Feladatok

1. Interpoláció.

1.1. Lagrange-féle interpoláció

1.1.1. Illesszük minimális fokszámú polinomot az alábbi pontokra!

a). $(-1,6),(0,3),(1,2)$

b). $(1,1),(4,19),(5,29)$

c). $(0,0.5),(0.1,-0.48),(0.5,0)$

d). $(-1,1.5),(0.3,1.89),(0.25,1.8125)$

e). $(-1,1),(0,-1),(0.5,-0.5),(1,-1),(2,1)$

1.1.2. Számítsuk ki a megadott x_i alappontok felhasználásával az alábbi függvények közelítését!

a) $f(x) = \sqrt[4]{x} + x - 2, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 16, \quad x_3 = 81$

$f(0.5) = ? \quad f(25) = ? \quad f(80) = ?$

b) $f(x) = e^x, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 0.5, \quad x_2 = 1$

$f(-1) = ? \quad f(0.7) = ? \quad f(3) = ?$

c) $f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = \pi/6, \quad x_2 = \pi/3, \quad x_3 = \pi/2$

$f(\pi/18) = ? \quad f(7\pi/36) = ? \quad f(8\pi/18) = ?$

d) $f(x) = \ln x, \quad x_k = 0.3 + kh, \quad k = 0,\dots 8, \quad h = 0.1$

$f(0.65) = ? \quad f(0.0001) = ? \quad f(0.2) = ?$

1.1.3. Becsüljük meg az interpoláció maximális hibáját!

a) $f(x) = e^x, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 0.5, \quad x_2 = 1$

b) $f(x) = \ln(1+x), \ x > -1, \quad x_0 = -0.5, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0.5$

c) $f(x) = x + \sin x, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = \pi/4, \quad x_2 = \pi/2$

d) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 2, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 9$

1.1.4. Mekkora lesz a hiba, ha az adott függvényeket az adott intervallumokon lineárisan interpoláljuk?

a) $f(x) = \sqrt{x}, \ x \geq 0,$

a1) $[0,1]$, a2) $[4,9]$, a3) $[40,50]$

b) $f(x) = e^x$

b1) $[-10,-1]$, b2) $[-1,1]$, b3) $[1,10]$

c) $f(x) = x^3 - x, 0 \quad x \in [-1;1].$

c1) $[0, 0.5]$, c2) $[0.5, 1]$

1.1.5. Milyen sűrűn kell megadni az alábbi függvényértékeket, hogy két szomszédos pont között lineárisan interpolálva a hiba kisebb legyen, mint $0,5 \cdot 10^{-6}$?

a). $\cos x, \quad x \in [0,\pi]$;

b). $e^x, \quad x \in [-2,3]$;

c). $\sqrt{x}, \quad x \in [0.01;4]$;

d). $x\cos x, \quad x \in [-\pi/2, \pi/2]$;

e). $x^3 - x, \quad x \in [0,\pi]$;

1.1.6. Adott a következő táblázat:

x	2.0	2.3	2.5	3.0	3.5	3.8	4.0
$f(x)$	5.848	6.127	6.300	6.694	7.047	7.243	7.368

Határozzuk meg a függvényértékek közelítését a következő pontokban:

a). $2,22$ b). $2,41$ c). $2,78$ d). $3,34$

e). $3,75$ f). $3,88$

1.2. Inverz interpoláció

1.2.1. Tekintsük a következő táblázatot!

x	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25
$f(x)$	2,00000	2,00238	2,00909	2,01957	2,03313	2,05000

Határozzuk meg annak az x-nek a közelítő értékét, melyre a függvény értéke a következő:

a). $2,00139$;

b). $2,00194$;

c). $2,00373$.

