

28. MÉLYSÉGI BEJÁRÁS

A gráfok két alapvető bejárási módja közül a *mélységi bejárás* ismertetése következik. A másik stratégiát, a szélességi bejárást a 23. fejezetben láttuk. Ott idéztük a *Rónyai-Ivanyos-Szabó* szerzőhármas *Algoritmusok* című könyvében olvasható szemléletes leírást a bejárési stratégiákról, illetve csak az egyikről: arról, amelyik a szélességi bejárást illusztrálja. Most idézzük a könyvből azt a módszert, amely „mélységében” igyekszik a városka lámpáit elérni.

Az irodalmi párhuzam után természetesen szabatosan megfogalmazzuk gráfokra is a feladatot, megadjuk és elemezzük annak megoldó algoritmusát.

28.1. A mélységi bejárás stratégiája

„Az öreg városka girbe-gurba utcáin bolyongó kopott emlékezetű lámpagyújtogató” másik eljárása a köztéri lámpák meggyújtására a mélységi bejárás elvét követi. Megint csak szabadon és tömören idézve a könyv szövegét, a lámpagyújtogató az első, majd a további lámpák felgyújtása után mindig egy olyan utcán indul tovább, amelyikben még nem lát fényt, és elérve a következő sarokhoz, meggyújtja az ott elhelyezett lámpát. Ha egy lámpa alól körülnézve már minden onnan kiinduló utcából fényt lát, akkor visszamegy arra, ahonnan ide érkezett, és onnan egy még meg nem gyújtott lámpa irányába indul. Ha ilyet nem lát, akkor innen is visszamegy a megelőző sarokra. Egy idő után visszaért eredeti kiinduló helyére, és ekkor már minden innen elérhető köztéri lámpa világít.

A leírásból – a stratégia mellett – kiemelünk három további jellemzőt. Míg az másik lámpagyújtogatósi módszer végrehajtásában segítségére volta barátai, addig ezt az eljárást egyedül végezhetette. A „kopott emlékezetének” itt valóban szerep jut, hiszen csak annyit kell megjegyeznie, hogy egy lámpához melyik utcán érkezett. A szöveg utal arra is, hogy a tevékenységét bárhol elkezdheti, nincs olyan meghatározott kiinduló pont, mint a barátokkal együttműködve a főtér volt.

Ha fentről néznénk a várost, ahogy kigyulladnak a lámpák, ezúttal azt látnánk, hogy egy pontból egy útvonal mentén terjed a világosság. Azután ez egy egyenletes ütemű terjedés megáll, és a visszasétálás idejét kivárva, világító lámpák útvonalának egy pontjából újra elindul a lámpagyújtási tevékenység egy útvonalon.

Ez mélységi bejárásnak a szemléletes alapelve, amelyet a fejezet végén elhelyezett 28.11. ábra illusztrál egy (csaknem kisvárosi kiterjedésű) gráfon, néhány pillanatfelvétel formájában.

