1. INTERPOLÁCIÓ

Alapfeladat :

Adott $x_0, \ldots, x_n$ különböző alappontokban a hozzájuk tartozó $y_0, \ldots, y_n$ függvényértékek (mérési eredmények). Határozzunk meg olyan függvényt, amelyik az előírt alappontokban az adott függvényértékeket veszi fel! Ezt az eljárást interpolációnak nevezzük.
Az interpoláció fontos szerepet játszik például a numerikus integrálásnál és differenciálegyenletek numerikus megoldásánál is.

INTERPOLÁCIÓ POLINOMOKKAL

Tétel

Legyen adott $x_0, \ldots, x_n$ $(n+1)$ darab különböző alappont és a nekik megfelelő $y_0, \ldots, y_n$ értékek.

Ekkor $\exists !$ olyan legfeljebb n - ed fokú $P_n(x)$ polinom, amelyre teljesül, hogy:

$$P_n(x_i) = y_i\,, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Bizonyítás

Legyen $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ alakú polinom, ahol a_i - k ismeretlen együtthatók.

Figyelembe véve, hogy $P_n(x_i) = y_i$, a következő egyenletrendszert kapjuk az a_i együtthatók meghatározására:

$$a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_n x_i^n = y_i\,, \qquad i = 0, \ldots, n$$

Ennek az egyenletrendszernek a determinánsa az úgynevezett Vandermonde - determináns:

$$\textbf{\textit{(1)}} \qquad \det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)\,, \quad \text{ami nem nulla, mivel} \quad x_i \ne x_j\,, \quad \text{ha} \quad i \ne j.$$

$\Longrightarrow$ az ***(1)*** - nek $\exists !$ megoldása a_i - kre.

■