14. HÁROM HAGYOMÁNYOS (NÉGYZETES) RENDEZÉS

Jegyzetünk 19. fejezetben tárgyaljuk azt a sokat által ismert tényt, hogy n tetszőleges elem összehasonlítás alapú rendezése *leggyorsabban* $\Theta(n \log n)$ *összehasonlítással* végezhető el. Bár nagy bemenetre jóval lassabbak, mégis hasznos megismerni az alábbi $\Theta(n^2)$ összehasonlítást használó algoritmusokat. Nagy előnyük az egyszerűségük, ami nem csak a programozó számára jelent könnyebbséget, hanem abban is megnyilvánul, hogy *rövid bemenetre gyorsabb futásidőt* eredményeznek, mint az $\Theta(n \log n)$-es társaik.

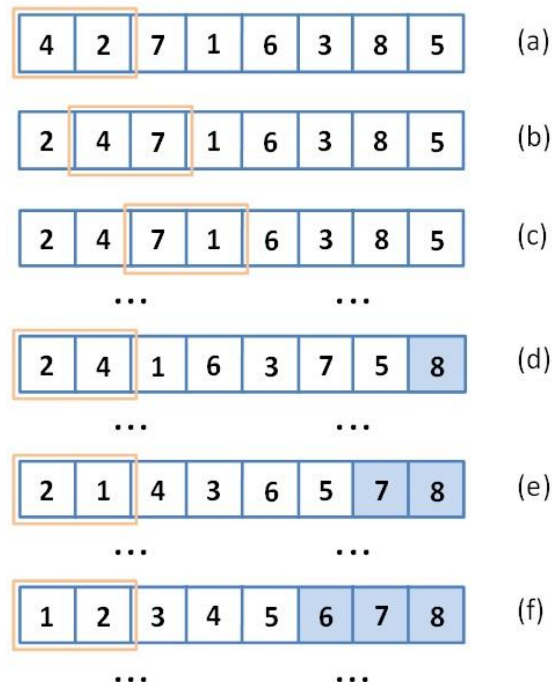
Például, $n = 8$ elem esetén egy $2n^2$lépésszámú algoritmus $2 \cdot 64 = 128$ időegység alatt fut le, míg egy $10 \cdot n \log_2 n$ futásidejű algoritmus $10 \cdot 8 \cdot 3 = 240$ időegység alatt.

Látni fogjuk, hogy sok esetben a *legjobb konstans szorzó* a *beszúró rendezés* esetén érhető el, míg a legkevesebb mozgatásra a maximumkiválasztó rendezésnek van szüksége. A buborékrendezést könnyű érthetősége és elterjedtsége miatt ismertetjük.

14.1. Buborékrendezés

A *buborékrendezés* az egyik legrégebbi ismert rendezés. Lényege az, hogy a maximális elemet cserékkel *„felbuborékoltatjuk”* a tömb végére, és így visszavezetjük a problémát egy 1-el rövidebb rendezési feladatra.

A buborékoltatás úgy működik, hogy párosával (mintha egy két elem szélességű ablakot léptetnénk) haladunk végig az elemeken és a rossz sorrendben lévő párokat *megcseréljük*. Ezt az eljárást a 14.1. ábra szemlélteti.

