11. BINÁRIS KERESŐFÁK

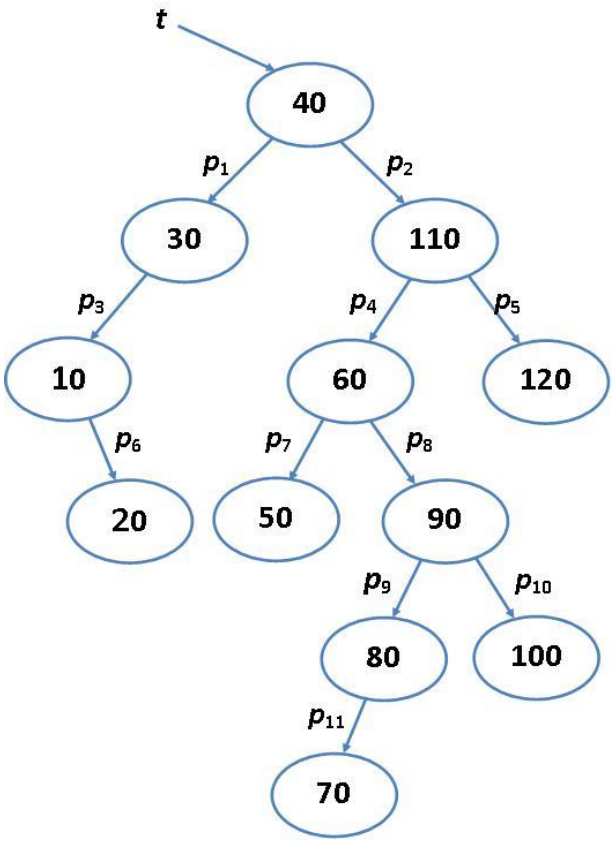
A *bináris keresőfa* a kulcsos adatrekordok tárolásának egyik elsőként kialakult eszköze. Egyszerű tárolási elvet valósít meg: a legelső, a *gyökérben* elhelyezett rekord utáni kulcsokat a „*kisebb balra, nagyobb jobbra*” elv alapján illesztjük be a fába. A *kiegyensúlyozással* kiegészítve a tárolás hatékony adatszerkezetét kapjuk (AVL-fa, piros-fekete fa). A tárolási elvet pedig viszontlátjuk a ma leginkább használatos B-fáknál is.

11.1. A bináris keresőfa és alapvető tulajdonsága

Tekintsük adatrekordoknak azt a sorozatát, amelyben a kulcsok sorrendje a következő:

40, 110, 30, 60, 90, 10, 50, 20, 120, 80, 70, 100.

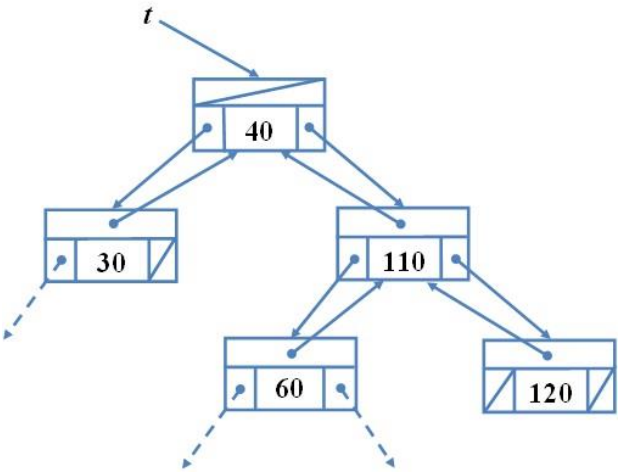
Ezekből az adatokból bináris fát építünk olyan módon, hogy az első elem, a 40-es alkotja a fa *gyökerét*, a további kulcsokat pedig az imént említett „*kisebb balra, nagyobb jobbra*” elv szerint szúrjuk be a keresőfába. A 110-es kulcs a gyökér jobb gyereke lesz, a 30-as pedig a bal gyereke. Ha már terjedelmesebb az épülő fa, akkor az aktuális kulcsnak a helyét a gyökértől indulva általában egy törött-vonal mentén keressük meg. Tekintsük a teljes fát bemutató 11.1. ábrán például a 80-as kulcsértéket, amellyel a gyökértől indulva jobbra-balra-jobbra-balra léptünk ahhoz, hogy el tudjuk helyezni a fában.



11.1. ábra. Bináris keresőfa

Az ábrán látható bináris keresőfa az összes kulcsot tartalmazza. Jegyezzük meg, hogy a kulcsok *más sorrendje* is előállíthatja *ugyanezt* a fát. Ha például megcseréljük a 110-es és a 30-as kulcsok sorrendjét, nem lesz változás a kialakult keresőfában.

Az ábra az *ADS szintű* szemléletnek is megfelel, de a *pointeres reprezentáció* illusztrálására is alkalmas. A bináris keresőfát ugyanis általában *láncolással* valósítjuk meg. Az ábrán látható $t, p_1, \ldots, p_{11}$ változók pointer értékűek, Ezek a bal és jobb *gyerekcsúcsokra* mutatnak, továbbá a fa minden adatelemében helyet kap a *szülőre* mutató pointer is, ahogyan a 11.2. ábrán látható (eredetileg a 7. fejezet, 7.2. ábrája). A szülő-pointereket az előző ábra nem tartalmazza, hogy a rajz könnyebben áttekinthető maradjon. (Eltekintünk az adatrekordoknak a kulcstól különböző mezőitől.)



