbb{N}$ és $k = 1, \ldots, n-1$ esetén. A $B_0^n, \ldots, B_n^n$ polinomok P_n egy bázisát adják.

7. Definíció. *A $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^m$ együtthatókat a $p \in P_n^m$ polinom*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k B_k^n(x; a, b), \qquad x \in [a, b] \tag{47}$$

képletében p kontrollpontjainak, vagy Bézier-pontjainak nevezzük. Az ezáltal meghatározott poligont (töröttvonalat) Bézier-poligonnak nevezzük.

Mivel a p polinom grafikonja szorosan kötődik a Bézier-poligon formájához, ezért p grafikonját gyakran Béziér-görbének nevezik. Megfigyelhetjük, hogy $p(a) = b_0$ és $p(b) = b_n$, vagyis a Bézier-poligon, és -görbe mindkét végpontja egybeesik.

A Bézier-görbe deriváltjainak kiszámításában segít az alábbi összefüggés:

$$\frac{d}{dt}B_k^n(t) = \binom{k}{n}[kt^{k-1}(1-t)^{n-k} - (n-k)t^k(1-t)^{n-k-1}],$$

ami azt jelenti, hogy

$$(B_k^n)' = \begin{cases} -nB_0^{n-1}, & k = 0, \\ n(B_{k-1}^{n-1} - B_k^{n-1}) & k = 1, \ldots, n-1, \\ -nB_{n-1}^{n-1}, & k = n. \end{cases} \tag{48}$$

10. Tétel. (ld. [5]) *Legyen*

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k B_k^n(t), \qquad t \in [0, 1] \tag{49}$$

egy Bézier-polinom $[0, 1]$*-en. Ekkor*

$$p^{(j)}(t) = \frac{n!}{(n-j)!}\sum_{k=0}^{n-j} \Delta^j b_k B_k^{n-j}(t), \qquad j = 1, \ldots, n,$$

ahol a $\Delta^j b_k$ a következő rekurzív módon defiálható:

$$\Delta^0 b_k := b_k, \quad \Delta^j b_k := \Delta^{j-1} b_{k+1} - \Delta^{j-1} b_k, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Ezen tétel miatt a deriváltak a két végpontban:

$$p^{(j)}(0) = \frac{n!}{(n-j)!}\Delta^j b_0, \qquad p^{(j)}(1) = \frac{n!}{(n-j)!}\Delta^j b_{n-j}$$

Az első deriváltak a végpontban:

$$p'(0) = n(b_1 - b_0), \qquad p'(1) = n(b_n - b_{n-1}).$$

A Bézier-polinom $p(t)$ függvényértékének kiszámítására egy gyors és stabil módszer a de Casteljou algoritmus.

Adott egy (49) szerinti Bézier-polinom, definiáljuk a $b_i^k \in P_k^m$ segédpolinomot:

$$b_i^k(t) := \sum_{j=0}^{k} b_{i+j} B_j^k(t) \tag{50}$$

$i = 0, \ldots, n-k$ és $k = 0, \ldots, n$. A b_i^k segédpolinom egy k-adfokú polinom $k+1$ kontrollponttal: $b_i, \ldots, b_{i+k}$. $b_0^n = 0$.

11. Tétel. (ld. [5]) *Az n-edfokú p Bézier-polinom b_i^k segédpolinomja eleget tesz a*

$$b_i^k(t) := (1-t)b_i^{k-1}(t) + t b_{i+1}^{k-1}(t) \tag{51}$$

rekurziós formulának $i = 0, \ldots, n-k$ és $k = 1, \ldots, n$ esetén.

Mivel $b_0^n = p(t)$ a rekurziót $b_k^0 = b_k$-val kezdve $p(t)$ kiszámítható az egymást követő Bézier-pontok $(b_0, \ldots, b_n)$ konvex kombinációjaként. (51)-ből egy a differenciaséma-táblázathoz hasonló tábla írható fel. A de Casteljou-táblázat együtthatóit két $[0,t]$-n, ill. $[t,1]$-en értelmezett Bézier-polinomból állíthatjuk elő, amely viszont azonos az eredeti $[0,1]$-en vett Bézier-polinommal.