28.2. A mélységi bejárás szemléltetése

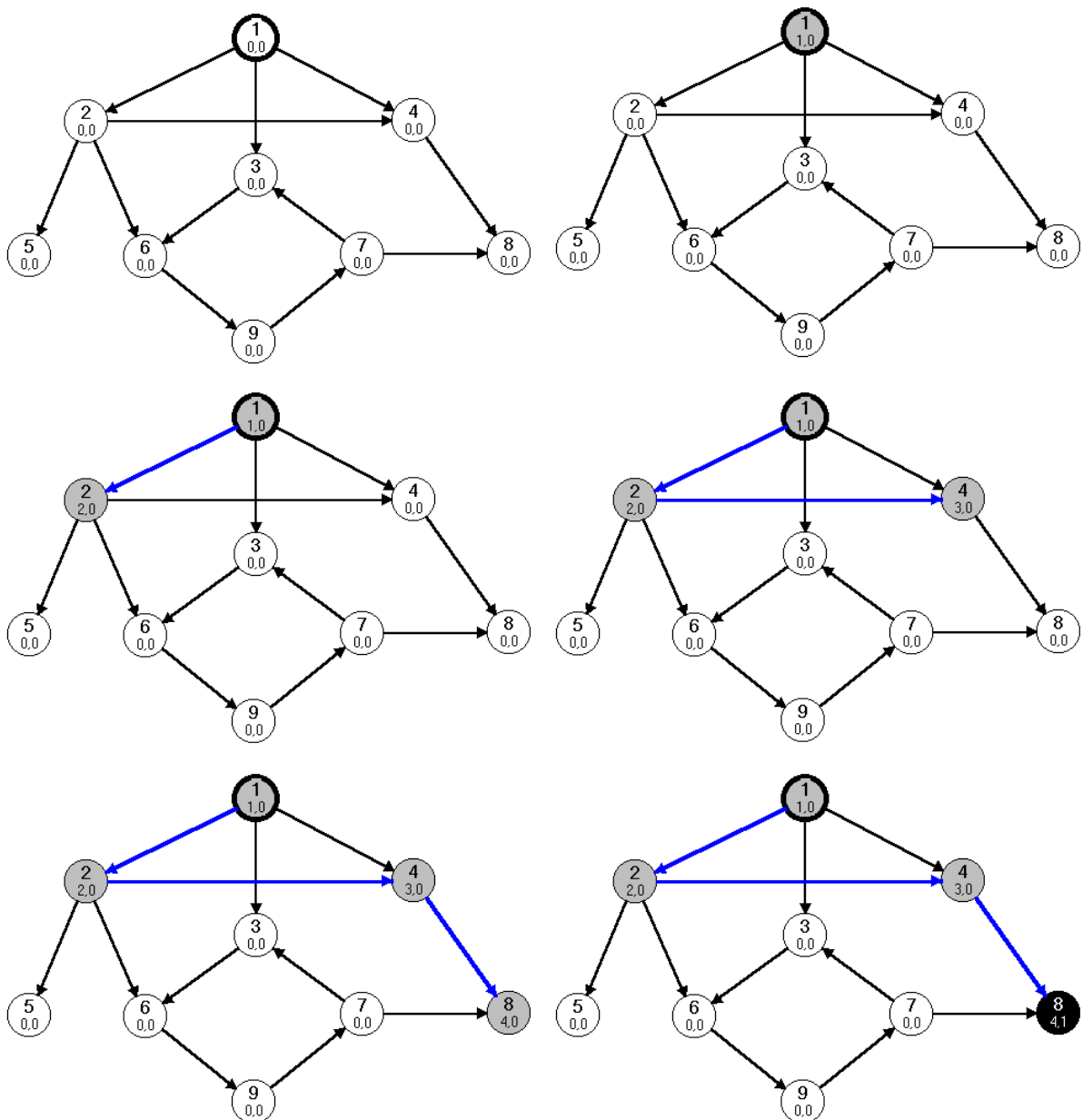
A *mélységi bejárás* kidolgozása felé lépve, megkülönböztetjük a *csúcsok státuszát*. Erre több, szemléletében különböző módszerrel találkozhatunk, amelyek végső ugyanazt a célt érik el. Itt a színezés eszközével élünk és *három színt* használunk. Attól függően színezzük a csúcsokat, hogy az illető csúcsot illetően a bejárás milyen fázisban van.

