

7. Interpoláció polinomokkal

Legyenek $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ különböző alappontok, $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ értékek.

(Általában $y_i = f(x_i)$, ahol $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény.)

Olyan $P \in \mathbb{P}_n$ (legfeljebb n -edfokú) polinomot keresünk, amelyre

$$P(x_i) = y_i \quad (i = 0, \dots, n).$$

7.1. Tétel. $\exists!$ $P \in \mathbb{P}_n$, melyre $P(x_i) = y_i \quad (i = 0, \dots, n)$.

Bizonyítás. P meghatározása és az egyértelműség bizonyítása a határozatlan együtthatók

módszerével történik. Legyen $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ alakú, ekkor az interpolációs feltételből

$$P(x_i) = \sum_{k=0}^n a_k (x_i)^k = y_i \quad (i = 0, \dots, n).$$

Ez a_k -kra az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldását jelenti:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$$

(Vandermonde mátrixú egyenletrendszer)

Ha $x_i \neq x_j \ (i \neq j)$, akkor a Vandermonde mátrix determinánsa nem nulla, az

egyenletrendszernek egyértelműen létezik megoldása, így az interpolációs polinom is létezik és egyértelmű.

7.1. Előállítás Lagrange-alakkal

7.1. Definíció. Az x_0, x_1, \dots, x_n alappontok által meghatározott Lagrange-alappolinomokat a következőképpen definiáljuk:

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad (k = 0, \dots, n)$$

7.2. Állítás. $l_k(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x_i - x_j}{x_k - x_j} = \mathbf{d}_{ki} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq k \\ 1, & \text{ha } i = k \end{cases}$.

Bizonyítás Hf.

7.3. Állítás. Legyen $\mathbf{w}(x) := \prod_{j=0}^n (x - x_j)$, ekkor belátható, hogy $l_k(x) = \frac{\mathbf{w}(x)}{(x - x_k)\mathbf{w}'(x_k)}$.

Bizonyítás Hf.

A Lagrange-alappolinomok segítségével a következőképpen írható fel az interpolációs

polinom Lagrange-alakja: $P(x) = \sum_{k=0}^n y_k \cdot l_k(x) =: L_n(x)$

7.2. Előállítás Newton-alakkal

7.2. Definíció. Az elsőrendű osztott differenciákat a következőképpen definiáljuk:

$$f[x_i, x_{i+1}] := \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad (= f[x_{i+1}, x_i]), \quad (i = 1, \dots, n)$$

A k -adrendű osztott differenciák:

$$f[x_i, \dots, x_{i+k}] := \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \text{ és } (i = 0, \dots, n-k)$$

7.4. Tétel. Ha $\mathbf{s} \in \text{Perm}\{i, \dots, i+k\}$, akkor $f[x_i, \dots, x_{i+k}] = f[x_{\mathbf{s}(i)}, \dots, x_{\mathbf{s}(i+k)}]$

Bizonyítás Hf.

Tegyük fel, hogy $y_i = f(x_i)$ és írjuk fel a Lagrange-alakot a következőképpen:

$$L_n = L_0 + \sum_{k=1}^n (L_k - L_{k-1}), \quad \text{ahol } L_k - L_{k-1} \in P_k$$

$$L_0(x) = \text{konstans} = f(x_0) = y_0,$$

$$(L_k - L_{k-1})(x_j) = L_k(x_j) - L_{k-1}(x_j) = f(x_j) - f(x_j) = 0, \quad (j = 0, \dots, k-1).$$

Tehát $L_k - L_{k-1}$ legfeljebb k -adfokú polinomnak megtaláltuk a k db gyökét, tehát

$$(L_k - L_{k-1})(x) = c_k \cdot \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) \text{ alakú, ahol } c_k \text{-ről belátható, hogy}$$

$$c_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k].$$

Így az interpolációs polinom Newton-alakja

$$N_n(x) := P(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n f[x_0, \dots, x_k] \cdot \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j).$$

Megjegyzés: Új alappont hozzávétele esetén a Newton-alak jobban használható, csak 1 új tagot kell hozzávenni a korábban már elkészített polinomhoz.

7.3. Hibabecslés.

7.5. Tétel. Legyen $f \in D^{(n+1)}(a, b)$, $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

(Ahol $[a, b]$ az x_0, \dots, x_n és az $x \in \mathbb{R}$ által kifeszített intervallum.)

Ekkor $\exists \mathbf{x} \in (a, b)$:

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\mathbf{x})}{(n+1)!} \cdot \mathbf{w}(x).$$

Ha $\sup_{y \in [a, b]} |f^{(n+1)}(y)| =: M_{n+1} < \infty$, akkor az

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |\mathbf{w}(x)|$$

becslést kapjuk az interpoláció hibájára.

Bizonyítás. Ha $x = x_i$, akkor triviális: $f(x_i) - P(x_i) = 0$ és $w(x_i) = 0$ ($i = 0, \dots, n$).

Ha $x \neq x_i$, akkor $g(z) := f(z) - P(z) - \frac{w(z)}{w(x)}(f(x) - P(x))$.