11.2. ábra. Bináris keresőfa láncolt ábrázolása

Adjuk meg a bináris keresőfa *definícióját*. A felépítés dinamikus szabálya után statikus meghatározást keresünk. A *t* bináris fát pontosan akkor mondjuk egyúttal *bináris keresőfának*, ha *t* bármely *x* csúcsára igaz az, hogy amennyiben *y* az *x* bal oldali részfájának egy csúcsa, illetve ha a *z* pont az *x* jobb oldali részfájának egy csúcsa, akkor

$$kulcs(y) < kulcs(x) < kulcs(z)$$

Az adatfeldolgozásban általában nem engedjük meg *azonos kulcsok* előfordulását. (Vegyük észre, hogy a definíció három univerzális kvantort tartalmaz. A meghatározás így arra az esetre is értelmes, ha az *x* csúcsnak nincsen bal vagy jobb oldali részfája.)

Figyeljünk fel arra, hogy nem lenne elég a fenti egyenlőtlenségeket csupán *szülő-gyerek* viszonylatban megkövetelni, hiszen akkor három szinten belül ellentmondásra juthatnánk a bináris keresőfa felépítésével. (Gondoljuk meg, hogy ha *y* és *z* csak gyerekcsúcsai lennének *x*-nek, akkor az ábrán a p_{11} által mutatott 70-es kulcsértéket például 55-re változtatva, a definíció teljesülne, holott az 55 nem kerülhet a 60-as csúcs jobb oldalára!)

A bináris keresőfa nevezetes tulajdonsága az, hogy *inorder* bejárással a kulcsokat *rendezett* sorozatként érjük el. Ez következik az inorder bejárás azon tulajdonságaiból, hogy

(1) a gyökeret „középen”, a bal oldali és a jobb oldali részfa bejárása között érintjük,
(2) a bal oldali részfa minden kulcsa kisebb, a jobb oldali minden kulcsa nagyobb, mint a gyökérben tárolt kulcs és
(3) mindkét oldali részfát inorder módon járjuk be.

Szemléletünk nem teszi szükségessé, hogy formálisan teljes indukciós bizonyítással lássuk be a bináris keresőfáknak ezt az alapvető tulajdonságát. (Az előbbi indoklás azonban már a bizonyításban alkalmazandó strukturális indukció lényegét tartalmazza.)

Ha *rendezésre* használnánk a bináris keresőfát, akkor abban az alkalmazásban nevezhetnénk *rendezőfának*. Mivel a rendezendő elemek között lehetnek *egyenlők* is, a fenti definícióban ≤ jeleket alkalmaznánk.)

11.2. A bináris keresőfák műveletei

A bináris keresőfára a *keresés*, a *beszúrás* és a *törlés* szokásos műveletei mellet bevezetjük a *legkisebb kulcsérték* megkeresését, valamint az adott kulcsértékre nagyság szerint *rákövetkező* kulcs megkeresésének műveletét is, hogy sorban végig tudjunk menni a kulcsok rendezett sorozatán, az elsőtől az utolsóig.

Az ismertetés során jellemző példákat adunk meg a keresőfa műveleteire, mindig a 11.1. ábrán látható adatszerkezetet véve alapul. Ezen az ábrán a keresőfa *ADS szintű* rajzát láthatjuk. A gyakorlatban a bináris fa *láncolt megvalósítását* használják, amelyet a 7. fejezetben ismertettünk. A műveletek algoritmusait is erre a pointeres reprezentációra adjuk meg, de a jelölésben élünk azzal a (tipográfiai) könnyítéssel, hogy a pointerre utaló → szimbólum helyett az ADS-szinten szokásos zárójeles írásmódot használjuk.

A műveleteknek *egységes* arculatot adunk. Mindegyik *pointer típusú* visszaadott értéket szolgáltat, ami adott esetben a *hiba* jelzésére is alkalmas (NIL pointer). Az eljárások paraméter-listáján mindig szerepel a bináris keresőfa *t* pointere. Ha szerepel további paraméter, akkor az egy eset kivételével szintén *pointer típusú*: vagy a fában mutat egy csúcsban elhelyezett rekordra, vagy a fán kívül összeállított adatrekordot címez. A *kivételes eset* a *keresés* művelete, amely egy kulcsértéket vár bemenő paraméterként.

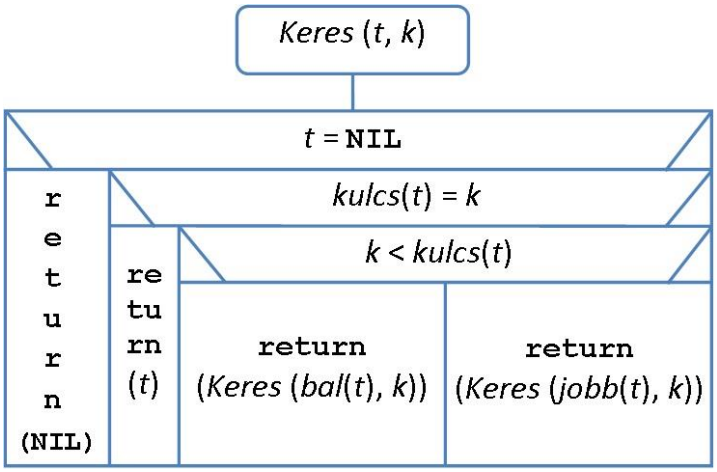
11.2.1. Adott kulcsérték keresése

A bináris keresőfa műveletei között alapvető egy adott *k* kulcsú rekord megkeresése. A *keresés* módja a keresőfa felépítésének elvén alapul. A gyökérnél kezdve összehasonlítjuk a keresett *k* értéket a csúcsban tárolt kulccsal. Ha az aktuális kulcs éppen *megegyezik k*-val, akkor *megtaláltuk* a keresett rekordot. Ha *k kisebb*, mint az aktuális kulcs, akkor *balra* lépve keresünk tovább, fordított esetben pedig a *jobb* oldalon folytatjuk a keresést. Ha olyan kulcsot keresünk, amely *nem található* a fában, akkor az eljárás egy levélcsúcsba található NIL pointeren áll meg. Az adott kulcsérték keresésének algoritmusát kivételesen két változatban is megadjuk, először a bináris fákhoz jól illeszkedő *rekurzív* eljárás formájában (11.3. ábra).