- Egy csúcs legyen *fehér*, ha még nem jutottunk el hozzá a bejárás során (kezdetben minden csúcs fehér).
- Egy csúcs legyen *szürke*, ha a bejárás során már elértük a csúcsot, de még nem állíthatjuk, hogy az illető csúcsból elérhető összes csúcsot meglátogattuk.
- A csúcs legyen *fekete*, ha azt mondhatjuk, hogy az illető csúcsból elérhető összes csúcsot már meglátogattuk és visszamehetünk (vagy már visszamentünk) az idevezető út megelőző csúcsára

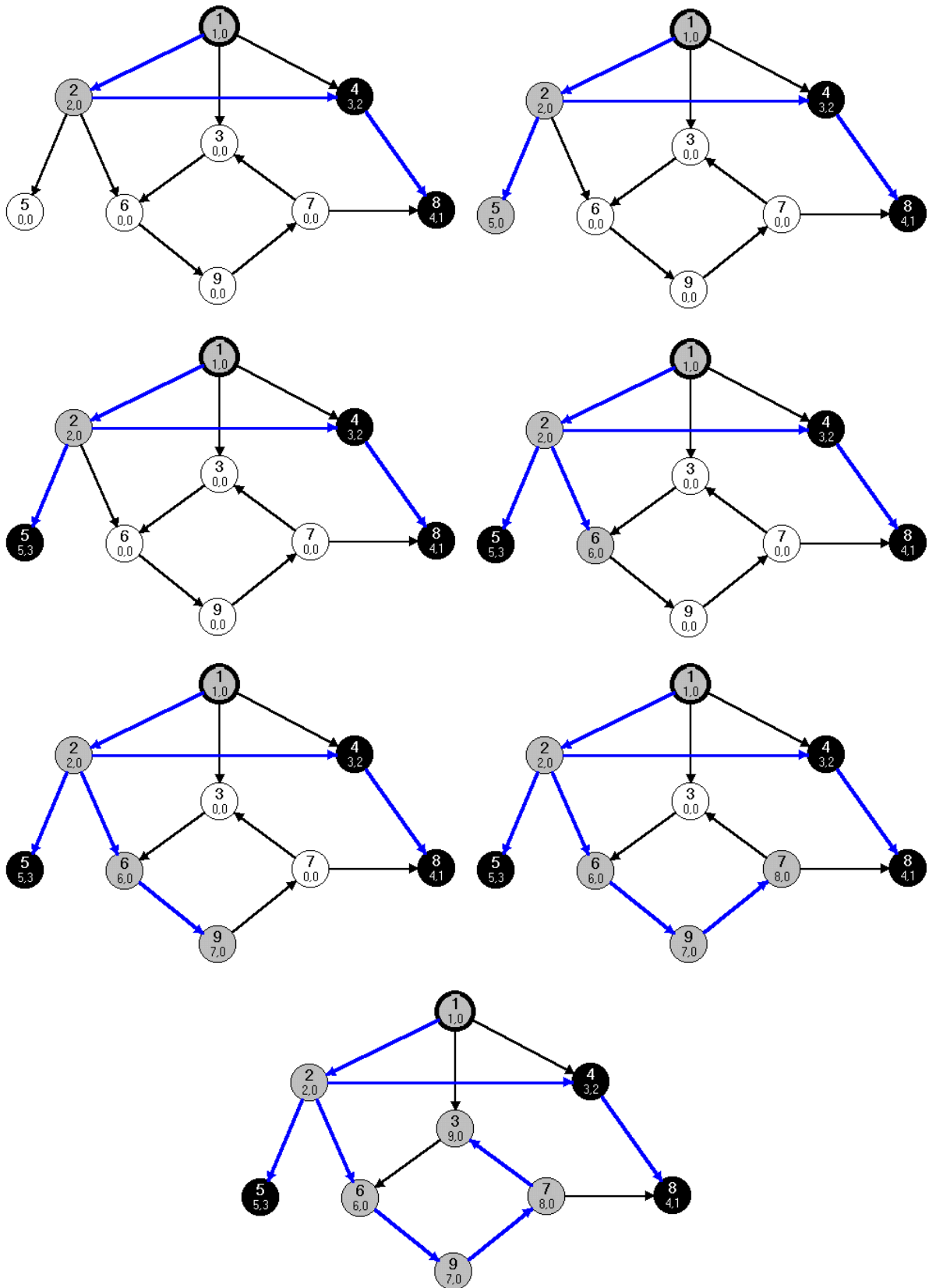
A bejárás során tároljuk el, hogy egy csúcsot hányadikként értünk el, azaz hányadikként lett szürke és tároljuk el azt is, hogy hányadikként fejeztük be a csúcs, és a belőle elérhető csúcsok bejárását, azaz a csúcs hányadikként lett fekete. Az említett számokat nevezzük *mélységi*, illetve *befejezési számnak*, amelyeket az ábrákon a csúcsok címkéi alatt jelenítünk meg. (Alternatív szóhasználat: *belépési*, illetve *kilépési számok*.) Utalunk arra, hogy ezeknek a számoknak lényeges szerep jut majd az élek osztályozásánál.