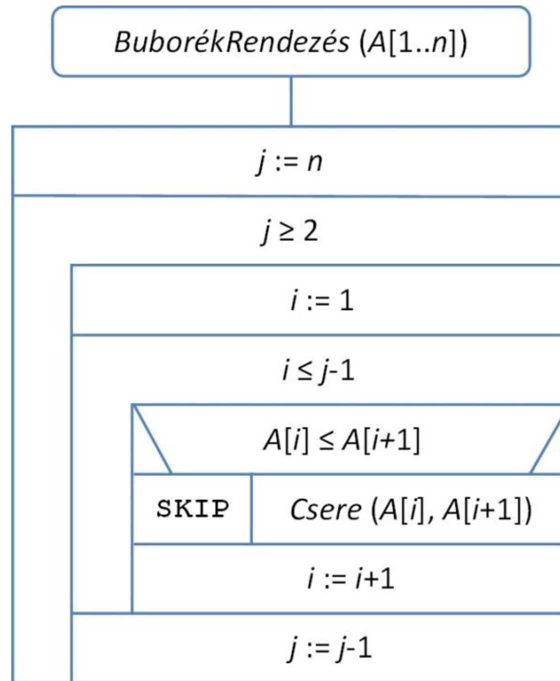


14.1. ábra. A buborékrendezés működése

Belátható, hogy így a legnagyobb elem eljut egészen a tömb végéig. (Ha több maximális elem is van a tömbben, akkor közülük a jobboldali jut el a tömb végére, mert egy egyenlő elempár esetén nem hajtunk végre cserét.) A második felbuborékoltatásnál már a tömb utolsó elemét nem kell figyelembe vennünk, hiszen tudjuk, hogy az jó helyen van.

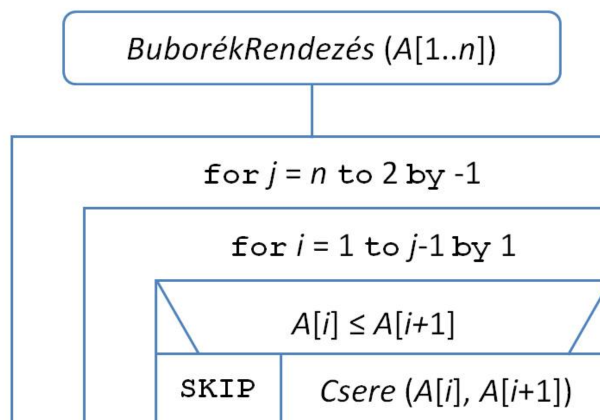
Indukcióval látható, hogy a *k*-adik felbuborékoltatáskor az utolsó *k*-1 elem a tömb jobb szélén helyezkedik el, rendezve.

A rendezés algoritmusa a 14.2. ábrán látható. (A működés leírásában saját ciklusszervezést használtunk.)



14.2. ábra. A buborékrendezés algoritmusa

Ebben a megfogalmazásban az indexek változtatásának a követése elvonhatja a figyelmet a lényegről, ezért tekintsük inkább a **for** ciklusos változatot, amely a 14.3. ábrán szerepel. A **for** ciklus, mint tudjuk, a **by** után megadott mértékben automatikusan növeli a ciklusváltozót minden iteráció végén.



14.3. ábra. A buborékrendezés algoritmusa **for** ciklusokkal

Az algoritmus egy külső és egy belső ciklusból áll. A külső ciklus *j* ciklusváltozója azt jelöli, hogy hányadik elemig rendezetlen még a tömb. Kezdetben természetesen mind az *n* elemet rendezetlennek vesszük, majd „buborékoltatásonként” eggyel rövidebb lesz a rendezetlen rész.

A belső ciklus i változója az aktuálisan vizsgált pár első elemének indexét jelöli. A ciklusmagban azt vizsgáljuk, hogy az i-edik és az i+1-edik elem jó sorrendben van-e, ezért az i változót csak j-1-ig növelhetjük.

A cserét most röviden jelöltük, valójában ez 3 mozgatást jelentene, egy külső változó felhasználásával. Könnyen észrevehetjük, hogy a buborékrendezés szükségtelenül sok mozgatást hajt végre, ezért nagyméretű adatoknál általában nem a legjobb választás.

A *műveletigény* részletes számítása megtalálható az 1. fejezetben. Az elemzést itt is megismételjük. A számolást az egyszerűség kedvéért külön-külön végezzük az összehasonlításokra és a cserékre.

Nézzük először az összehasonlítások $\ddot{O}(n)$-nel jelölt számát. A külső ciklus magja (n–1)-szer hajtódik végre, a belső ciklus ennek megfelelően rendre n–1, n–2, …, 1 iterációt eredményez. Mivel a két szomszédos elem összehasonlítása a belső ciklusnak olyan utasítása, amely mindig végrehajtódik, ezért

$$\ddot{O}(n) = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = n(n-1)/2 = n^2/2 - n/2 = \Theta(n^2)$$

Az összehasonlítások száma ennek megfelelően *négyzetes* nagyságrendű.