Az eljárás *hívása* a következő értékadással történik:

$$r := Keres(t, k)$$

ahol *t* a bináris keresőfa pointere és *k* a keresendő kulcs. Az eljárás az *r* pointer típusú változónak visszaadja a *k* kulcsú rekord címét, ha ilyet tartalmaz a keresőfa, illetve NIL-t ad vissza ellenkező esetben, ha a *t* nem tartalmazza a *k* kulcsot.

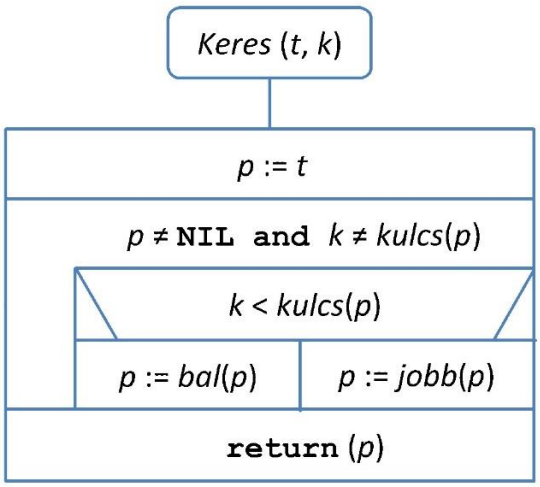


11.3. ábra. A keresés műveletének rekurzív algoritmusa

Példák a 11.1. ábrára való hivatkozással:

(1) $r \coloneqq Keres(t, 90) \Rightarrow r = p_8$
(2) $r \coloneqq Keres(t, 55) \Rightarrow r =$ NIL

A keresés eljárásának *iteratív* változatát a 11.4. ábra tartalmazza. A további műveletek esetén az iteratív változatot részesítjük előnyben.



11.4. ábra. A keresés műveletének iteratív algoritmusa

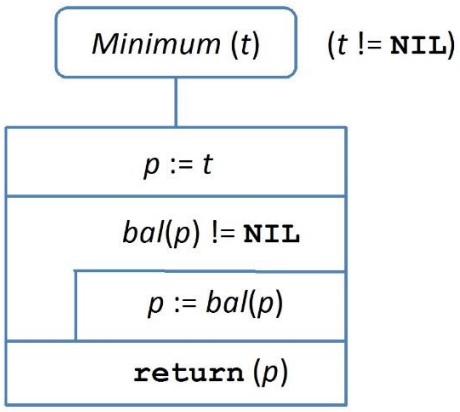
11.2.2. A legkisebb kulcs keresése

Egy *nem üres* bináris keresőfában úgy jutunk el a *minimális kulcsot* tároló csúcshoz, hogy a gyökértől indulva mindig a *bal oldali* pointeren lépünk tovább. Ha már nem vezet tovább balra út, akkor megtaláltuk a legkisebb kulcsot.

Az eljárás *hívása* az

$$r \coloneqq Minimum(t)$$

értékadással történik. Esetünkben az eljárás mindig balra lépve megtalálja a minimális 10-es kulcsértéket, és visszaadja annak pointerét az r változónak, azaz $r = p_3$ lesz. Az algoritmus a 11.5. ábrán adtuk meg.



11.5. ábra. A minimális kulcs megkeresése

Megjegyezzük, hogy a minimális kulcsot tartalmazó csúcsnak lehet jobb oldali gyereke, de abban nagyobb kulcsérték található.

11.2.3. A következő kulcsérték megkeresése

Egy adatokat tároló struktúrában, ha csak lehet, biztosítani kell azt, hogy a rekordokat kulcsaik *növekvő* sorrendjében érjük el. Ehhez szükséges az, hogy ki tudjuk választani a *minimális kulcsú* rekordot. Ezt a műveletet vezettük be az előző pontban. Most a rákövetkező kulcs megkeresésének műveletét adjuk meg.

Ha a bináris keresőfában a *p* pointer adott kulcsú rekordra mutat (és az nem a legnagyobb kulcsérték), akkor a következő kulcsérték megtalálásának két esetét kell észrevennünk. A most következő meggondolások alapján írtuk meg a 11.6. ábrán szereplő algoritmust.

Tekintsük először a 60-as kulcsérték rákövetkezőjének, a 70-es kulcsnak a megkeresését. Az megfelelő művelet meghívása és annak eredménye:

$$(1)\ r := Következő(t, p_4) \ \Rightarrow \ r = p_{11}$$

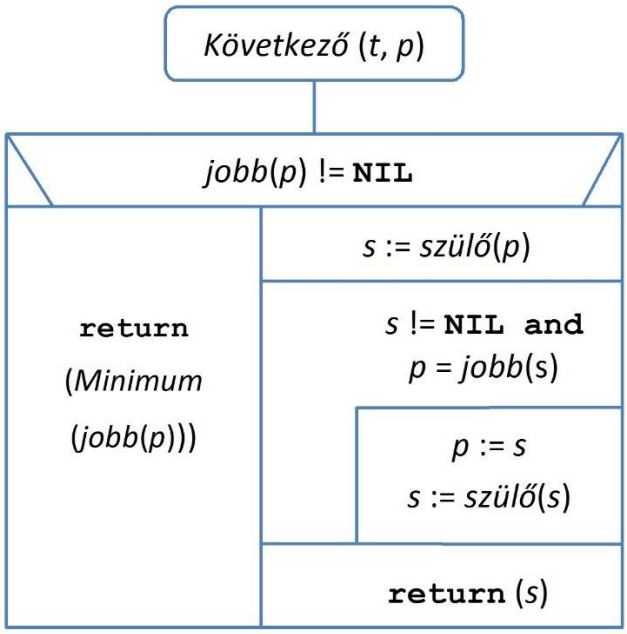
A következő kulcsot úgy találjuk meg, hogy a 60-as kulcsérték *jobb oldali* részfájában, ahol a „közvetlen” nagyobb kulcsokat találjuk, megkeressük a *legkisebb* kulcsot az előzőleg bevezetett *Minimum* művelettel.