Tetszőleges $0 < t < 1$ esetén a

$$p_1(x) := \sum_{k=0}^{n} b_0^k(t) B_k^n(x; 0, t), \qquad p_2(x) := \sum_{k=0}^{n} b_n^{n-k}(t) B_k^n(x; t, 1)$$

Bézier-polinomokra teljesül:

$$p(x) = p_1(x) = p_2(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Természetes a $t = \frac{1}{2}$ választás. Az egymást követő, ismételt felosztások a Bézier-poligonok egy sorozatához vezetnek, mely elég gyorsan konvergál az eredeti Bézier-görbéhez, hogy az algoritmus hatékony legyen a görbék számítógépen való megjelenítésére.

7. Alkalmazás

A már említett számítógépes grafikai alkalmazásokon kívül az interpoláció másik gyakorlati alkalmazása a képek interpolációja. Ez bármilyen digitális fotónál felmerül valamilyen helyzetben, általában nagyítás, elferdítés vagy forgatás esetén.

Egy digitális fotó képpontokból (pixelekből) áll. Minden egyes képpont leírható matematikai értékkel. A digitális fotó nagyításakor eredeti méretének akár többszörösére is nőhet, valódi számérték azonban csak az eredeti képpontokhoz tartozik, a nagyítás során „beillesztett" új képpontok értékét hivatott kiszámolni az interpolációs algoritmus.

A lencsék torzítását kijavító, perspektívaváltó vagy forgató interpolációk ferdítés vagy a forgatás esetén fordulhatnak elő. Ugyanazon kép átméretezésekor, forgatásakor, vagy ferdítésekor az eredmény jelentős mértékben függ az interpolációs algoritmustól. Mivel az interpolációs eljárás csak egy közelítés, a kép mindenképp veszíteni fog a minőségéből. Minél több információt ismerünk a környező cellákról az interpoláció annál pontosabb lesz. Ebből következik, hogy minél jobban kinyújtunk egy képet annál nagyobb mértékben romlik a minősége.

A 90°-os forgatás veszteségmentes, mert egy cella sincs áthelyezve két pixel közötti határra (és így megosztva). Abban az esetben, ha a forgatás nem 90°-os, már a legelső forgatásnál észrevehető, hogy romlott a minőség. Következésképpen a a kép minőségének romlása egyenesen arányos a forgatások számának növekedésével. Az eredmények javíthatóak az interpoláció algoritmusát vagy a megadott adatok hibáját csökkentve.

8. Összefoglalás

A dolgozatban áttekintést adtunk a legismertebb, leggyakrabban tárgyalt interpolációs módszerekről.

Kerestük azt az $f(x)$-et közelítő $I(x)$ interpolációs függvényt, amely teljesíti az $I(x_i) = f(x_i)$ feltételt.

Bemutatásra került a polinomiális interpoláció több fajtája. Elsőként a Lagrange-, majd a Newton-féle, amit egyszerűbbé tett a differenciaséma megismerése. A Neville-féle rekurziót és az Hermite-interpolációt követően hibabecslést adtunk a már tárgyalt módszerekre. A polinomiális interpoláció a legegyszerűbb és leggyorsabb módszer, de nem minden esetben vezet eredményre. Ezért vizsgáltunk más eljárásokat: a trigonometrikus, és a spline interpolációt, végül pedig a grafikában használatos Bézier-görbéket. Mivel a spline interpoláció esetén a szomszédos alappontok által meghatározott szakaszokon interpolálunk, a spline jobban konvergál a keresett függvényhez. Hasonlóan hatékony a Bernstein-polinomokra éplülő Bézier-görbék módszere. Befejezésül a digitális fényképezés területén alkalmazott interpolációról esett néhány szó.

Hivatkozások

[1] http://www.wikipedia.org/

[2] Stoyan Gisbert: *Numerikus matematika mérnököknek és programozóknak*, TypoTex Kiadó, 2007

[3] Stoyan Gisbert – Takó Galina: *Numerikus módszerek 1.*, Typotex Kiadó, 2002

[4] Peter Henrici: *Numerikus analízis*, Műszaki Könyvkiadó, 1985

[5] Reiner Kress: *Numerical Analysis*, Springer, 1998

[6] Faragó István: *Alkalmazott Analízis I. Előadásjegyzet* ELTE, 2008

[7] http://pixinfo.com/cikkek/interpolacio