Vizsgáljuk meg most a cserék $Cs(n)$-nel jelölt számát. Ez a szám már nem állandó, hanem a bemenő adatok függvénye. Nevezetesen, a cserék száma megegyezik az $A[1..n]$ tömb elemei között fennálló *inverziók* számával:

$$Cs(n) = inv(A).$$

Valóban, minden csere pontosan egy inverziót szüntet meg a két szomszédos elem között, újat viszont nem hoz létre. A rendezett tömbben pedig nincs inverzió. Ha a tömb eleve rendezett, akkor egyetlen cserét sem kell végrehajtani.

A legtöbb cserét akkor kell végrehajtani, ha minden szomszédos elempár inverzióban áll, azaz akkor, ha a tömb éppen fordítva, nagyság szerint csökkenő módon rendezett. Ekkor a cserék *maximális* száma:

$$MCs(n) = n(n-1)/2 = \Theta(n^2).$$

A cserék *átlagos* számának meghatározásához először is feltesszük, hogy a rendezendő számok minden permutációja *egyenlő valószínűséggel* fordul elő. (Az átlagos műveletigény számításához mindig ismerni kell a bemenő adatok valószínűségi eloszlását, vagy legalább is feltételezéssel kell élni arra nézve!) Az általánosság megszorítása nélkül vehetjük úgy, hogy az 1, 2, ..., n számokat kell rendeznünk, ha elfogadjuk azt a szokásos egyszerűsítést, hogy a rendezendő értékek mind különbözők.

A cserék számának átlagát nyilvánvalóan úgy kapjuk, hogy az 1, 2, ..., n elemek minden permutációjának inverziószámát összeadjuk és osztjuk a permutációk számával:

$$ACs(n) = \frac{1}{n!} \sum_{p \in Perm(n)} inv(p),$$

ahol $Perm(n)$ az n elem összes permutációinak halmazát jelöli. Az összeg meghatározásánál nehézségbe ütközünk, ha megpróbáljuk azt megmondani, hogy adott n-re hány olyan permutáció van, amelyben i számú inverzió található ($0 \le i \le n(n-1)/2$). Ehelyett célszerű párosítani a permutációkat úgy, hogy mindegyikkel párba állítjuk az inverzét, például a p = 1423 és a p^R = 3241 alkot egy ilyen párt. Egy ilyen párban az inverziók száma együtt éppen a lehetséges $\binom{n}{2}$-t teszi ki, például $inv(1423) + inv(3241) = 4 + 2 = 6.$

Az állítás igazolására gondoljuk meg, hogy egy permutációban két elem pontosan akkor áll inverzióban, hogy ha az inverz permutációban nincs közöttük inverzió. A mondott párosításnak megfelelően minden két permutáció inverzióinak száma együttesen $\binom{n}{2}$, így az átlagos csereszám:

$$ACs(n) = \frac{\sum inv(p) + \sum inv(p^R)}{2n!} = \frac{n!\binom{n}{2}}{2n!} = \frac{\binom{n}{2}}{2} = \frac{n(n-1)}{4} = \Theta(n^2).$$

A cserék számának *átlaga* tehát a legnagyobb érték fele, de nagyságrendben ez így is n^2-es.