Ha a 100-as kulcsérték rákövetkezőjét szeretnénk megkeresni, akkor a következő utasítást adjuk ki:

$$(2)\ r := Következő(t, p_{10}) \quad \Rightarrow \ r = p_2$$

Most ezzel előző stratégiával nem élhetünk, mivel a kulcsnak *nincs* jobb oldali leágazása. Ekkor „*inverz*” szemlélettel azt a pontot keressük meg a fában, amelynek a szóban forgó 100-as kulcs a megelőzője. Annak a csúcsnak a 100-as kulcs a baloldali részfájában a maximális érték, amelyhez a részfában jobb pointerek sorozatán jut el. Ezt a keresési utat kell a 100-as csúcsból indulva *megfordítani*.

Általában, az adott pontból szülő pointereken megyünk addig, amíg azok – a szülőből nézve – jobb gyerekre mutató pointerek (ez a sorozat lehet üres is). Utána még egy lépést kell tennünk felfelé egy szülő pointeren, amely – ismét a szülő csúcshoz viszonyítva – bal gyerekhez vezet.



11.6. ábra. A nagyság szerint következő kulcs megkeresése

A bináris fában található *maximális* kulcsnak *nincs* rákövetkezője. Ilyenkor a keresés, ezzel összhangban, NIL pointert ad vissza:

(3) $r \coloneqq Következő(t, p_5) \quad \Rightarrow \quad r = \text{NIL}$

Ezt az esetet az előző, második programág kezeli azzal, hogy a nulla-hosszúságú „balra fölfelé" vezető út után nem képes egy lépést tenni „jobbra fölfelé".

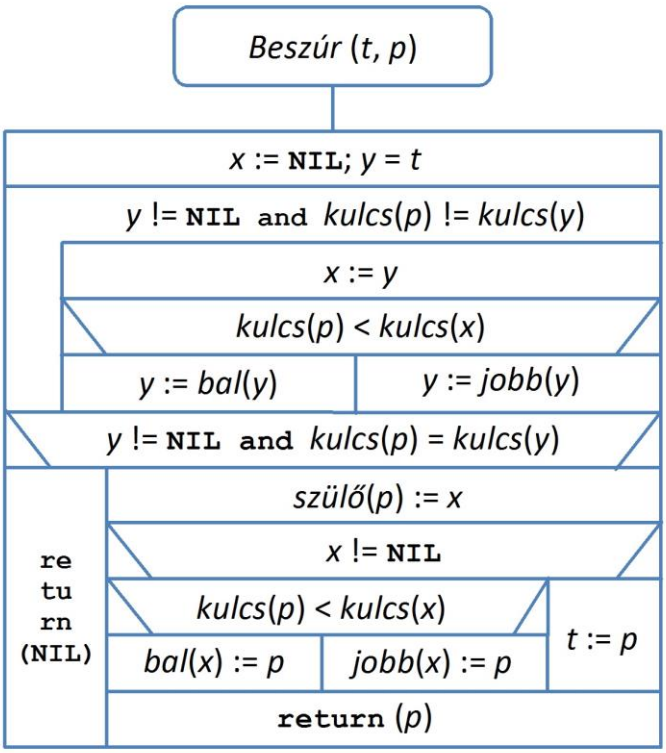
11.2.4. Adott kulcsérték beszúrása

A bináris keresőfába úgy *illeszthetünk be* – csúcs formájában - egy új kulcsos rekordot, hogy összeállítjuk az új tartalmat egy pontosan olyan szerkezetű rekordban, mint amilyen többi rekord. Az új rekord rendelkezik azzal a három pointer mezővel, amellyel a fában mindegyik fel van szerelve; ezek a bal és a jobb gyerekre, valamint a szülőre mutatnak.

Az új rekordra mutató *pointert* „adjuk oda" a beszúrást végző eljárásnak, amely a már többször látott, balra-jobbra összehasonlító és lépegető stratégiával megkeresi az új kulcs helyét és létrehozza a bináris keresőfa egy *új levelét*.

Ha a beillesztendő kulcs különbözik a fa mindegyik kulcsától, akkor *sikeres* lesz az elhelyezés (ezt az jelzi, hogy az eljárás a *p* pointer értékét adja vissza), ha viszont *megegyezik* valamely kulcsértékkel a fában, akkor a *sikertelen* beszúrást a visszaadott NIL érték jelzi.

A beszúró algoritmus működése a 11.7. ábráról olvasható le.