Mivel $g(x_i) = 0$ ($i = 0, \dots, n$) és $g(x) = 0$, g -nek $n+2$ db gyöke van a Rolle tétel miatt következik, hogy g' -nek van gyöke a szomszédos gyökök között.

Tehát g' -nek $n+1$ db gyöke van $[a, b]$ -n.

Hasonlóan g'' -nak n db \dots , $g^{(n+1)}$ -nak 1 db gyöke van $[a, b]$ -n, jelöljük \mathbf{x} -vel.

Ekkor

$$0 = g^{(n+1)}(\mathbf{x}) = f^{(n+1)}(\mathbf{x}) - P^{(n+1)}(\mathbf{x}) - \frac{w^{(n+1)}(\mathbf{x})}{w(\mathbf{x})} \cdot (f(x) - P(x)),$$

ahol $P^{(n+1)}(\mathbf{x}) = 0$, $w^{(n+1)}(\mathbf{x}) = (n+1)!$.

$$\Rightarrow f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\mathbf{x})}{(n+1)!} \cdot w(x).$$

7.6. Tétel. Legyen $f \in D^{n+1}(a, b)$ és $x \in [a, b]$ tetszőleges, ekkor

$$\exists \mathbf{x} \in (a, b): f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\mathbf{x})}{(n+1)!}.$$

Következmény: A Newton-alak hibaformulája

$$f(x) - N_n(x) = f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] \cdot w(x).$$

7.4. Kidolgozott példák.

1. Példa: Legyen $f(x) := \cos\left(\frac{\mathbf{p}}{2}x\right)$, $x \in [-1; 1]$.

Írjuk fel az f fv-t, a $-1; 0; 1$ alappontokon interpoláló (másodfokú) polinomot, és adjuk meg a hibabecslését a $[-1, 1]$ intervallumban és az $x = \frac{1}{2}$ pontban!

Megoldás. a) Határozatlan együtthatók módszerével:

$$x_0 = -1 \quad y_0 = 0$$

$$x_1 = 0 \quad y_1 = 1$$

$$x_2 = 1 \quad y_2 = 0$$

$P(x) = ax^2 + bx + c$ alakban keressük a polinomot.

Írjuk fel az interpolációs egyenleteket!

$$f(x_i) = y_i = P(x_i), \quad (i = 0, 1, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad a(-1)^2 + b(-1) + c = 0 \\ 2. \quad a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1 \\ 3. \quad a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0 \end{array} \right\} \rightarrow c = 1$$

$$3. - 1. \quad 2b = 0 \rightarrow b = 0$$

$$3. \quad a + 0 + 1 = 0 \rightarrow a = -1$$

Tehát $P(x) = \underline{\underline{-x^2 + 1}}$.

b) Lagrange-alakkal. Az alappontokhoz tartozó Lagrange-alappolinomok:

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2)}{(x_0-x_1) \cdot (x_0-x_2)} = \frac{(x-0) \cdot (x-1)}{(-1-0) \cdot (-1-1)} = \frac{1}{2} \cdot x(x-1)$$

$$l_1(x) = \frac{(x-(-1)) \cdot (x-1)}{(0-(-1)) \cdot (0-1)} = (-1) \cdot (x+1) \cdot (x-1)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-(-1)) \cdot (x-0)}{(1-(-1)) \cdot (1-0)} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (x+1)$$

$$P(x) = L_2(x) = 0 \cdot l_0(x) + 1 \cdot l_1(x) + 0 \cdot l_2(x) = -(x+1) \cdot (x-1) = \underline{\underline{-x^2 + 1}}$$

c) Newton-alakkal. Elkészítjük az osztott differencia táblázatot:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	
-1	0	$\frac{1-0}{0-(-1)} = 1 = f[x_0, x_1]$	$\frac{-1-1}{1-(-1)} = -1 = f[x_0, x_1, x_2]$
0	1		
1	0	$\frac{0-1}{1-0} = -1 = f[x_1, x_2]$	

$$P(x) = N_2(x) = 0 + 1 \cdot (x - (-1)) + (-1) \cdot (x - (-1)) \cdot (x - 0) = x + 1 - x^2 - x = \underline{\underline{-x^2 + 1}}$$

d) Hibabecslés:

$$f'(x) = \frac{p}{2} \cdot \left(-\sin \frac{p}{2} x \right)$$

$$f''(x) = -\left(\frac{p}{2} \right)^2 \cdot \cos \frac{p}{2} x$$

$$f'''(x) = \left(\frac{p}{2} \right)^3 \cdot \sin \frac{p}{2} x$$

$$|f'''(\mathbf{x})| \leq \left(\frac{p}{2} \right)^3 \cdot 1 = \left(\frac{p}{2} \right)^3 \quad \mathbf{x} \in [-1; 1] \Rightarrow M_3 = \left(\frac{p}{2} \right)^3.$$

$$\text{Tehát } |f(x) - P(x)| \leq \frac{\left(\frac{p}{2} \right)^3}{3!} \cdot |(x - (-1)) \cdot (x - 0) \cdot (x - 1)| \leq \frac{p^3}{8 \cdot 3!} \cdot \frac{2}{3 \cdot \sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{p^3}{72 \cdot \sqrt{3}}}}.$$

$$\mathbf{w}(x) = x^3 - x$$

$$\mathbf{w}'(x) = 3x^2 - 1 \rightarrow \mathbf{w}'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left| \mathbf{w}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right| = \left| \mathbf{w}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right| = \left| \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right| = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{3}} \Rightarrow \max_{x \in [-1,1]} |\mathbf{w}(x)| = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Beírva a hibaformulába, megkapjuk az interpolációs polinom hibabecslését a $[-1,1]$ intervallumra.