1.2.2. Határozzuk meg a következő függvények gyökét ε pontossággal az $[a,b]$ intervallumban!

a) $x^2 + \ln x, \quad \varepsilon = 10^{-4}, \quad a = 0.5; \quad b = 1;$

b) $x^2 + \ln x - 4, \quad \varepsilon = 10^{-4}, \quad a = 1.5; \quad b = 2;$

c) $x^2 + \sin x, \quad \varepsilon = 10^{-4}, \quad a = 0.5; \quad b = 1;$

a) $2\sqrt{x} - \cos(\pi x/2), \quad \varepsilon = 10^{-5}, \quad a = 0.2; \quad b = 0,3;$

1.1.3. Keressük meg inverz interpolációval az *f* függvény *0.3* és *0.4* között levő gyökének közelítő
értékét a következő táblázat alapján:

x	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$
$f(x)$	$0,70010$	$0,40160$	$0,10810$	$-0,17440$	$-0,43750$

2. Nemlineáris egyenletek megoldása.

2.1. Fixpont iterációs módszer.

2.1.1. Közelítsük az egyenletek megoldásait az adott szakaszokon különböző kezdőértékekkel, és vizsgáljuk meg a módszerek konvergenciáját:

a). $\frac{1}{2}\ln(x+1) = 0, \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}\ln(x_n+1) \quad [-0.5, 0.5]$

b). $x - 2\sin x = 0, \quad x_{n+1} = 2\sin x_n \quad [-\pi, -0.1], [0.1, \pi]$

c). $\sqrt{x} + 3x - 1 = 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n} + 4x_n - 1, \quad [0,1]$

d). $x^3 - x = 0, \quad x_{n+1} = x_n^3, \quad [-1.5, -0.5], [-0.5, 0$

e). $x^3 + \ln x = 5, \quad x_{n+1} = (5 - \ln x_n)^{\frac{1}{3}}, \quad [1,2]$

f).
$3^x - 2x - 1 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{3^{x_n} - 1}{2}, \quad [-0.5, 0.5], [0.5, 1.5]$

g). $\sin x = 5x, \quad x_{n+1} = \frac{\sin x_n}{5}, \quad [-\pi/2, \pi/2]$

2.2. Intervallumfelezés és húrmódszer.

a) $\sqrt{x} = 4x - 2, \quad [0,1], \quad [0.5, 1]$

b) $\sqrt{x} + 3x - 1 = 0, \quad [0,1]$

c) $x^3 + \ln x - 5 = 0, \quad [1,2]$

d) $\ln x - \frac{1}{(x+1)^2} = 0, \quad [1,3]$

e) $xe^x = \cos x, \quad [0,1]$

f) $tgx - \cos x + \frac{1}{2} = 0, \quad [0, \pi/3]$

g) $e^x \cos x - \frac{x}{2} = 0, \quad [0, \pi/2],$

2.3.Newton-Rapson módszer.

a) $\sqrt{x} + 3x - 1 = 0, \quad x_0 = 0;\ 1$

b) $\frac{1}{2}\ln(x+1) = 0, \quad x_0 = -0.4;\ 0.5$

c) $x - 2\sin x = 0, \quad x_0 = 0.1;\ \pi$

d) $x = -e^x, \quad x_0 = 2;\ 0$

e) $xe^x = \cos x, \quad x_0 = 0; 1$

f) $(x-1)e^{10x} + x^{-10} = 0, \qquad x_0 = 0.5; 1$

2.4. Algebrai egyenletek megoldása.

2.4.1. Adjunk felső korlátot az alábbi egyenletek gyökeinek abszolút értékére!

a). $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$

b). $3x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = 0$

c). $x^5 + x^4 - 21.14x^3 + 2x - 45.2 = 0$

d). $x^4 - 3.2x^3 + 1.64x^2 + 4.8x - 1 = 0$

2.4.2. Alkalmazzuk a Horner-algoritmust az alábbi feladatokra.

a). $P_4(x) = x^4 - 2x^3 - x - 1; \qquad P_4(2.4) = ?$

b). $P_3(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12; \qquad P_3(1.999) = ?, \qquad P_3(2.001) = ?,$

2.4.3.Adjunk becsléseket az alábbi polinomok gyökeire, és határozzuk meg az összes gyököt.

a). $5x^3 + 2x^2 - 15x - 6 = 0;$

b). $x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0;$

c). $x^3 - 3x^2 - 3 = 0;$

d). $x^3 - x - 1 = 0;$

e). $1.23x^5 - 2.52x^4 - 1.61x^3 + 29.4x - 1.34 = 0;$

3. Numerikus differenciálás

3.1. Adott a következő táblázat:

x	0.96	0.98	1.00	1.02	1.04
$f(x)$	0.7825361	0.7739332	0.7651977	0.7563321	0.7473390

Határozzuk meg a függvény első és második deriváltjának közelítését az $x = 1$ pontban.

