Tehát $Q_{ij}$ olyan $j$ - edfokú interpolációs polinom, amelyik az $x_{i-j}, x_{i-j+1}, \ldots, x_i$ alappontokra támaszkodik.

Továbbá legyen:

$$Q_{i-1\ j-1} := L_{i-j+1,\ldots,i-1}$$

$$Q_{i\ j-1} := L_{i-j+1,\ldots,i}$$

Így $\Longrightarrow$ $$Q_{ij}(x) = \frac{1}{x_i - x_{i-j}} \begin{vmatrix} Q_{i-1\ j-1}(x) & x_{i-j} - x \\ Q_{i\ j-1}(x) & x_i - x \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} i = 1, \ldots, n \\ j \leq i \end{matrix} \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{Q_{ij}(x) = \frac{(x_i - x)\,Q_{i-1\ j-1}(x) - (x_{i-j} - x)\,Q_{i\ j-1}(x)}{x_i - x_{i-j}}} \qquad \begin{matrix} i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, i \end{matrix}$$

Végeredményül kapjuk, hogy $\boxed{Q_{nn}(x) = L_n(x)}$

**Gyakorlatban :**

Legyen $Q_{i\,0} := y_i \qquad i = 0, \ldots, n$

| | | $j=0$ | $j=1$ | $j=2$ | $j=3$ | $j=4$ | $\cdots$ | $j=n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_0$ | $y_0$ | | | | | | |
| $\uparrow$ | $x_1$ | $y_1$ | $Q_{11}$ | | | | | |
| $i$ | $x_2$ | $y_2$ | $Q_{21}$ | $Q_{22}$ | | | | |
| $\downarrow$ | $x_3$ | $y_3$ | $Q_{31}$ | $Q_{32}$ | $Q_{33}$ | | | |
| | $\vdots$ | | | | | | | |
| | $x_n$ | $y_n$ | $Q_{n1}$ | $Q_{n2}$ | $Q_{n3}$ | $Q_{n4}$ | $\cdots$ | $Q_{nn} = L_n(x)$ |

## 1.3. NEWTON - INTERPOLÁCIÓ

Keressük az interpolációs polinomot a következő alakban:

***(1)*** $$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

és legyenek adottak az $x_0, \ldots, x_n$ alappontok és a hozzájuk tartozó $y_0, \ldots, y_n$ függvényértékek.

Az interpoláció feltétele: $P_n(x_i) = y_i \qquad i = 0, \dots, n \qquad$ ***(2)***

Az ***(1)*** polinom $a_i$ együtthatóit a ***(2)*** interpolációs feltételekből határozhatjuk meg:

$$P_n(x_0) = y_0 \quad \stackrel{(1)}{\Longrightarrow} \quad P_n(x_0) = a_0 \quad \Longrightarrow \quad a_0 = y_0$$

Kell: $P_n(x_1) = y_1$

***(1)*** $\Longrightarrow \quad P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \quad \Longrightarrow \quad y_1 = y_0 + a_1(x_1 - x_0) \quad \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \quad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$P_n(x_2) = y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad y_2 = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad a_2 = \frac{y_2 - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

## Definíció :

Vezessük be az úgynevezett $m$ - edrendű osztott differenciákat:

**1. rendű osztott differencia :**

( $x_0$ , $x_1$ alappontokon támaszkodó 1. rendű osztott differencia)

$$[x_1, x_0] := \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \qquad \text{hasonlóan:} \quad [x_2, x_1] := \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

**2. rendű osztott differencia :**

$$[x_2, x_1, x_0] := \frac{[x_2, x_1] - [x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

**m - edrendű osztott differencia :**

(Két $(m-1)$ - edrendű osztott differencia segítségével definiáljuk.)

$$\boxed{[\,x_m\,,\,\ldots\,,\,x_0\,] := \frac{[\,x_m\,,\,\ldots\,,\,x_1\,] - [\,x_{m-1}\,,\,\ldots\,,\,x_0\,]}{x_m - x_0}}$$

Ez az $x_0,\ldots,x_m$ alappontokra támaszkodó $m$ - edrendű osztott differencia.

Hasonlóan: $x_i, x_{i+1},\ldots,x_{i+m}$ alappontokra támaszkodó $m$ - edrendű osztott differencia:

$$[\,x_{i+m}\,,\,x_{i+m-1}\,,\,\ldots\,,\,x_i\,] = \frac{[\,x_{i+m}\,,\,\ldots\,,\,x_{i+1}\,] - [\,x_{i+m-1}\,,\,\ldots\,,\,x_i\,]}{x_{i+m} - x_i}$$

Így az osztott differenciák segítségével az úgynevezett Newton - féle interpolációs polinom a következő formában írható:

$$\textit{(3)} \qquad \begin{aligned} &N_n(x) = P_n(x) = y_0 + [\,x_1\,,\,x_0\,]\,(x-x_0) + [\,x_2\,,\,x_1\,,\,x_0\,]\,(x-x_0)\,(x-x_1) + \ldots + \\ &+ \ldots + [\,x_n\,,\,\ldots\,,\,x_0\,]\,(x-x_0)\,(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