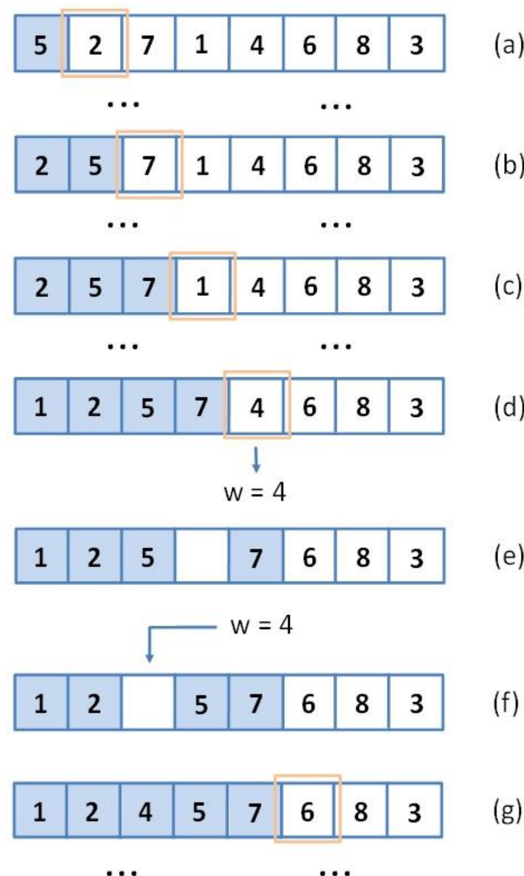
14.2. Beszúró rendezés

A *beszúró rendezés* sok esetben a *leggyorsabb* négyzetes rendezés. Működése hasonló ahhoz, mint amikor lapjainkat rendezzük egy kártyajáték során. A rendezés fő lépése az, hogy az asztalon lévő rendezetlen saját pakliból elvesszük a felső lapot és beszúrjuk a kezünkben tartott rendezett lapok közé. Kezdetben a rendezett rész az első felvett lapból áll, majd *n-1* beszúrás után lapjainkat már rendezett módon tartjuk a kezünkben.

A beszúró rendezés még nem említett előnye az, hogy nem csak tömbben tárolt elemek rendezésére alkalmas, hanem a *láncolt listákra* is könnyen alkalmazható.

14.2.1. Tömbös megvalósítás

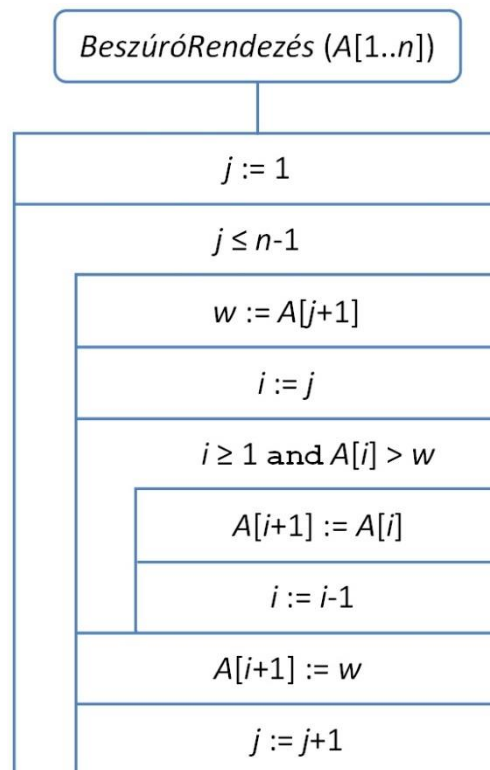
A tömbben tárolt adatok rendezésére alkalmazott beszúró rendezés működését, egy-egy jellemző lépés megjelenítésével a 14.4. ábra szemlélteti.



14.4. ábra. A beszúró rendezés működése tömbös megvalósítás esetén

Tömbös megvalósítás esetén a rendezett részt a tömb elején tároljuk, a rendezetlent pedig utána. Kezdetben csak a tömb első eleme rendezett. Minden iterációban a következőnek beszúrandó elemet elmentjük egy *w* változóba, majd az eddig rendezett rész nála nagyobb elemeit jobbra csúsztatjuk egy pozícióval.

A megfelelő számú léptetés után felszabadul a félretett beszúrandó elem számára a megfelelő hely. Ezután a beszúrandó elemet *w*-ből bemásoljuk a megfelelő helyre. A teljes algoritmus a 14.5. ábrán látható.



14.5. ábra. A beszúró rendezés algoritmusa tömbös megvalósítás esetén

Algoritmusunk egy külső és egy belső ciklusból áll. A külső ciklus beszúrásonként lép egyet, míg a belső ciklus a beszúrás közbeni jobbra másolásokért felelős. A külső ciklus addig halad, amíg minden elemet be nem illesztettünk a helyére, a belső pedig addig, amíg meg nem találtuk az aktuálisan beszúrandó elem helyét.

A külső ciklus mindig n-1 alkalommal fut le, hiszen ennyi elemet kell beszúrnunk a rendezett részbe, ahhoz hogy az egész tömb rendezve legyen.

A belső ciklus műveletigénye változó. Legjobb esetben egyetlen összehasonlítást végez. Ez akkor fordul elő, ha a beszúrandó elem nagyobb vagy egyenlő az összes eddig rendezettnél. Legrosszabb esetben annyiszor hasonlítunk össze, ahány rendezett elem van és ugyanennyi másolást is végrehajtunk. Ez akkor történik, ha a beszúrandó elem kisebb az összes addig rendezettnél.