3.2. Adott a következő táblázat:

x	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
$f(x)$	0.00000	0.10017	0.20134	0.30452	0.41075	0.52110

Határozzuk meg a függvény első és második deriváltjának közelítését az $x = 0$ és $x = 0.1$ pontokban.

4. Numerikus integrálás

4.1. Közelítsük az alábbi integrálokat összetett trapéz- és Simpson- formulával és becsüljük meg a közelítés hibáját.

1. $\int_1^2 \frac{1}{x} dx, \qquad n = 10;$

2. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx, \qquad n = 10;$

3. $\int_{0}^{1.2} \ln(1+x^2)dx, \qquad n = 6;$

4. $\int_{1}^{3} \frac{1}{1+x} dx, \qquad n = 4;$

5. $\int_{1}^{9} \sqrt{6x-5}\, dx, \qquad n = 8;$

6. $\int_{4}^{5.2} \ln x dx, \qquad n = 6;$

7. $\int_{0}^{1} e^{-x^2} dx, \qquad n = 10;$

8. $\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x} dx, \qquad n = 10;$

9. $\int_{0}^{1} \frac{x}{1+x} dx, \qquad n = 10;$

10. $\int_{0}^{1} e^{x^2} dx, \qquad n = 10;$

11. $\int_{0}^{1} \sin x^2 dx, \qquad n = 10;$

12. $\int_{0}^{1} \cos x^2 dx, \qquad n = 10;$

12. $\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}\, dx, \qquad n = 6;$

4.1.2. Összetett trapéz- és Simpson- formulával közelítsük az alábbi integrálokat az adott pontossággal úgy, hogy n –et a hibatagból számítsuk ki.

1. $\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x} dx, \qquad \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-4};$

2. $\int_{1}^{9} \sqrt{x}\, dx, \qquad \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-2};$

3. $\int_{0}^{1} e^{-x^2} dx, \qquad \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-4};$

4. $\int_{0}^{\pi/2} \sin x^2 dx, \qquad \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-3};$

5. $\int_{1}^{\pi/2} \sqrt{1+\sin^2 x}\, dx, \qquad \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-2};$

6. $\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^3} dx, \qquad \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-4};$

7. $\int_{0}^{1} e^{x^2} dx, \qquad \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-2};$

8. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx, \qquad \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-4};$

9. $\int_{0}^{1} \cos x^2 dx, \qquad \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-3};$

10. $\int_{1}^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx, \qquad \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-2};$

11. $\int_{1}^{\pi/2} \sqrt{1+\frac{1}{4}\sin^2 x}\, dx, \qquad \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-4};$

12. $\int_{0}^{1.2} \ln(1+x)^2 dx, \qquad \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-2};$

13. $\int_{0}^{9} \sqrt{6x-5}\, dx, \qquad \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-2};$

14. $\int_{4}^{5.2} \ln x dx, \qquad \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-2};$

15. $\int_{0}^{12} \frac{x}{1+x} dx, \qquad \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-3};$

4.1.3. A Gauss-kvadratúrák alkalmazásával számítsuk ki a következő integrálokat.

1. $\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x} dx, \qquad n = 6;$

2. $\int_{0}^{1} e^{-x^2} dx, \qquad n = 6;$

3. $\int_{-1}^{1} \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-x^2}} dx, \qquad n = 5;$

4. $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)} dx, \qquad n = 5;$

5. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,(1+x^2)} dx, \qquad n = 5;$

6. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx, \qquad n = 4;$

7. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\lg(1+x)}{1+x^2} dx, \qquad n = 5;$

8. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \sin x^2 dx, \qquad n = 6;$

9. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xe^{-x}}{2+x} dx, \qquad n = 6;$

10. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+\sqrt{x}} dx, \qquad n = 6.$

5 Lineáris algebra numerikus módszerei

5.1. Determinánsok

5.1.1. határozzuk meg a következő mátrixok determinánsát.