11.7. ábra. Kulcsos rekord beszúrása bináris keresőfába

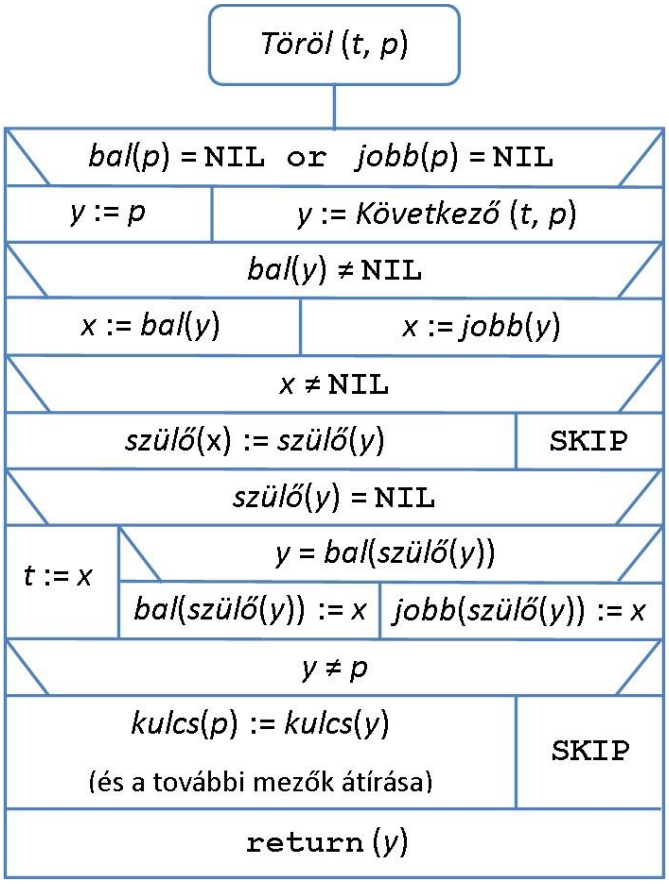
Ha összeállítunk egy olyan új rekordot, amelynek a kulcsa a 45 érték és a *p* pointer mutat a rekordra, akkor a beszúrás hívása és eredménye a következő:

(1) $r \coloneqq Beszúr(t, p) \quad \Rightarrow \quad r = p$

A keresőfába beillesztett új, 45-ös kulcsértékű csúcsot megtaláljuk a 11.9. ábrán.

11.2.5. Adott kulcsérték törlése

Ha a bináris keresőfa adott kulcsú rekordját *törölni* szeretnénk, akkor rá kell állni egy pointerrel ahhoz, hogy a törlés műveletét meghívhassuk. A törlésnek *három esetét* különböztetjük meg, ahogyan ez a 11.8. ábrán elhelyezett algoritmus-leírásban követhető.



11.8. ábra. Adott kulcsérték törlése bináris keresőfából

Az *első esetben* a törlendő elem egy *levél*, tehát nincs sem bal, sem jobb oldali leágazása. Töröljük például a p_{10} pointer által mutatott 100-as kulcsú elemet:

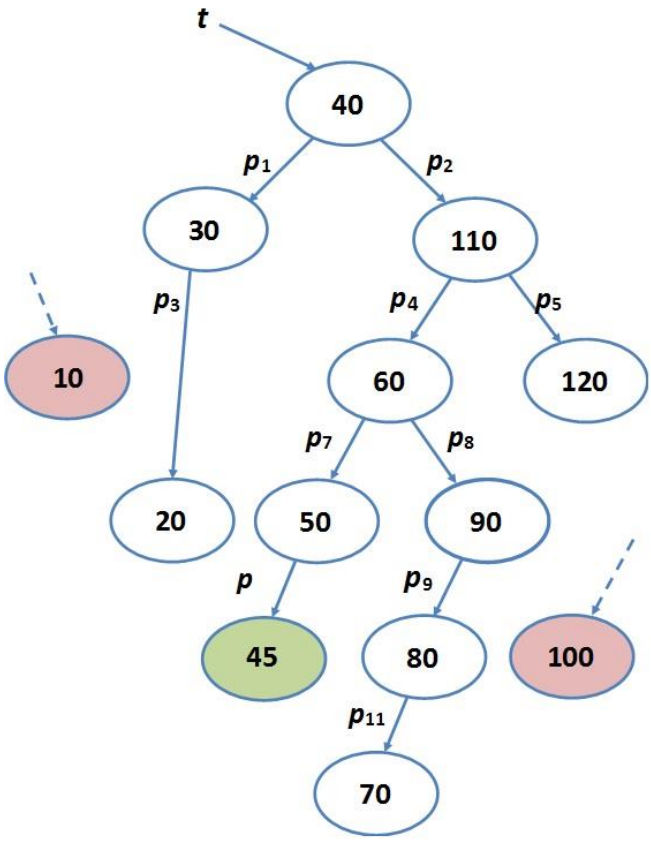
$$(1) \qquad r := Töröl\ (t, p_{10}) \quad \Rightarrow \quad r = p_{10}$$

A törlés ebben az esetben a legegyszerűbb. A törlendő elemet és a szülőjét „szétláncoljuk”, és a fából így eltávolított csúcs pointerét a felhasználó rendelkezésére bocsátjuk. Esetünkben az eljárás a 100 kulcsértékű rekord szülőjének, a 90-es csúcsnak a jobb oldali pointerét NIL-re állítja, a p_{10}-es mutató értékét pedig visszaadja a hívás helyére (lásd: 11.9. ábra).

