1.1. LAGRANGE - INTERPOLÁCIÓ

Az interpolációs polinomot megkonstruáljuk.

Definíció :

Lagrange - alappolinomok :

$l_k(x)\ ,\qquad k = 0, \ldots, n$

Legyen

$$\textit{(2)}\qquad l_k(x_i) := \begin{cases} 0 & ,\ \text{ha} \quad i \neq k \\ 1 & ,\ \text{ha} \quad i = k \end{cases}$$

$l_k(x)$ n - edfokú és x_i - k, $i \neq k$ az $l_k(x)$ polinom gyökei.

Így: $l_k(x) = A_k (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)$

ahol az A_k főegyütthatót a *(2)* feltételből kaphatjuk:

$$l_k(x_k) \qquad \Longrightarrow \qquad A_k (x_k - x_0)(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n) = 1$$

$$\Longrightarrow \qquad A_k = \frac{1}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)}$$

$$\text{Így} \quad \Longrightarrow \quad l_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Az $l_k(x)$ - eket Lagrange - féle alappolinomoknak nevezzük.

Az interpolációs polinom Lagrange - féle alakja:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k\, l_k(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Definíció :

Vezessük be a következő $(n+1)$ - edfokú polinomot:

$$\omega(x) := (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_k)(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)$$

Ennek segítségével $L_n(x)$ a következő alakban is írható:

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\,\omega'(x_k)}\,, \qquad l_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\,\omega'(x_k)}}$$

Ugyanis:

$$\omega'(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n) + (x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n) + \dots +$$

$$+ \dots + (x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n) + \dots + (x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

$$\Longrightarrow \qquad \omega'(x_k) = (x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)$$

Legyenek az y_i előírt értékek egy $f(x)$ függvény értékei x_i - ben $(i=0,\dots,n)$.

$$L_n(x_i) = f(x-i)\ , \qquad i=0,\dots,n$$

1.1.1. A Lagrange - interpoláció képlethibája

Becsüljük meg az $L_n(x)$ polinom és $f(x)$ függvény hibáját x_i - ken kívül is!

Tétel

Legyen $f \in C^{n+1}[\,a\,,\,b\,]$, $x_0,\dots,x_n \in [\,a\,,\,b\,]$.

Ekkor $\forall$ $\overline{x} \in [\,a\,,\,b\,]$ - re $\exists$ $\xi \in I[x_0,\dots,x_n,\overline{x}]$, amelyre

(3) $$\boxed{f(\overline{x}) - L_n(\overline{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega(\overline{x})}$$

Bizonyítás

Ha $\overline{x} = x_i$, $i = 0, \dots, n$, akkor triviális, ugyanis mindkét oldal nulla.

Tegyük fel, hogy $\overline{x} \neq x_i$, $i = 0, \dots, n$.

Tekintsük a következő függvényt:

$F(x) := f(x) - L_n(x) - K \cdot \omega(x)$, ahol K állandó (határozatlan).

A K - t adjuk meg úgy, hogy az $F(x)$ függvény az $\overline{x}$ helyen nulla legyen!

Tehát: $F(\overline{x}) = f(\overline{x}) - L_n(\overline{x}) - K \cdot \omega(\overline{x}) = 0$

Innen $\Longrightarrow$ $K = \dfrac{f(\overline{x}) - L_n(\overline{x})}{\omega(\overline{x})}$ *($\star$)*

Vizsgáljuk $F(x)$ - et!

$F(x)$ - nek legalább $(n+2)$ darab gyöke van I - ben: $x_0, \dots, x_n, \overline{x}$

A Rolle - tétel miatt $F'(x)$ - nek legalább $(n+1)$ darab gyöke van, stb.,

$F^{(n+1)}(x)$ - nek létezik legalább egy gyöke, legyen ez a gyök ξ.

Mivel $F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - K(n+1)!$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ $F^{(n+1)}(\xi) = 0$ $\Longrightarrow$ $f^{(n+1)}(\xi) - K(n+1)! = 0$

Rendezve: $\boxed{K = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}$

Ezt *($\star$)* - gal összevetve $\Longrightarrow$ *(3)*

■

Legyen $M := \max\limits_{x \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$.

Ekkor az interpoláció hibájára a következő becslés adható:

(4) $\boxed{|f(x) - L_n(x)| \leq \dfrac{M}{(n+1)!} |\omega(x)|}$ (felső becslés)

Ha $m := \min\limits_{x\in[\,a\,,\,b\,]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$, akkor alsó becslés is adható:

(5) $$\boxed{\frac{m}{(n+1)!}\,|\omega(x)| \le |f(x) - L_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}\,|\omega(x)|}$$

Állítás

E becslések pontosak, ugyanis létezik $f^*(x)$ függvény, amelyre egyenlőségek állnak.

Bizonyítás

Legyen $f^*(x) := \omega(x) \quad\Longrightarrow\quad M = \max\limits_{x\in[\,a\,,\,b\,]} \left|\omega^{(n+1)}(x)\right| = (n+1)! = m$ teljesül.

Így ***(5)*** - ben egyenlőség áll mindkét helyen, mivel az $f^*(x) = \omega(x)$ $(n+1)$ - edfokú polinom n - edfokú $L_n(x)$ Lagrange - interpolációs polinomja $(n+1)$ helyen eltűnik, tehát $L_n(x) \equiv 0$.

■

1.2. ITERÁLT INTERPOLÁCIÓ, AITKEN - NEVILLE ALGORITMUS

A Lagrange - interpoláció esetében a hibataggal a gyakorlati alkalmazások során nehéz dolgozni. Az interpolációs polinom fokszáma sem ismeretes előre, hogy előírt pontosságot elérjünk. Ezért gyakran interpolált értékek egész sorozatát számítjuk ki, ahol minden érték eggyel több alappontra támaszkodó interpolációs polinom helyettesítési értéke. E sorozat értékeinek a menete mutatja, hogy mennyire pontos az interpoláció. De ehhez a Lagrange - interpolációs polinom fenti alakja nem előnyös, ugyanis új alappont hozzáadásakor is minden alappolinomot újra kell számolni. Ezt a hátrányt küszöböli ki az iterált interpoláció.