Összefoglalva, a *műveletigény* a következőképpen alakul:

$$MÖ(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{\big(1 + (n-1)\big)(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \theta(n^2)$$

$$MM(n) = \theta(n^2)$$

A legjobb eset az, ha a tömb eleve rendezet, ekkor elérhető az alábbi minimum:

$$m\ddot{O}(n) = n - 1 = \theta(\mathrm{n})$$

$$mM(n) = 2(n - 1) = \theta(n)$$

Átlagos műveletigényt itt nem számolunk.

Mivel minden beszúrás annyi inverziót szűntet meg, ahány elemet jobbra toltunk, és nem hoz létre új inverziót, ezért könnyen látható, hogy:

$$\ddot{O}(A[1..n]) = inv(A) + n - 1$$

$$M(A[1..n]) = inv(A) + 2(n - 1)$$

Alkalmas megvalósítással elérhető:

$$M(\mathrm{A}[1..n]) = inv(A)$$

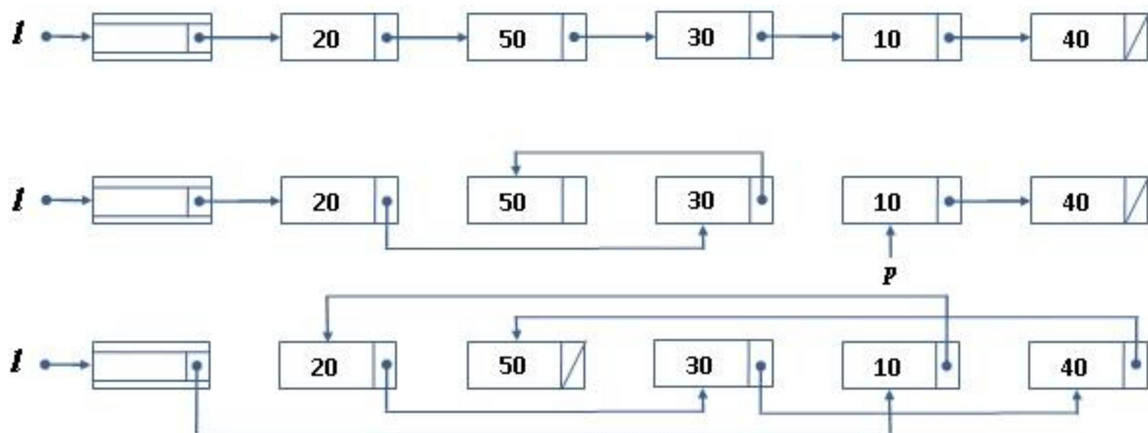
Ez az utolsó tulajdonság különösen gyorssá teszi a beszúró rendezést abban az esetben, ha a tömb eleve „nagyjából rendezett” volt.

Az algoritmus minden esetben gyorsabb a buborékrendezésnél. Azért is, mert egy elemet cserékkel helyretenni körülbelül 3-szor annyi másolást jelent, mint ha jobbra másolásokkal tennénk ezt.

A következő megjegyzés azért lényeges, mert kijelöli ennek a rendezésnek a helyét a többi között. Bár a beszúró rendezés cn^2 idejű, rendkívül alacsony „konstansa” miatt szívesen használják, az oszd meg és uralkodj elvű, $\theta(n \log n)$ futásidejű algoritmusok gyorsítására. Amikor kellően kicsi ($\log n$ méretű) részproblémákra osztják a feladatot, akkor már nem darabolják tovább, hanem a *részeket beszúró rendezéssel* rendezik. A nagyobb részproblémák megoldása az eredeti módon történik. Belátható, hogy így a rendezés $\theta(n \log n)$ futásidejű marad, hiszen legfeljebb $\frac{n}{\log n}\theta(\log^2 n) = \theta(n \log n)$ pluszlépést hajtunk végre emiatt. Valójában azonban a kis konstans miatt így még sokat gyorsul is az algoritmus.