A 28.1-4. ábrákon egy gráf mélységi bejárását követhetjük végig. (Az ábrasort egyben, szöveges megszakítás nélkül találjuk meg alább.) A példában szereplő gráfon a csúcsokból kimenő élek feldolgozási sorrendje legyen a rákövetkező csúcsok címkéje szerint növekedően, vagyis *alfabetikusan* rendezett (például a láncolt ábrázolásnál az éllista a csúcsok címkéje szerint rendezett).

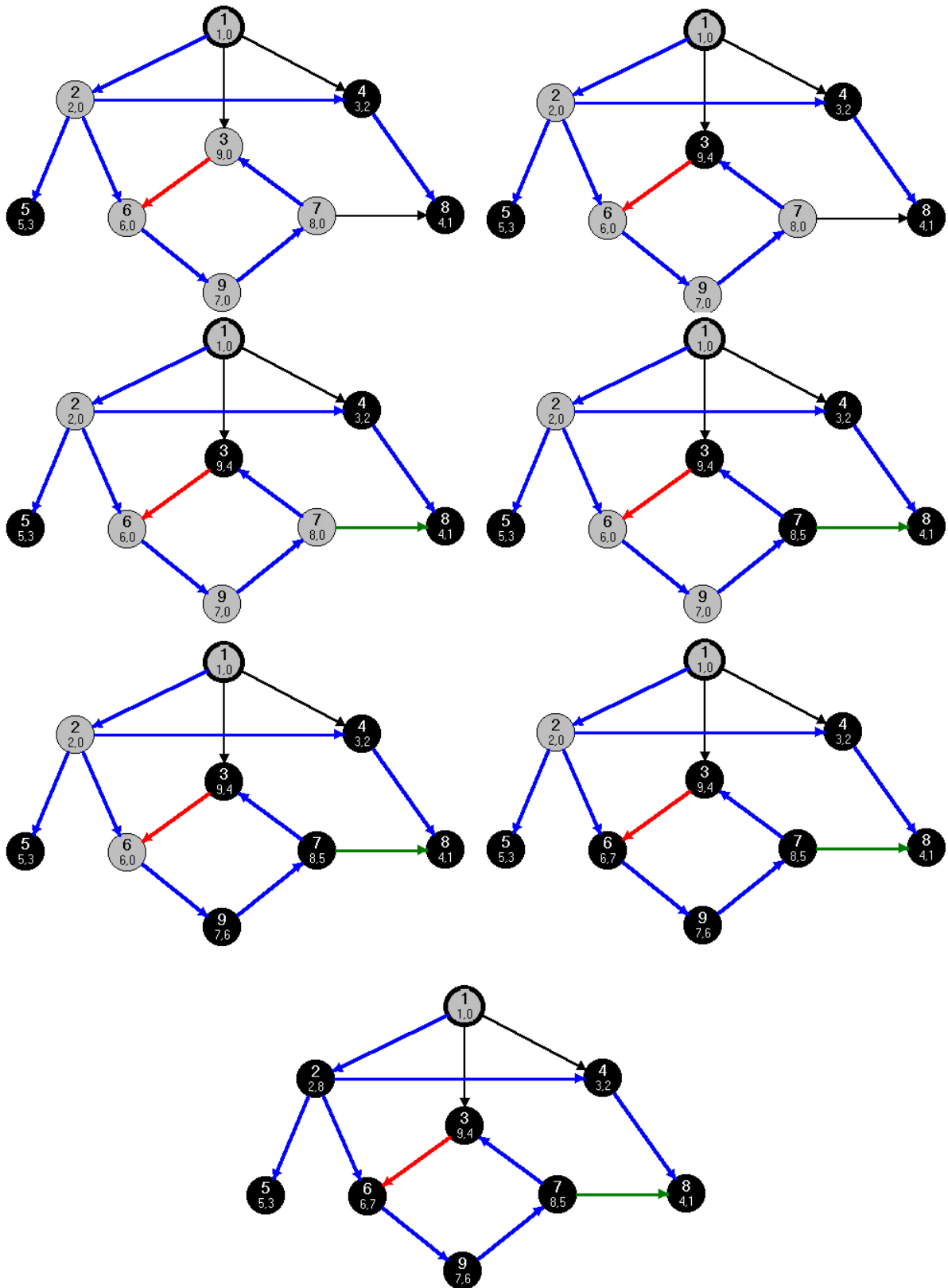
Nézzük a 28.1. ábrát, amelyben a kezdőcsúcs legyen az 1-es csúcs. Legyen kezdetben minden csúcs fehér, és a mélységi és befejezési számuk is legyen az extrémális 0. A kezdőcsúcsot érjük el elsőként, tehát színezzük szürkére, és a mélységi számát állítsuk be 1-re.