a). $$\begin{pmatrix} 0 & 2.1 & 3.2 & 1.2 & 0 \\ 0.8 & 0 & 2.9 & 0 & 1.4 \\ 1.4 & 2.5 & 0 & 3.2 & 2.8 \\ 1.6 & 0 & 1.3 & 0 & 1.1 \\ 0 & 1.8 & 3.8 & 2.2 & 0 \end{pmatrix}$$

b). $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 0.4 & 0.16 & 0.064 & 0.0256 \\ 1 & -3 & 9 & -27 & 81 \\ 1 & 0.5 & 0.25 & 0.125 & 0.0625 \\ 1 & -0.6 & 0.36 & -0.216 & 0.1296 \end{pmatrix}$$

5.2. Lineáris egyenletrendszerek megoldása

5.2.1. Gauss-módszer

5.2.1. Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ha

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 5 \\ -2 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a). Gauss-módszerrel,

b). Gauss-módszerrel teljes főelem-kiválasztással.

5.2.2. Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ha

$$A = \begin{pmatrix} 0.00001 & 2 & 3 \\ 10 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5.00001 \\ 17 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a). Gauss-módszerrel,
b). Gauss-módszerrel teljes főelem-kiválasztással.

5.2.3. Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ha

$$A = \begin{pmatrix} 0.0001 & 2 & 3 \\ 10 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5.0001 \\ 17 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a). Gauss-módszerrel,
b). Gauss-módszerrel teljes főelemkiválasztással.

5.2.4. Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ha

$$A = \begin{pmatrix} 0.001 & 2 & 3 \\ 10 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5.001 \\ 17 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a). Gauss-módszerrel,
b). Gauss-módszerrel teljes főelem-kiválasztással.ű

5.2.5. Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ha
a).

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.95 \\ 0.67 \\ 0.52 \end{pmatrix}$$

b). az A mátrix az előbbi, de

$$b = \begin{pmatrix} 0.96 \\ 0.66 \\ 0.53 \end{pmatrix}.$$

5.2.2. Négyzetgyökök módszere

5.2.6. Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert a négyzetgyökök módszerével.
a).

$$A=\begin{pmatrix} 3.1 & 1.5 & 1.0 \\ 1.5 & 2.5 & 0.5 \\ 1.0 & 0.5 & 4.2 \end{pmatrix}, \qquad b=\begin{pmatrix} 10.83 \\ 9.20 \\ 17.10 \end{pmatrix};$$

b).

$$A=\begin{pmatrix} 3.2 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 3.7 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 4.2 \end{pmatrix}, \qquad b=\begin{pmatrix} 4.0 \\ 4.5 \\ 4.0 \end{pmatrix};$$

c).

$$A=\begin{pmatrix} 5.5 & 7.0 & 6.0 & 5.5 \\ 7.0 & 10.5 & 8.0 & 7.0 \\ 6.0 & 8.0 & 10.5 & 9.0 \\ 5.5 & 7.0 & 9.0 & 10.5 \end{pmatrix}, \qquad b=\begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix};$$

5.2.3. Iterációs módszerek

5.2.7. Oldjuk meg iterációs módszerrel az alábbi egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} x - 0.25y &= 0.5 \\ 0.25x - y + 0.25z &= -1.5 \\ -0.25x + z &= 0.75 \end{aligned}$$

5.2.8. Oldjuk meg Gauss-Jacobi iterációval a következő egyenletrendszereket:

a).

$$\begin{aligned} 4x - y &= 0.4 \\ -x + 4y - 5z &= 0.8 \\ -y + z - u &= 1.2 \\ -z + 2u &= 0.6 \end{aligned}$$

b).

$$\begin{aligned} 9.37x + 3.04y - 2.44z &= 9.23 \\ 3.04x + 6.184y + 1.225z &= 8.20 \\ -2.44x + 1.22y + 8.44z &= 3.93 \end{aligned}$$

5.2.9. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszerek megoldást iterációval a megadott pontossággal:

a)

$$A=\begin{pmatrix} 4.00 & 0.24 & -0.08 & 0.16 \\ 0.09 & 3.00 & -0.15 & -0.12 \\ 0.04 & -0.08 & 4.00 & 0.06 \\ 0.02 & 0.06 & 0.04 & -10.00 \end{pmatrix}, \qquad b=\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-3}$$

b).

$$A = \begin{pmatrix} 8.714 & 2.180 & 5.684 \\ -1.351 & 10.724 & 5.224 \\ 2.489 & -0.459 & 6.799 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 49.91 \\ 50.17 \\ 32.68 \end{pmatrix}; \quad \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-4}$$

