22. GRÁFOK ÁBRÁZOLÁSA

A megoldandó feladatok, problémák *modellezése* során sokszor *gráfokat* alkalmazunk. A gráf fogalmát a matematikából ismertnek vehetjük. A modellezés során a gráfok több változata is szóba jöhet.

A különféle *útkeresési* problémák természetes módon vezetnek a gráfokhoz. Ha például Budapesten gyalogosan keresünk legrövidebb utat két pont között, akkor útszakaszokat *irányítatlan* éleknek tekinthetjük, *súlyukat* pedig lényegében az útszakasz hossza adja. Ha autóval szeretnék az utat megtenni, akkor a gráf éleit már *irányítottnak* kell tekintenünk. Szintén irányítás nélküliek az élek, ha néhány helység között szeretnénk *minimális összköltségű vezetékrendszert* létesíteni, valamilyen energiával való ellátás céljából. Az élekhez természetesen a létesítés költségét hozzárendeljük. Arra is tudunk példát mondani, hogy költségmentesek a modellben alkalmazott gráf élei. Ha egy *termék előállításának* egymáshoz illeszkedő, de többfelé ágazó (irányított élekkel ábrázolt) *lépéseit* szeretnénk linearizálni, akkor a költségeknek nincs alapvető szerepe. A *párosítási feladatok* irányítatlan élei is gyakran költség nélküliek.

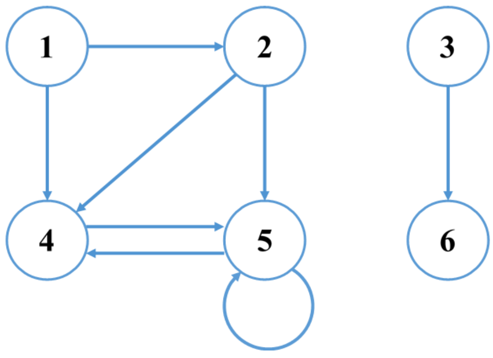
Általánosabb megközelítés szerint bizonyos entitások, absztrakt *objektumok* közötti kapcsolatokat leíró *bináris relációk* (kapcsolatok) szemléletes leírásának egyik eszköze a gráf. A gráfokkal az ember számára könnyen "emészthető" formában lehet ábrázolni a relációk tulajdonságait (például *szimmetria* = irányítatlanság vagy kettő hosszú kör, *reflexivitás* = hurokél). A modell objektumainak megfeleltetjük a *gráf csúcsait*, a közöttük fennálló kapcsolatok leírására pedig a *gráf éleit* használjuk. Mivel egy olyan általános fogalom, mint a bináris reláció modellezésére használjuk, számos probléma megfogalmazható úgy, mint gráfelméleti feladat.

A gráfalgoritmusok című rész fejezeteiben néhány fontos, a gyakorlati életben is gyakran előforduló általános feladatot és a megoldásukra használható algoritmust ismertetünk.

22.1. Alapfogalmak, jelölések

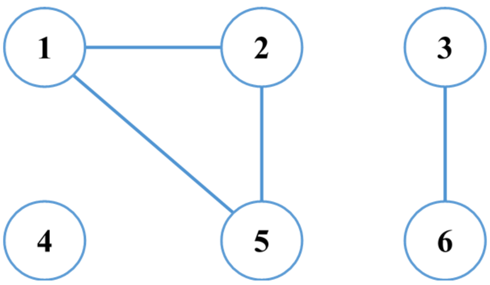
A továbbiakban ismertnek feltételezzük az alapvető gráfelméleti fogalmakat, definíciókat és tételeket. Most nézzünk néhány fontosabb fogalmat kevésbé formálisan, inkább csak a felelevenítés szintjén.

- *Irányított gráf* (lásd: 22.1. ábra): $G = (V, E)$ pár, ahol V a csúcsok véges halmaza (általában $1, 2, \dots, n$), $E \subseteq V \times V$ pedig az élek, vagyis a csúcsokból alkotott rendezett párok halmaza. Egy *él* a gráfban: $e = (u, v) \in E$, ahol $u, v \in V$ *csúcs*ok. Ha $e = (u, u)$, akkor hurokélnek nevezzük. A gráfban a *csúcsok száma* $n = |V|$, az *élek száma* $e = |E|$.



