Interpoláció

Adottak $x_0, x_1, \ldots, x_n$ különböző alappontok és a hozzájuk tartozó $y_0, y_1, \ldots, y_n$ függvényértékek. Határozzuk meg azt a függvényt, amelyik az adott pontokban az adott értékeket veszi fel. Ezt az eljárást interpolációnak nevezzük.

Tétel 1 ***(Interpolációs polinom létezése)***
Adottak az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ különböző alappontok és a nekik megfelelő $y_0, y_1, \ldots, y_n$ függvényértékek. Ekkor egyértelműen létezik egy legfeljebb n-ed fokú $p_n(x)$ polinom, melyre

$$p_n(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Lagrange interpoláció

Az interpolációs polinomot az alábbi módon adjuk meg:

$$L_n(x) := \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Vezessük be

$$\omega(x) := \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$$

Ezzel

$$L_n(x) := \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}$$

Az interpoláció hibája:

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x)$$

Hermite interpoláció

Definíció 1 ***(Hermite féle interpolációs polinom)***
Adottak az $x_0, x_1, \ldots, x_m$. Írjunk elő az alappontokban a függvényértékeken kívül bizonyos számú deriváltat is:

$$x_k - ban \quad f(x_k), f'(x_k), \ldots, f^{(N_k - 1)}(x_k) \quad k = 0, \ldots, m$$

Így összesen $N_0 + N_1 + \cdots + N_m$ számú függvényértéket és deriváltat írtunk elő.
Legyen $n := N_0 + N_1 + \cdots + N_m - 1$.
Feladat: Adjuk meg azt a $H_n(x)$ n-edfokú polinomot, amelyre teljesül, hogy:

$$H_n^{(i)}(x_k) = f^{(i)}(x_k) \quad k = 0, \ldots, n \quad i = 0, \ldots, N_k - 1$$

A fenti feltételeknek megfelelő $H_n(x)$ polinomot Hermite féle interpolációs polinomnak nevezzük.

Tétel 2 ***(Hermite féle polinom létezése)***
A fenti feltételeknek megfelelő $H_n(x)$ n-edfokú polinom létezik és egyértelmű.

Megjegyzések:

1. Ha csak függvényértékek adottak (azaz $N_0 = \cdots = N_m = 1$), akkor a Lagrange interpolációs polinomot kapjuk vissza.
2. Ha $k = m = 0$, akkor a Taylor polinomot kapjuk vissza.

Az interpoláció hibája:

$$f(x) - H_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Omega(x)$$

ahol

$$\Omega(x) := \prod_{k=0}^{m} (x - x_k)^{N_k}$$

Spline interpoláció

A klasszikus interpolációt magas fokszámra nem előnyös alkalmazni. Sok esetben előnyösebb a szakaszonként (alacsony) adott fokszámú interpoláció (spline interpoláció) alkalmazása. Ez szakaszonként Hermite típusú interpolációt jelent. Legegyszerűbb a másodfokú, legelterjedtebb a köbös (harmadfokú) spline interpoláció használata.
Jelölje $\mathcal{C}[a, b]$ az $[a, b]$-n folytonos függvények halmazát.

Definíció 2 ***(Köbös interpolációs spline)***
Legyen $f \in \mathcal{C}[a, b]$ adott és $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $f(x_i) = y_i \quad i = 0, \ldots, n$. Az f függvényt interpoláló köbös $S(x)$ spline-t a következő módon definiáljuk:

1. *S szakaszonként harmadfokú polinom, $S_i(x) := S|_{[x_i, x_{i+1}]} \quad i = 0, \ldots, n-1$*
2. *$S(x_i) = y_i$ (Tehát S interpolálja f-et)*
3. *$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) \quad i = 1, \ldots, n-2$ (Folytonosan csatlakoznak)*
4. *$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}) \quad i = 1, \ldots, n-2$ (S-nek nincsenek sarkai)*
5. *$S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1}) \quad i = 1, \ldots, n-2$ (Görbületek egyenlősége)*
6. *Továbbá teljesül még valamelyik a következő peremfeltételek közül:*
   (a) *$S''(a) = S''(b) = 0$ természetes peremfeltételek*
   (b) *$S'(a) = f'(a), \quad S'(b) = f'(b)$ Hermite feltételek*
   (c) *$S'(a) = S'(b), \quad S''(a) = S''(b)$ periodikus feltételek*

Interpoláció használata numerikus integrálásnál

Az eredeti függvény integrálja helyett az interpolációs polinom integrálját lehet használni.

1. Trapézformulánál a függvényt az elsőfokú Lagrange interpolációs polinomjával helyettesítjük.
2. Simpson formulánál a függvényt a másodfokú Lagrange interpolációs polinomjával helyettesítjük.
3. Interpolációs típusú kvadratúraformuláknál
   Legyenek $[a, b]$-ben az alappontok $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ és $f(x)$-et interpoláljuk a Lagrange interpolációs polinommal. Ekkor $f(x) = L_n(f, x) + H_n(f, x)$, ahol $H_n(f, x)$ a hibatag. Ekkor

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(f, x)dx + \int_a^b H_n(f, x)dx$$

   Ha a hibaintegrál kicsi, akkor f integrálja helyett L_n integrálját számolhatjuk.