14.2.2. Láncolt megvalósítás

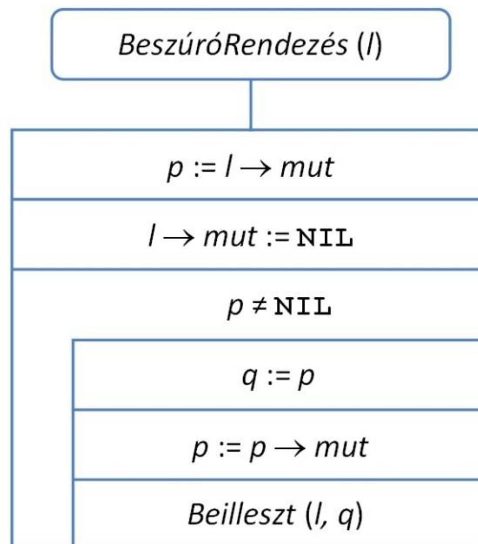
A beszúró rendezés további jó tulajdonsága, hogy *láncolt listára* is viszonylag könnyen megvalósítható. A 14.6. ábra a rendezés három fázisát (kezdő, egy közbülső és befejező állapotát) illusztrálja.



14.6. ábra. A beszúró rendezés működése fejelemes láncolt lista esetén

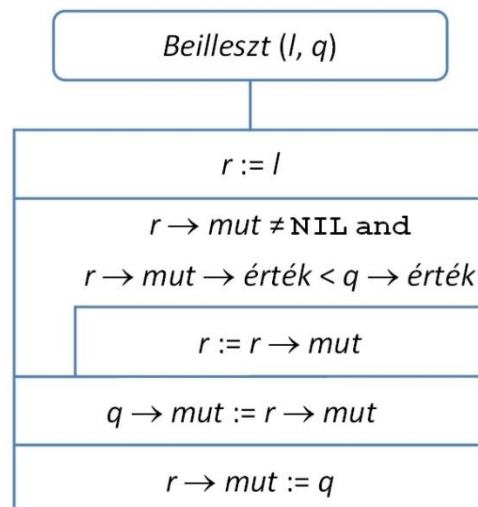
Az algoritmus működése során a lista mindig *két részt* tartalmaz: az első fele már *rendezett*, míg a második felében még az *eredeti* sorrendben következnek az elemek. Úgy célszerű *inicializálni* ezt a helyzetet, hogy a rendezett rész kezdetben legyen az üres lista. Az eljárás *végére* viszont a rendezetlen rész fogy el. Egy közbülső állapot mutat az ábra második, középső listája.

Az algoritmus egy lépésében a második részből kiláncoljuk az első elemet és a rendezett részben befűzzük a helyére. Az algoritmus leírását a 14.7. és 14.8. ábrákon láthatjuk.



15.7. ábra. A beszúró rendezés algoritmusa fejelemes láncolt lista esetén

A listát kezdetben – a fentiek szerint – úgy vágjuk ketté, hogy *l* egy üres fejelemes listára, míg *p* az eredeti elemek fejelem nélküli listájára mutat. Az algoritmus során végig *p* mutat a rendezetlen elemek listájára, míg *l* a már rendezett elemek fejelemes listáját azonosítja. Az algoritmus második része egy ciklus, amely *p*-t lépteti és a *q* által mutatott kiláncolt elemre meghívja a beillesztés eljárását.



14.8. ábra. A rendezettséget megtartó beillesztés algoritmusa fejelemes láncolt listára

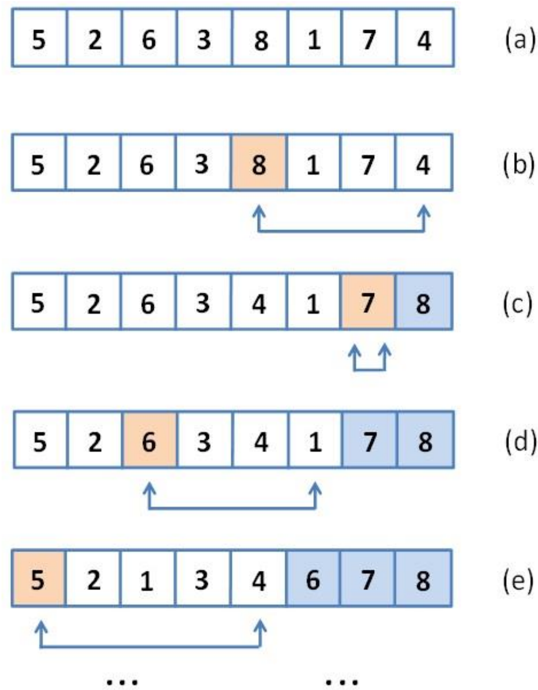
A beillesztés algoritmusa úgy működik, hogy egy *r* mutatóval annyit lép *l* elemein, hogy az utolsó olyan elemre mutasson, amelyben még kisebb érték található, mint a beszúrandó elemben, amelyre a *q* pointer mutat. Ez után a *q* által mutatott listaelemet befűzi az *r* pointerű elem után.