22.1. ábra. Egy irányított gráf hurokéllel

- *Irányítás nélküli gráf*: $G = (V, E)$ pár, ahol V a csúcsok véges, $E \subseteq V \times V$ pedig az élek, vagyis a csúcsokból alkotott rendezetlen párok halmaza. Vagyis, ha $(u, v) \in E$, akkor $(v, u) \in E$ is teljesül, amit $[u, v] \in E$ módon jelölünk.
- *Súlyozott gráf*: $G = (V, E, c)$ hármas, ahol $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ súlyfüggvény, $c(u, v)$ egy adott él súlya.
- *Egyszerű gráf*: olyan gráf, amelyben nincs hurokél, illetve többszörös él.
- *Szomszéd/rákövetkező csúcs*: Legyen $u, v \in V$. A v csúcs az u rákövetkezője, ha létezik $(u, v) \in E$ él. Jelölése: $u \rightarrow v$. Irányítás nélküli gráfban a reláció szimmetrikus.
- *Út*: Legyen $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V$. A $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ sorozat egy k hosszúságú út, ha $\forall i \in [1 \ldots k]: (v_{i-1}, v_i) \in E$. Jelölése: $u \rightsquigarrow v$.
- *Kör*: egy k hosszúságú út kör, ha $v_0 = v_k$.
- *Egyszerű út*: Egy olyan út, amely körmentes, azaz $\forall i \in [1 \ldots k], j \in [i+1 \ldots k]$: $v_i \neq v_j$.
- *Egyszerű kör*: egy olyan kör, amelyben nincs belső kör, azaz egy olyan kör, amelyben $v_1, \ldots, v_k$ páronként különböző csúcsokból áll ($v_0 = v_k$ és $\forall i \in [1 \ldots k-1], j \in [i+1 \ldots k]$: $v_i \neq v_j$).
- *Körmentes gráf*: kört nem tartalmazó gráf.
- *Fokszám*: Irányítás nélküli gráfban egy csúcs fokszáma a csúcsból kiinduló élek száma. Irányított gráf esetén megkülönböztetjük a kimenő élek számát, amely a csúcs *kimenő fokszáma* (*kifok*), illetve a bemenő élek számát, amely a *bemenő fokszáma* (*befok*), a csúcs fokszáma pedig a kettő összege.
- *Összefüggő gráf*: egy irányítás nélküli gráf összefüggő akkor, és csak akkor, ha bármely két csúcs összeköthető úttal. Ekkor a gráf egyetlen *komponens*ből áll (lásd: 22.2. ábra).



22.2. ábra. Egy nem összefüggő gráf három komponenssel ($\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{5}\}, \{\mathbf{4}\}, \{\mathbf{3}, \mathbf{6}\}$)

- *Erősen összefüggő gráf*: Egy irányított gráf erősen összefüggő akkor, és csak akkor, ha bármely két csúcs összeköthető úttal (figyelembe véve az irányítást, tehát $u \rightsquigarrow v$ és $v \rightsquigarrow u$ egyaránt kell, hogy teljesüljön).
- *Teljes gráf*: Egy olyan irányítás nélküli gráf, amelynek bármely két csúcsa szomszédos.
- *Páros gráf*: Egy olyan irányítás nélküli gráf, amelynek csúcsai két diszjunkt halmazra bonthatóak, és él csak a két különböző halmaz csúcsai között mehet, azonos halmazban lévő csúcsokat azonban nem köthet össze.

- *Erdő*: Egy körmentes, irányítás nélküli gráf.
- *Fa*: egy összefüggő, körmentes, irányítás nélküli gráf.