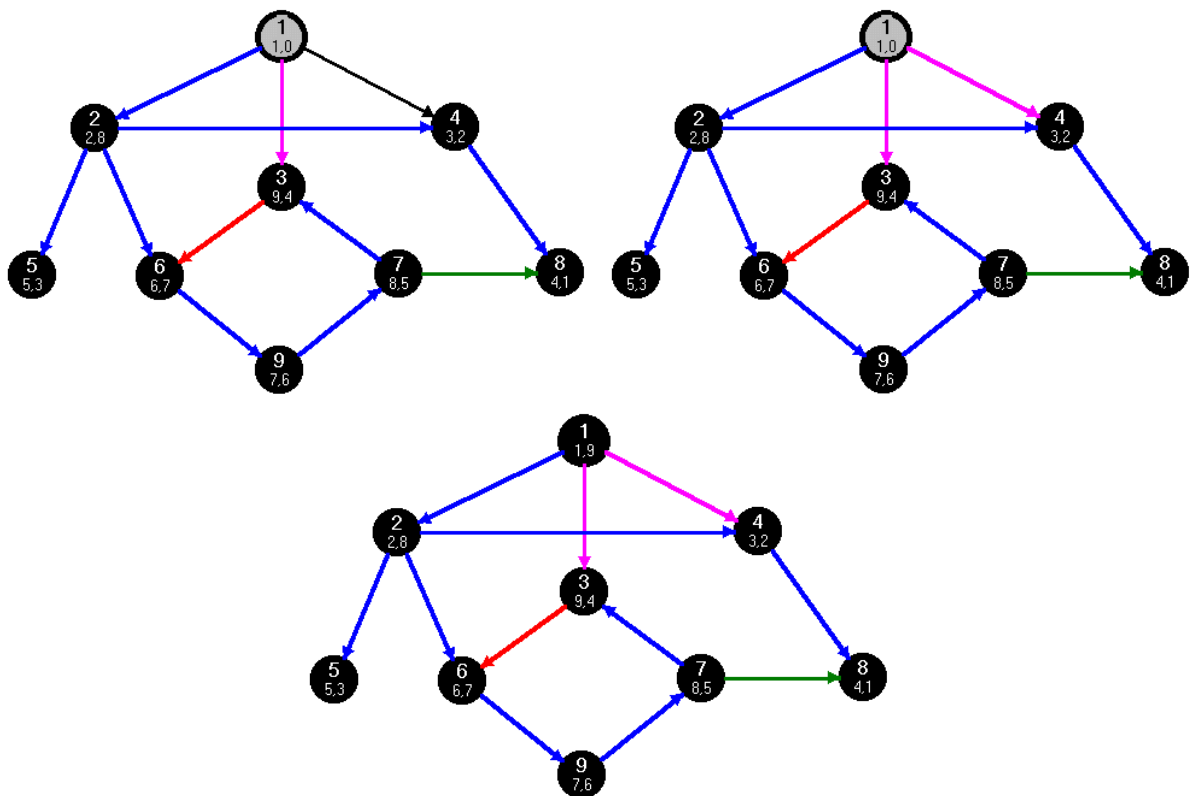
28.1. ábra. A mélységi bejárás végrehajtása az első visszalépésig