e) Hibabecslés az $x = \frac{1}{2}$ pontban: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \cos\left(\frac{\mathbf{P}}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - P\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{\left(\frac{\mathbf{P}}{2}\right)^3}{3!} \cdot \left| \left(\frac{1}{2} - (-1)\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 0\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) \right| \leq \frac{\mathbf{P}^3}{8 \cdot 3!} \cdot \frac{3}{8} = \frac{\mathbf{P}^3}{128}$$

2. Példa: Illesszünk polinomot az alábbi pontokra:
(1;1) (4;19) (5;29)

Megoldás. Newton-alakkal.

$$\begin{array}{l} x_i \quad f(x_i) \\ 1 \quad 1 \\ 4 \quad 19 \\ 5 \quad 29 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{19-1}{4-1} = 6 \\ \frac{29-19}{5-4} = 10 \end{array} \right\} \frac{10-6}{5-1} = 1$$

$$P(x) = N_2(x) = 1 + 6 \cdot (x-1) + 1 \cdot (x-1) \cdot (x-4) = \underline{\underline{x^2 + x - 1}}$$

3. Példa: Legyen f és P az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokra felírt (lineáris) interpolációs polinom. Írjuk fel a polinomot és adjuk meg a hibáját!

Megoldás. Lagrange-alakkal. A Lagrange-alappolinomok a következők:

$$l_0(x) = \frac{x-b}{a-b}, \quad l_1(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$P(x) = f(a) \cdot \frac{x-b}{a-b} + f(b) \cdot \frac{x-a}{b-a} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot x + \frac{1}{b-a} (b \cdot f(a) - a \cdot f(b))$$

Legyen $M_2 := \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$, ekkor

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M_2}{2!} |(x-a) \cdot (x-b)| \leq \frac{M_2}{8} \cdot (b-a)^2$$

$$|\mathbf{w}(x)| = |(x-a)(x-b)| \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

az $x = \frac{a+b}{2}$ helyen veszi fel \mathbf{w} a maximumát.

4. Példa. Milyen sűrűn kell táblázatban megadni a \cos függvény értékeit a $[0, \delta]$ -n, ha a közbülső értékeket lineáris interpolációval számoljuk és azt szeretnénk, hogy a hiba 0.05 -nél kisebb legyen? Egyenletes (ekvidisztans) felosztást tekintünk.

Megoldás. Az $x_i := i \cdot \frac{P}{n}$, ($i = 0, \dots, n$) helyeken számoljuk a függvény értékeit.

Hiba azonos a részintervallumonkénti hiba maximumával.

Az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumon a hiba az előző feladat eredménye alapján:

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M_2}{8} \cdot \left(\frac{P}{2}\right)^2.$$

$M_2 = \sup_{x \in [0, P]} |\cos''(x)| = 1$. Olyan $n \in \mathbb{N}$ -et keresünk, melyre

$$\frac{M_2}{8} \cdot \left(\frac{P}{n}\right)^2 = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{P}{n}\right)^2 < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}.$$

$$\frac{P^2}{n^2} < 40 \cdot 10^{-4}$$

↑↑

$$\frac{P}{n} \leq 6 \cdot 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{P}{6} \cdot 10^2 < n$$

$$\underline{\underline{n \approx 52}}$$

Megjegyzés: Pontosabbá tehető a közelítés nem ekvidisztans felosztású, hanem a szélek felé sűrűsödő felosztással

7.4. Inverz interpoláció

(Az interpoláció alkalmazása az $f(x)=0$ egyenlet iteratív megoldására)

Tegyük fel, hogy az x_0, \dots, x_n -k által meghatározott intervallumban f -nek létezik inverze, jelöljük g -vel (pl. az $f'(x) \neq 0$, vagy f monoton).

Ekkor az $f(x)=0$ megoldása egyenértékű a $g(0)$ értékének meghatározásával.

A $g(0)$ értékének közelítő meghatározására alkalmazzuk az interpoláció elvét. Írjuk fel a g függvényt közelítő interpolációs polinomot a következő adatok alapján:

$$y_i = f(x_i), \quad (i = 0, \dots, n) \text{ az alappontok}$$

$$g(y_i) = x_i, \quad (i = 0, \dots, n) \text{ az inverzfüggvény értékei.}$$

A kapott $G(y) \in P_{n-1}$ polinom $G(0)$ helyettesítési értékét keressük.

Iteráció úgy készíthető belőle, ha valamelyik $x_i, f(x_i)$ ($g(y_i), y_i$) értéket kicseréljük a $G(0) = g(y_{új}), f(G(y_{új})) = y_{új}$ értékekre.