22.2. Gráfok ábrázolása

A gráfok ábrázolására két, a gyakorlatban igen elterjedt adatszerkezetet adunk. Az egyik tisztán aritmetikai ábrázolású (*szomszédsági mátrix*), a másik vegyes, aritmetikai és láncolt ábrázolású (*szomszédsági lista*).

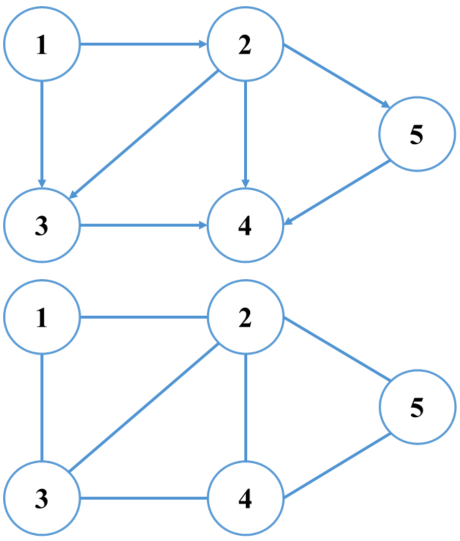
22.2.1. Szomszédsági mátrix

Legyen $G = (V, E)$ véges gráf, és n a csúcsok száma. Ekkor a gráfot egy $n \times n$-es mátrixban ábrázoljuk, ahol az oszlopokat és a sorokat rendre a csúcsokkal indexeljük (ez leggyakrabban $1, \dots, n$). Egy mezőben akkor van 1-es, ha a hozzá tartozó oszlop által meghatározott csúcs szomszédja a sor által meghatározott csúcsnak.

$$C[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{ha } (i,j) \in E \\ 0 & \text{ha } (i,j) \notin E \end{cases}$$

Az ábrázolás eszközeként alkalmazott mátrixot nevezzük *szomszédsági mátrixnak*. (Találkozni lehet még az *adjacencia mátrix*, illetve *csúcsmátrix* elnevezésekkel is.)

Tekintsünk két példát a 22.3. ábrán. Figyeljük meg, hogy az irányítatlan gráf esetén a mátrix szemmetrikus.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

22.3. ábra. Egy irányított és egy irányítatlan gráf szomszédsági mátrixa

Ha *súlyozott* a gráf, akkor az *élsúlyokat* (*élköltségeket*) is el kell tárolni. Ezt is a mátrixon belül oldjuk meg. A súly valós számokat vehet fel. Természetesen adódik, hogy ahol előzőleg 1-est írtunk, azaz létezett az illető él, oda most írjuk be az él költségét.

Két további eset maradt, a mátrix főátlója, és az olyan mezők, amelyek esetén nem létezik él. Vezessük be a végtelen (∞) élsúlyt, és a nem létező élek esetén a mátrix megfelelő helyére írjunk ∞-t. Egy ilyen "élen" csak végtelen nagy költséggel tudunk végighaladni (tehát nem tudunk).

A mátrix főátlójába kerülnének a *hurokélek költségei*, de ilyen értékeket nem alkalmazunk, mivel a továbbiakban a legtöbb gyakorlati probléma leírására alkalmas egyszerű gráfokra korlátozzuk a tárgyalást. Az egyszerű gráfok nem tartalmaznak hurokéleket (valamint többszörös éleket sem).

Élsúlyozott gráf esetén a szomszédsági mátrix kitöltését a következő megállapodás szerint végezzük:

$$C[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{ha } i = j \\ c(i,j) & \text{ha } (i,j) \in E \\ \infty & \text{ha } (i,j) \notin E \end{cases}$$