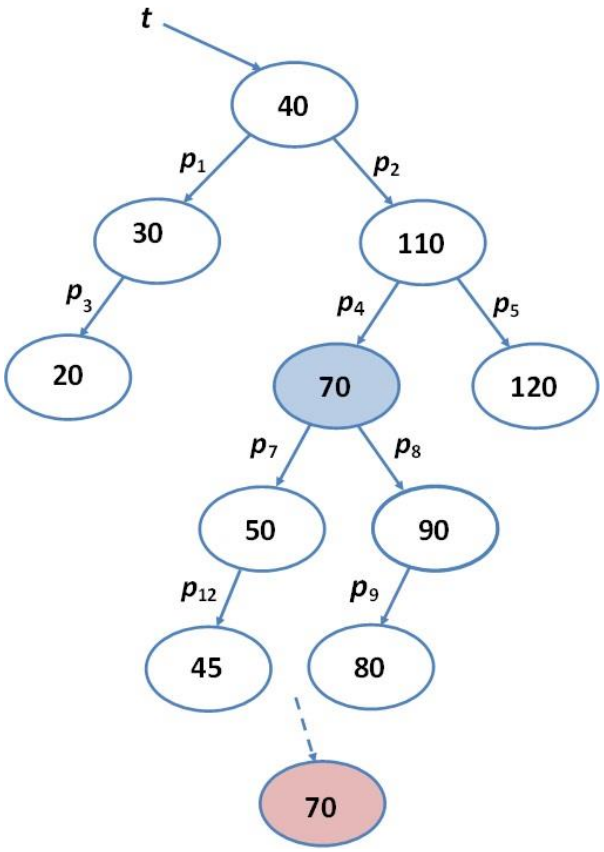
A *második eset* olyan elem törléséről szól, amelynek *egy gyereke* van, azaz egyik oldalon egy részfa kapcsolódik hozzá, de a másik oldala üres. Töröljük például a p_3 pointer által azonosított 10-es kulcsú elemet:

$$(2) \qquad r := Töröl\ (t, p_3) \quad \Rightarrow \quad r = p_3$$

A törlés ebben az esetben sem nehéz. Ezúttal a törlendő elemet nem csak a szülőjétől, hanem gyerekétől is függetlenné tesszük, és a fából így eltávolított csúcs pointerét visszaadjuk a művelet hívásának a helyére. Ezután a törölt elemnek a szülő és gyerek csúcsát még össze kell kapcsolni, hogy ne maradjon szakadás a fában. Esetünkben az eljárás a 10-es kulcsértékű rekord szülőjének, a 30-as csúcsnak a bal oldali pointerét 20-as csúcsra állítja, ennek szülő pointerét pedig a 30-asra, a p_3-as mutató értékét pedig visszaadja (lásd: 11.9. ábra).



11.9. ábra. A bináris keresőfa három művelet (egy beszúrás és két törlés) végrehajtása után



11.10. ábra. A bináris keresőfa az újabb (harmadik) törlés végrehajtása után

A törlés *harmadik esete* egy olyan csúcsra vonatkozik, amely *mindkét oldali* gyerekcsúccsal (részfával) rendelkezik. Olyan megoldást keresünk, amely nem növeli a keresőfa magasságát. A törlésre vonatkozó előírást *logikainak* fogjuk fel, és eltávolítjuk ugyan a megjelölt kulcsú rekordot, de ezt fizikailag egy másik elemet törlésével oldjuk meg.

Megkeressük a törlésre váró elem jobb oldali részfájában a minimális kulcsot és fizikailag azt a csúcsot töröljük, előbb azonban a benne tárolt értékkel felülírjuk a törlésre kijelölt csúcs tartalmát. Azért választjuk ezt a megoldást, mert a fizikailag törölt csúcsnak, mint egy részfa minimumának, nem lehet bal oldali gyereke, így az előzőleg tárgyalt első vagy második típusú törlés alkalmazható rá.

Töröljük például a p4 pointer által mutatott 60-as kulcsot a t keresőfából:

$$(3) \qquad r := Töröl\ (t, p_4) \quad \Rightarrow \quad r = p_{11}\ (!)$$

A 11.10. ábra szemléletesen mutatja be a törlés imént ismertetett módszerét. Láthatjuk azt is, hogy az eljárás által visszaadott mutató érték ebben a harmadik esetben nem a törlésre eredetileg kijelölt rekordra mutat, hanem annak a csúcsnak a pointere, amelyik fizikailag törlésre került.

11.3. A keresőfa műveleteinek hatékonysága

A bináris keresőfa műveleteinek *lépésszámát* összefüggésbe hozzuk a *fa magasságával*. Meggondolásaink arra vezetnek, hogy famagasság nagyságrendben felülről korlátozza a műveletigényt. Eredményünk azt a célt vetíti elénk, hogy előnyös lenne a keresőfát minél inkább „*tömörített*” formában tartani, a műveletek hatékonysága miatt.

A bináris keresőfa *várható magasságára* próbálunk ezután becslést adni. Elméletileg érdekes kérdés, hogy nagyszámú, véletlen jellegű művelet elvégzése után milyen famagasságra számíthatunk. A válasz a gyakorlat számára is értelmezhető.

11.3.1. A műveletek költsége és a keresőfa magassága

Ha sorra áttekintjük azt az öt műveletet, amelyet a bináris keresőfákra bevezettünk, akkor azt láthatjuk, hogy mindegyiknek a lényegi részét *egy útvonal* bejárása adja a fában. Ez az útvonal egy olyan útnak *részét* képezi, amely a fa *gyökerétől* valamely *levélig* terjed. Ennek a befoglaló útvonalnak a hossza attól függ, hogy milyen mélységben található az a levél, amelyben végződik. Minden esetre, a keresőfa magassága *felső korlátját* képezi a teljes útnak, így a szóban forgó művelet úthosszának is.

Ez minden egyes példánkon ellenőrizhető. Nézzük például a 90-es kulcsú rekord megkeresését, vagy a 60-as kulcsérték törlését. Ennek a két műveletnek a végrehajtása során bejárt két út ugyannak a 40 → 70 gyökér-levél útvonalnak a részét képezi.