28.2. ábra. A további csúcsok feltérképezése a bejárás során



28.3. ábra. A visszalépések végrehajtása a kiinduló csúcsig



28.4. ábra. A mélységi bejárás végső lépései

Az 1-es csúcsból három él vezet ki, de a kikötöttük, hogy az élek feldolgozási sorrendje legyen a szomszéd csúcsok címkéje szerint növekedően rendezett. Ekkor a 2-es csúcsot érjük el másodikként. Ezután harmadikként a 4-es csúcs, majd negyedikként a 8-as csúcs következik. Mivel a 8-as csúcsnak egyáltalán nincs szomszédja, bejárását befejeztük és a csúcsot fekete színezzük. Mivel a bejárás során a 8-as csúcs lett elsőként fekete, a befejezési száma 1-es lesz.

A bejárás során eddig megtett utunk $\langle 1, 2, 4, 8 \rangle$. Most menjünk vissza az utolsó előtti 4-es csúcsra (lásd: 28.2. ábra). Mivel a 4-es csúcsnak sincs meg nem látogatott szomszédja, így ennek csúcs bejárását is befejeztük; színezzük a csúcsot fekete, és a bejárési számát állítsuk 2-re. Menjünk vissza a 2-es csúcsához. A 2-es csúcsnak két olyan szomszédja is van, amelyet még nem látogattunk meg. Lépünk a kisebb címkéjű csúcsba. Az 5-ös csúcs bejárását harmadikként fejezzük be. A 2-es csúcsból a bejárást a 6-os csúcs irányába folytatjuk. Tovább haladva, hetediként elérjük a 9-es csúcsot (lásd: 28.2. ábra). Nyolcadikként következik a 7-es csúcs. Mivel a 3-as csúcs még fehér, azt érjük el kilencedikként

A 3-as csúcsból a 6-os csúcsba vezet él, azonban a 6-os csúcsot már bejártuk, a színe már nem fehér, erre már nem folytatjuk a bejárást. Mivel a 3-as csúcsból már nem vezet él fehér csúcsba, így a 3-as csúcs bejárását is befejeztük (lásd: 28.3. ábra). Visszamegyünk a 7-es csúcsba, ahol a sorrendben következő él, a $(7,8)$ mentén látjuk, hogy a 8-as csúcs színe már fekete. Mivel a 7-es csúcsnak nincs fehér szomszédja, így ötödikként befejeztük a bejárását. A 9-es csúcsnak a bejárását is befejeztük. Az úton ismét egy csúccsal visszamegyünk és befejezzük a 6-os csúcsot is. A 2-es csúcsra lépve, látható, hogy minden kimenő éle mentén már próbálkoztunk, így nyolcadikként azt is elhagyjuk.