A két megvalósítás között fennáll egy olyan különbség, a láncolt esetben a beszúrást *balról jobbra* hajtjuk végre, nem jobbról balra, mint a tömbös rendezésnél.

A láncolt megvalósítás futásideje közel azonos a tömbös megvalósítás futásidejével, ezért az elemzést nem részletezzük.

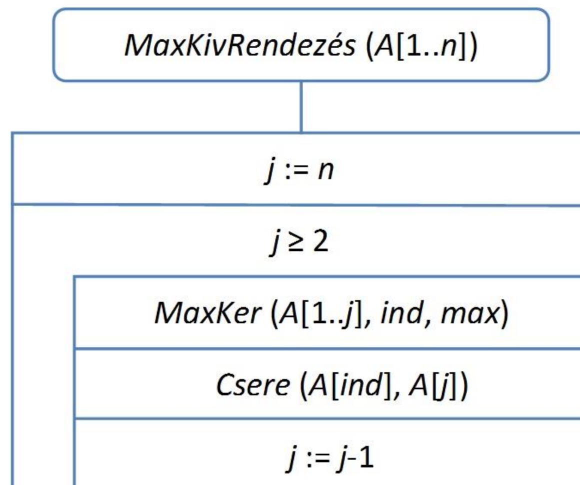
14.3. Maximum kiválasztó rendezés

A *maximum kiválasztó rendezés* alapötlete – hasonlóan a buborékrendezéshez – az, hogy a legnagyobb elemnek a tömb végén van a helye, a rendezés szerint. Ezért *kiválasztjuk* a tömb *maximális elemét*, majd *kicseréljük* az *utolsó* elemével. Ezután már eggyel rövidebb tömbre alkalmazhatjuk a maximum kiválasztást és cserét. Ezt addig ismételjük, míg az egész tömb rendezetté válik. A 14.9. ábrán az eljárás működésnek néhány fázisa látható.



14.9. ábra. A maximum kiválasztó rendezés működése

Az algoritmus, amely leírásában hivatkozik a sokszor használt maximum kiválasztásra, a 14.10. ábrán látható.



14.10. ábra. A maximum kiválasztó rendezés algoritmusa

Az algoritmusban *j*-vel jelöljük a tömb rendezetlen részének hosszát. Ez kezdetben *n*, hiszen még az egész tömb rendezetlen. A ciklus minden lépésében kiválasztjuk a rendezetlen résztömb maximumát és kicseréljük az utolsó elemével. Így a rendezetlen rész *j* hosszát 1-el csökkentettük. Ha a rendezetlen rész hossza 2, akkor az utolsó iterációra kerülhet sor, hiszen egyetlen elem önmagában rendezettnek számít.

Érdekes eset az, amelyet a (c) ábrarész mutat: a maximális elem és a rendezetlen rész jobb szélső eleme ugyanaz, ilyenkor az elemet „önmagával cseréljük meg".

Az algoritmus *futásideje* a következőképp áll elő: Az összehasonlítások száma az *n*-1 maximumkeresés összehasonlítás-számainak összege.

$$\text{Ö}(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} = \Theta(n^2)$$

$$Cs(n) = n - 1$$

Ezek fix értékek minden lehetséges bemenetre. Ez a maximumkiválasztó rendezés egyik hátránya a beszúróval szemben, hogy nem tudja kihasználni a bemenet tulajdonságait, ahhoz, hogy kicsit gyorsabban fusson. Nagy előnye viszont, hogy $3(n-1)$ mozgatást végez, nem pedig $\Theta(n^2)$-et. Ez akkor igazán előnyös, ha az elemek nagy mérete miatt a mozgatás lassabb művelet, mint az összehasonlítás.