A *műveletek lépésszáma* lényegében megegyezik a fában bejárt útvonal hosszával, amelyhez még hozzá számítunk néhány (konstans számú) lépést. Azt mondhatjuk tehát, hogy bináris keresőfa mindegyik *op* műveletére érvényes az az állítás, hogy lépésszámát nagyságrendben a fa $h(t)$ magassága felülről korlátozza:

$$T_{op}(n) = O\ (h(t))$$

A bináris fa a magasságának az alsó korlátját a majdnem teljes fa „összenyomott” állapotában veszi fel, a magasság legnagyobb értékét pedig egy láncszerű fa esetén kapjuk. Érvényes a következő összefüggés:

$$\lfloor log_2 n \rfloor \leq h(t) \leq n - 1$$

A két összefüggés alapján a *bináris fa műveleteire* a következőket állíthatjuk az *általános* (tetszőleges egyedi) esetben, valamint a *legkedvezőbb*, illetve a *legkedvezőtlenebb* esetben:

$$T_{op}(n) = O(n), \qquad mT_{op}(n) = O(\log n), \qquad MT_{op}(n) = O(n)$$

A meggondolások és az eredmények alapján kitűzhetjük azt a programot, amelynek a megoldását a következő fejezetek adják. A műveletek hatékonysága érdekében jó lenne a bináris keresőfa *magasságát karbantartani*; ha lehetséges, akkor $\log n$-es nagyságrendben korlátozni.

11.3.2. A véletlen bináris keresőfa felépítésének várható költsége

Az a természetes módon adódó kérdés, hogy nagyszámú véletlen jellegű művelet elvégzése után mennyi lesz a bináris keresőfa várható magassága, túl általános ahhoz, hogy meg tudjuk válaszolni.

A famagasság helyett egy hasonló és könnyen számolható speciális értéket vizsgálunk. A 11.1. ábrán látható *t* fa magassága $h(t) = 5$, míg *átlagos csúcsmagassága* $30/12 = 2{,}5$. Érdemes külön megnevezni azt, hogy a számlálóban szereplő 30-as érték a *t* fa *csúcsmagasság-összege* (a 12 pedig a *t* fa pontjainak a száma, amit általában *n*-nel jelölünk.)

Ha nagyszámú bináris fára számolnánk átlagos csúcsmagasságot, akkor ez *két* átlagszámítást jelentene: egyet magukon a fákon, egyet pedig a fák teljes populációján. Áttekinthetőbb lesz a számítás, ha bevezetjük az *n* pontot tartalmazó bináris fák átlagos (vagy várható) *csúcsmagasság-összegét*, amit $f(n)$-nel jelölünk.

Az *átlagos* csúcsmagasság-összeget a következő módon értelmezhetjük: vegyük az 1, 2, …, *n* kulcsok összes permutációját, mindből építsünk bináris keresőfát és számoljuk ki a csúcsok magasságösszegét is. Végül, képezzük az így meghatározott $n!$ számú érték átlagát; erre vezettük be az $f(n)$ jelölést.

A valószínűségszámítás fogalmaival ez máshogyan is elmondható. Elméletben sorsoljuk ki *véletlenszerűen* egy permutáció1, 2, …, *n* kulcsok összes permutációjából, ha mind *egyformán valószínű*. A magasságösszeg *várható értékét* ekkor egy elméleti kalkulussal számítjuk, és ugyanazt az értéket kapjuk, mintha az összes tényleges esetre átlagolnánk.

Végül, az $f(n)/n$ érték az egyes fákra értelmezhető *átlagos csúcsmagasságok átlaga*, illetve *várható értéke*, az összes $n!$ számú kulcssorozatot alapul véve.

A nagyszámú véletlen művelet helyett egy speciális tevékenység-sorozatot tekintünk: adott *n* számú kulcsértékből *felépítjük* a keresőfát. Ennek során egymás után *n*-szer hajtjuk végre a fába történő *beszúrás* műveletét. A kulcsértékek – az általánosság megsértése nélkül – vehetők az az 1, 2, …, *n* értékeknek.

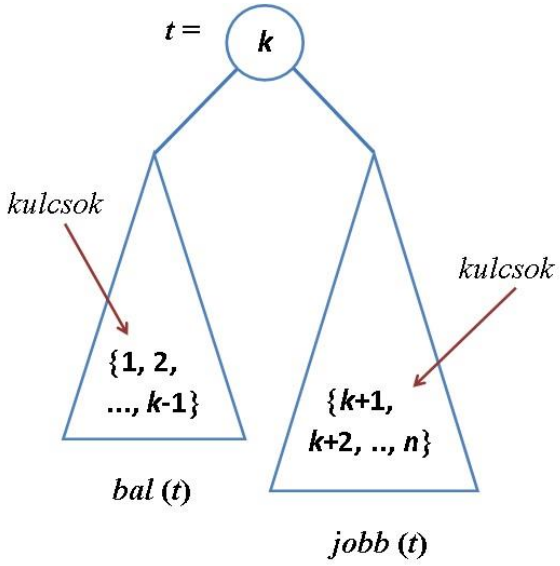
Minden átlagszámítás mögött az adatoknak egy *eloszlása* húzódik meg, amelyet vagy ismernünk kell, vagy valamilyen feltevéssel kell élni arról, gyakorlati átlagot vagy elméleti várható értéket csak így tudunk számolni. Tételezzük fel, hogy az 1, 2, …, *n* kulcsok *minden sorrendje* (permutációja) *egyformán valószínű*!