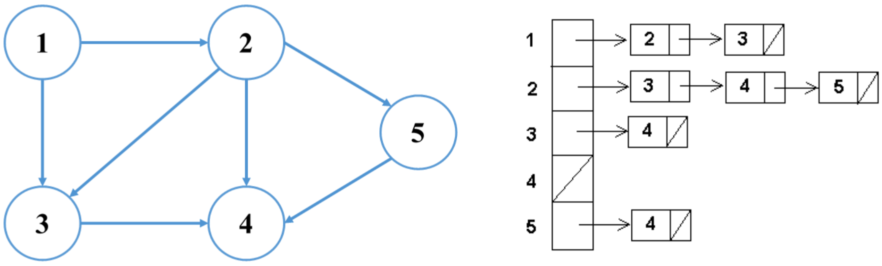
A mátrixos ábrázolás *helyfoglalása* mindig ugyanakkora, független az élek számától, a mátrix méretével n^2-tel arányos. (Az n pontú teljes gráfnak is ekkora a helyfoglalása.) A mátrixos reprezentációt sűrű gráfok esetén érdemes használni, hogy ne legyen túl nagy a helypazarlás.

22.2.2. Éllistás ábrázolás

Ebben a reprezentációban a gráf minden csúcsához egy *listát* rendelünk. Ezen listában tartjuk nyilván az adott csúcsból kimenő éleket.

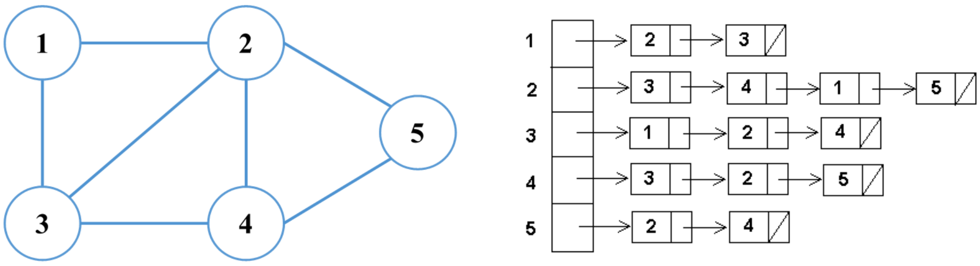
Legyen $G = (V, E)$ véges gráf, és n a csúcsok száma. Vegyünk fel egy mutatókat tartalmazó $Adj[1 \dots n]$ tömböt (a csúcsokkal indexeljük a tömböt). A tömbben lévő mutatók mutatnak az éllistákra (más néven a szomszédsági listákra). Az éllisták lehetnek egy- vagy kétirányú, fejelemes vagy fejelem nélküli listák, ez most nem lényeges a gráf szempontjából.

- Irányított gráf esetén (lásd: 22.4. ábra), az éllisták listaelemei reprezentálják az éleket. Az élnek megfelelő listaelemet abban a listában tároljuk, amelyik csúcsból kiindul az él, és a célcsúcs indexét eltároljuk a listaelemben. Tehát az $(i,j) \in E$ él megvalósítása az i-edik listában egy olyan listaelem, amelyben eltároltuk j-t, mint az él célcsúcsát.



22.4. ábra. Egy irányított gráf éllistás ábrázolása

- Irányítatlan gráf esetén (lásd: 22.5. ábra), egy élnek két listaelemet feleltetünk meg, azaz egy irányított élt egy oda-vissza mutató, irányított élpárral valósítunk meg a korábban említett módon. Élsúlyozott gráf esetén, az él súlyát is a listaelemben fogjuk tárolni.



22.5. ábra. Egy irányítatlan gráf éllistás ábrázolása

Az éllistás ábrázolás *helyfoglalása* irányítatlan gráfok esetén a csúcsok számával (Adj tömb), illetve az élek számával (éllista-elemek száma) arányos. Az elfoglalt memória méretének nagyságrendje $(n + e)$. Irányított gráfok esetén az élek számának duplájával kell számolnunk, így $(n + 2e)$-vel arányos helyfoglaláshoz jutunk.

Mivel a memóriaigény az élek számával arányos, ezért az éllistás ábrázolást ritka, illetve nem-sűrű (mondhatnánk „normál”) gráfok ($e \ll n^2$) esetén szokták használni, ugyanis sűrű gráf esetén a szomszédsági mátrixhoz képest itt jelentkezik a listák láncolásából származó helyfoglalás is, a mutatók tárolása révén.