5.2.10. Oldjuk meg Gauss-Seidel iterációval a következő egyenletrendszereket 0.0001-nél kisebb hibával:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 100 & -2.9 & -3.8 & -76 \\ -0.09 & 10 & 0.74 & 0.63 \\ -0.081 & 0.024 & 1 & -0.09 \\ -6.5 & -7.3 & 5.8 & 100 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 65.1 \\ 7.42 \\ 0.903 \\ 80.5 \end{pmatrix};$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0.13 & 0.01 & 0.04 \\ -0.11 & 0.05 & 0.04 & 0 \\ -0.09 & 0.08 & 1 & 0.02 \\ -0.12 & 1 & 0.03 & 0.03 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

c).

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 11.33 \\ 32 \\ 42 \end{pmatrix};$$

5.2.4. Gradiens módszer

5.2.11. Oldjuk meg gradiens módszerrel a következő egyenletrendszereket:

a).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

b).

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 01 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

c).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

6. Nemlineáris egyenletrendszerek megoldása

6.1. Fokozatos közelítések módszere

6.1. Fokozatos közelítések módszerével (fixpont iterációs eljárással) oldjuk meg a következő egyenletrendszereket. A kezdőpontot grafikus módszerrel lehet megállapítani.

a). $\sin(x+y) - y = 1,$
$2x + \cos y = 1;$

b). $\cos\frac{1}{3}(x-y) - 2y = 0,$
$\sin\frac{1}{3}(x+y) - 2x = 0;$

c). $2x^2 - xy - 5x + 1 = 0,$
$x + 3\lg x - y^2 = 0, \qquad x, y > 0;$

d). $2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 6 = 0,$
$y - x - 1 = 0;$

e). $x^2y^2 - 3x^3 - 6y^3 + 8 = 0,$
$x^4 - 9y + 2 = 0;$

f). $2x - xy - 5x + 1 = 0,$
$x + 3\lg x - y^2 = 0;$
$(x^*, y^*) = (3{,}487; 2{,}262)$

g). $2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 6 = 0,$
$y - x - 1 = 0;$
$\{0 \le x \le 0{,}5; 0 \le y \le x\}$
$(x^*, y^*) = (1{,}0000; 2{,}0000)$

h). $x = \lg\frac{y}{z} + 1,$
$y = 0{,}4 + z^2 - 2x^2,$
$z = 2 + \frac{xy}{20};$
$(x_0, y_0, z_0) = (1; 2{,}2; 2).$

6.2. Newton-Kantorovics módszer

6.2. Newton-Kantorovics (Newton) módszerrel oldjuk meg a következő egyenletrendszereket. A kezdőpontot grafikus módszerrel lehet megállapítani.

a). $x^2 - y = 3.64$
$(x+y)^2 = 2.84$

b). $x^3 - z = 1,$
$x + y^2 - z = 2$
$2x - y + z^2 = 3$

c). $e^x + 2y = 9.368$
$e^{2x} - y^2 = -20.115$

d). $2x^2 - xy - 5x + 1 = 0$
$x + 3\lg x - y^2 = 0$

e). $\sin(x-y) - xy = 1$
$x^2 - y^2 = 0.75$

f). $\cos(0{,}4y + x^2) + x^2 + y^2 - 1{,}6 = 0$
$1{,}5x^2 - \frac{y^2}{0{,}36} - 1 = 0$
$(x = 1{,}03864; y = 0{,}47173)$

g) $tg(xy+k) = x^2$
$\alpha x^2 + 2y^2 = 1,$
$x > 0, y > 0, \qquad \alpha = 0,5 + 0,1m, \qquad k = 0,1m, \qquad m = 0,1,2,3,4.$

h) $e^{xy} = x^2 - y + \alpha,$
$(x+0,5)^2 + y^2 = k,$
$x > 0, y > 0, \qquad \alpha = 1 + 0,1m, \qquad k = 0,6 + 0,1m, \qquad m = 0,1,2,3,4.$

6.3. Gradiens-módszer

6.3. Gradiens-módszerrel oldjuk meg a következő egyenletrendszereket.

a). $\sin(x+y) - 1.3x = 0.1, \qquad x^2 + y^2 = 1;$

b). $x + x^2 - 2yz = 0.1,$
$y - y^2 + 3xz = -0.2,$
$z + z^2 + 2xy = 0.3;$
$(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0) -$ kezdőpont.