Ennyi előkészítés után megfogalmazzuk a *feladatot*. Számítsuk ki bináris keresőfa várható $f(n)$ csúcsmagasság-összegét minden olyan t_n fát alapul véve, amelyet az 1, 2, …, *n* kulcsok sorozatából építünk fel. A véletlen sorozat elnevezés egyezményesen a permutáció egyenletes eloszlását jelenti. Ha meghatároztuk a várható csúcsmagasság-összeget, akkor azt *n*-nel osztva az egy fában mért csúcsmagasságok átlagának az $f(n)/n$ várható értékét kapjuk, ami már jellemzi a fa átlagos magasságát is:

$$f(n)/n \sim Ah(t_n)$$

A bináris keresőfa felépítése során egy kulcs beépítése éppen annyi összehasonlítással jár, mint amilyen magasságban végül a megfelelő csúcs a fában elhelyezkedik. Például a $k = 90$ kulcs beszúrása a *t* fába három összehasonlítást igényelt és valóban $h(90) = 3$.

A keresett várható értéket nem egyszerre az összes kulcssorrendre számoljuk, hanem az összes permutációt *n* egyenlő számosságú *részhalmazra* bontjuk. Tekintsük az összes $n!$ számú permutáció közül azokat, amelyekben a k $(1 \leq k \leq n)$ kulcsérték áll az első helyen. Azokat a fákat, amelyek ilyen sorozatokból épülnek fel, általánosan illusztrálja a 11.11. ábra.



11.11. ábra. Véletlen építésű bináris keresőfa átlagos létrehozási költsége

Ha minden ilyen $(n-1)!$ számú kulcssorozatra kiszámítjuk a csúcsmagasság-összeg várható értékét, akkor azok átlagaként kapjuk a keresett $f(n)$ értéket. Jelölje $f(n|k)$ a várható csúcsmagasság-összeget abban az esetben, ha a *k* kulcs érkezik első helyen és így azt a fa gyökerében helyezzük el. Ekkor

$$f(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(n|k)$$

A 11.11. ábra alapján látható, hogy erre a fára az átlagos csúcsmagasság-összeg számításában figyelembe lehet venni azt, hogy a *k*-tól különböző csúcsok melyik oldali részfába kerültek (az $1, 2, \ldots, k-1$ *balra*, a $k+1, \ldots, n$ *jobbra*), miután *egy összehasonlítás* a gyökérrel ezt eldöntötte.

$$f(n|k) = (k-1) + f(k-1) + (n-k) + f(n-k)$$

Helyettesítsük ezt az összefüggést a fenti egyenlőségbe és végezzünk átalakításokat:

$$f(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[(n-1) + f(k-1) + f(n-k)\right] =$$

$$= (n-1) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f(k-1) + f(n-k)\right] =$$

$$= (n-1) + \frac{1}{n}[\underbrace{f(0)}_{0} + f(n-1) + f(1) + f(n-2) + \ldots + f(n-1) + \underbrace{f(0)}_{0}] =$$

$$= (n-1) + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

Végül, a nyilvánvaló $f(1)=0$ összefüggés figyelembe vételével a következő rekurzív egyenletet kapjuk:

$$\begin{cases} f(1)=0 \\ f(n)=(n-1)+\dfrac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k) \end{cases}$$

Azt *állítjuk*, hogy ennek a rekurzív egyenletnek a *megoldására* teljesül a következő *felső becslés*:

$$f(n)\le 2n\ln n \qquad (n\ge 1)$$

A *bizonyítást teljes indukcióval* végezzük.

Az $n=1$ esetben *egyetlen pontból* álló bináris fáról van szó, amelyben a csúcs elhelyezése összehasonlítás nélkül történt, tehát valóban igaz, hogy $f(1)=0$. A bizonyítandó becslés fennáll, mivel $2\ln 1=0$.

(Az $n=2$ esetet már nem kellene ellenőrizni, ám ha engedünk a „kíváncsiságunknak", akkor megnyugtató, hogy $f(2)=1\le 2\ln 2=2*0{,}69=1{,}38$.)

Tegyük fel, hogy igaz a bizonyítandó felső becslés 1, 2, …, $(n-1)$-re. Ekkor

$$f(n)=(n-1)+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(k)\le (n-1)+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} 2k\ln k=$$

$$=(n-1)+\frac{4}{n}\sum_{k=2}^{n-1} k\ln k\le (n-1)+\frac{4}{n}\int_{2}^{n} x\ln x\,dx=$$

$$=(n-1)+\frac{4}{n}\left(\left[\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}\right]_2^n\right)=(n-1)+\frac{4}{n}\frac{n^2}{4}\left[2\ln n-1\right]-\frac{4}{n}\left(\underbrace{2\ln 2-1}_{0{,}3863}\right)\le$$

$$\le 2n\ln n+(n-1)-n-\frac{4}{n}0{,}39<2n\ln n$$

Azt kaptuk, hogy $f(n)<2n\ln n\approx 1{,}3863n\log_2 n$, ami átrendezve az

$$f(n)/n<2\ln n\approx 1{,}39\log_2 n$$

eredményre vezet. A bebizonyított becslést úgy értelmezhetjük, hogy a *véletlen* kulcssorozatból felépített bináris keresőfa *várható* csúcsmagasság-átlaga – kis konstans szorzóval – a $\log n$-es nagyságrendű marad.

A tényleges famagasság átlaga szimulációval becsülhető. Ennek eredményeképpen hasonló állítás fogalmazható meg 2 körüli konstanssal.

Eredményünk nagyon megnyugtatónak tűnik, de csak abban az esetben garantált az, hogy a keresőfa várhatóan „nem nyúlik meg", ha a kulcssorozat *valóban véletlen*, vagyis *egyenletes eloszlásból* származik. Ez a gyakorlati életben egyáltalán *nem garantált*. Gondoljunk arra, hogy mondjuk, egy cég életében az adatok (például napi kereskedelmi adatok) összegyűjtése *adott rendet* követ, így a *véletlenszerűség* biztosan *torzul*. Ezért a bináris keresőfa *karbantartásának* célkitűzését változatlanul érvényesnek tekintjük.