**A gyakorlatban egy táblázatot készítünk :**

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & [\,x_{i+1}\,,\,x_i\,] & [\,x_{i+2}\,,\,x_{i+1}\,,\,x_i\,] & & \\
x_0 & y_0 & & & & \\
 & & \searrow & & & \\
 & & [\,x_1\,,\,x_0\,] & & & \\
 & & \nearrow & \searrow & & \\
x_1 & y_1 & & [\,x_2\,,\,x_1\,,\,x_0\,] & & \\
 & & \searrow & \nearrow & & \\
 & & [\,x_2\,,\,x_1\,] & & & \\
 & & \nearrow & \searrow & & \\
x_2 & y_2 & & [\,x_3\,,\,x_2\,,\,x_1\,] & & \\
 & & \searrow & \nearrow & \cdots & \searrow \\
 & & [\,x_3\,,\,x_2\,] & & & [\,x_n\,,\,\ldots\,,\,x_0\,] \\
 & & \nearrow & & \cdots & \nearrow \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
 & & \searrow & & & \\
 & & [\,x_{n-1}\,,\,x_{n-2}\,] & & & \\
 & & \nearrow & \searrow & & \\
x_{n-1} & y_{n-1} & & [\,x_n\,,\,x_{n-1}\,,\,x_{n-2}\,] & & \\
 & & \searrow & \nearrow & & \\
 & & [\,x_n\,,\,x_{n-1}\,] & & & \\
 & & \nearrow & & & \\
x_n & y_n & & & &
\end{array}
$$

**Megjegyzés :**

**1.**

A Newton - interpolációs polinom előnye, hogy új alappont hozzávételekor csak egy újabb $(n+1)$-edfokú tagot kell kiszámítani, ellentétben a Lagrange - féle interpolációs polinommal.

**2.**

Ha egy $f(x)$ függvény értékeivel adjuk meg az $x_i$ alappontokbeli függvényértékeket $(y_i = f(x_i))$, akkor az osztott differencia jelölésében szerepeltetjük az $f$ - et: $f[x_n, \ldots, x_0]$

Ekkor:

*(3*)* $$\boxed{N_n(x) = f(x_0) + f[x_1, x_0](x - x_0) + \ldots + f[x_n, \ldots, x_0](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})}$$

Legyen adott az $f$ függvény és $x_i$ $i = 0, \ldots, n$ esetén $f(x_i)$ függvényértékek.

Ekkor a Newton - féle interpolációs polinom alakja: *(3*)*

Vegyük hozzá az alappontokhoz és a függvényértékekhez a következő párt: $\{x, f(x)\}$.

Ekkor *(3*)* $\Longrightarrow$

*(4)* $$N_{n+1}(x) = f(x_0) + f[x_1, x_0](x - x_0) + \ldots + f[x_n, \ldots, x_0](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}) +$$
$$+ f[x, x_n, \ldots, x_0](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n)$$

De $x$ - ben $f(x)$ - et kell, hogy felvegyen: $N_{n+1}(x) = f(x)$

*(4)* $\Longrightarrow$ $$f(x) = f(x_0) + f[x_1, x_0](x - x_0) + \ldots +$$
$$+ \ldots + f[x, x_n, \ldots, x_0](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n)$$

Ha $f \in C^{(n+1)}(I)$ és $x_i \to x_0$ $(i = 1, \ldots, n)$ esetén pedig a *(4)* formula a már jól ismert Taylor - formulát adja!

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

**NEWTON - AZONOSSÁG**, ami tetszőleges $f$ függvényre érvényes.

Vizsgáljuk az interpoláció hibáját:

$$\textit{(4)} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) - N_n(x) = f[\,x\,,\,x_n\,,\,\ldots\,,\,x_0\,]\overbrace{(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)}^{\omega(x)}$$

Tudjuk: $\qquad f(x) - L_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\ldots(x-x_n)$

Így, ha $\quad f \in C^{n+1}[\,a\,,\,b\,] \qquad \Longrightarrow \qquad f[\,x\,,\,x_n\,,\,\ldots\,,\,x_0\,] = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

$(n+1)$ alappontra $\qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{f[\,x_n\,,\,\ldots\,,\,x_0\,] = \dfrac{f^{(n)}(\xi^*)}{n!}}$

**ÁLTALÁNOSÍTOTT KÖZÉPÉRTÉKTÉTEL**

**Speciális eset :**

$$n = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad f[\,x_1\,,\,x_0\,] = \frac{f'(\xi)}{1!} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\xi)$$

**LAGRANGE - FÉLE KÖZÉPÉRTÉKTÉTEL**

## 1.4. HERMITE INTERPOLÁCIÓ

Legyen adott $x_0, \ldots, x_m$ $\quad (m+1)$ darab alappont.

Írjunk elő az alappontokban a függvényértékeken kívül bizonyos számú deriváltat is:

$$x_k \text{ - ban } \; f(x_k)\,,\; f'(x_k)\,,\;\ldots\,,\; f^{(N_k-1)}(x_k) \qquad k = 0, \ldots, m$$

Így összesen $N_0 + N_1 + \ldots + N_m$ függvényértéket és deriváltat írtunk elő.

Legyen $\qquad n := N_0 + \ldots + N_m - 1$