7. Legkisebb négyzetek módszere

1. Számítsuk ki az

$$f(x) = e^x + x$$

függvényt az

$$x = -1; -0.5; 0; 0.5; 1$$

pontokban négyzetesen legjobban közelítő parabola együtthatóit.

2. Adottak a következő táblázatok:

a).

x	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
$f(x)$	2,5	1,2	1,12	2,25	4,28

b).

x	0	10	11	16	21	27	32	37	43	48
$f(x)$	8,4	6,2	5,6	5,1	4,2	3,4	3,1	2,5	2,1	1,9

c).

x	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	4	6	8	10
$f(x)$	9,9	5,1	3,2	2,6	1,9	1,1	0,4	0,43	0,15	0,3

A

$ax + b, \quad be^{ax}, \quad bx^a, \quad ba^x, \quad a + \frac{b}{x}, \quad \frac{1}{ax+b}, \quad \frac{x}{ax+b}, \quad a\ln x + b$

függvények közül válasszuk azt, mely a táblázattal megadott értékeket négyzetesen legjobban közelíti.

3. Egy radioaktív anyag bomlását az

$$y(t) = y(0)e^{-ct}$$

egyenlet írja le, ahol $y(t)$ a t időpillanatbeli anyagmennyiség, $c > 0.$ A T felezési időre az

$$y(T) = \frac{1}{2}y(0)$$

reláció áll fenn. Az anyagra adott a következő táblázat:

t_k	1,5	4,0	6,5	9,0	11,6
y_k	25,9	22,7	20,3	17,7	15,6

számítsuk ki a T felezési időt.

Végeredmények.

6.2. g

α	$k = 0$	$k = 0,1$	$k = 0,2$	$k = 0,3$	$k = 0,4$
$0,5$	$(0,66293;$ $0,61460)$	$(0,79656;$ $0,58427)$	$(0,91099;$ $0,54085)$	$(1,0145;$ $0,49265)$	$(1,1077;$ $0,43962)$
$0,6$	$(0,64621;$ $0,61215)$	$(0,77208;$ $0,56672)$	$(0,87646;$ $0,51918)$	$(0,96799;$ $0,46786)$	$(1,0484;$ $0,41262)$
$0,7$	$(0,63103;$ $0,60053)$	$(0,75057;$ $0,55030)$	$(0,84723;$ $0,49877)$	$(0,93000;$ $0,44417)$	$(1,0013;$ $0,38617)$
$0,8$	$(0,61711;$ $0,58963)$	$(0,72135;$ $0,53484)$	$(0,82180;$ $0,47943)$	$(0,89775;$ $0,42145)$	$(0,96195;$ $0,36036)$
$0,9$	$(0,60428;$ $0,57938)$	$(0,71396;$ $0,52021)$	$(0,79926;$ $0,46102)$	$(0,86964;$ $0,39960)$	$(0,92814;$ $0,33519)$

6.2.h.

α	$k = 0,6$	$k = 0,7$	$k = 0,8$	$k = 0,9$	$k = 1,0$
$1,0$	$(0,27241;$ $0,05822)$	$(0,33256;$ $0,08271)$	$(0,38791;$ $0,10778)$	$(1,43933;$ $0,13289)$	$(0,48748;$ $0,15772)$
$1,1$	$(0,26301;$ $0,13345)$	$(0,32249;$ $0,15332)$	$(0,37727;$ $0,17435)$	$(0,42824;$ $0,19588)$	$(0,47606;$ $0,21752)$
$1,2$	$(0,24614;$ $0,20804)$	$(0,30636;$ $0,22311)$	$(0,36161;$ $0,24007)$	$(0,41291;$ $0,25806)$	$(0,46100;$ $0,27655)$
$1,3$	$(0,22065;$ $0,28401)$	$(0,28346;$ $0,29357)$	$(0,34043;$ $0,30607)$	$(0,39298;$ $0,32030)$	$(0,44203;$ $0,33552)$
$1,4$	$(0,18348;$ $0,364508)$	$(0,25202;$ $0,36669)$	$(0,31258;$ $0,37377)$	$(0,36764;$ $0,38367)$	$(0,41856;$ $0,39527)$