Az 1-es csúcsra lépve megvizsgáljuk a 3-as csúcsot, amely már bejárt csúcs. Ezután az előzőhöz hasonlóan még megvizsgáljuk a maradék $(1,4)$ él mentén a 4-es csúcsot, de annak színe sem fehér. Az 1-esből kimenő összes él mentén megvizsgáltuk a továbblépési lehetőségeket, így az 1-es csúcsot utolsóként elhagyva befejeztük a bejárást.

28.3. A mélységi bejárás algoritmus

Legyen $G = (V, E)$ irányított vagy irányítatlan véges gráf, ahol $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Továbbá, definiáljuk az alábbi tömböket:

- $szín[1 \dots n]$: az ADS szintű *színezés* megvalósítására;
- $mszám[1 \dots n]$ és $bszám[1 \dots n]$: az ADS szinten említett *mélységi és befejezési számok* nyilvántartására;
- $P[1 \dots n]$: a bejárás során, egy csúc *megelőző* csúcsának a nyilvántartására (a korábban látottakhoz hasonlóan, lásd például: szélességi bejárás vagy Dijkstra-algoritmus).

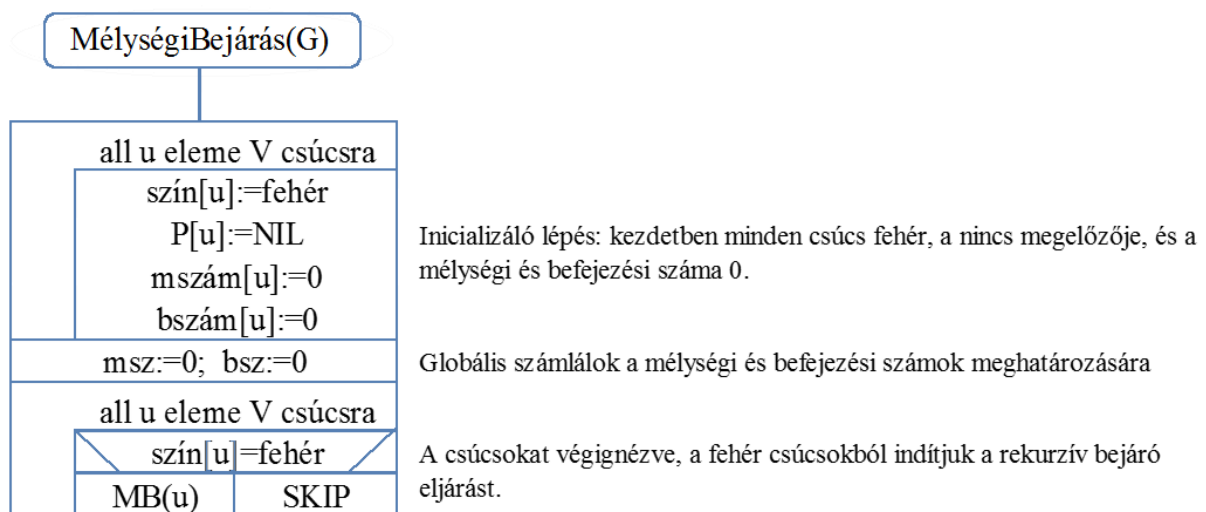
Az előző példában úgy kezdtük a bejárást, hogy kijelöltünk egy kezdőcsúcsot, amelyből kiindulva történetesen az összes csúc elérhető volt mélységi bejárással. Egy másik példában előfordulhatna, hogy lennének olyan csúcsok, amelyeket egyáltalán nem tudnánk elérni egy kiválasztott startcsúcsból. A későbbi alkalmazások érdekében a mélységi bejárást úgy definiáljuk, hogy az a gráf *minden pontjához* eljusson.

Az algoritmus működésének nem feltétele egy *kezdőcsúc* megadása, azt az eljárás keretében magunk *tetszőlegesen* választjuk meg, kívülről nézve véletlen jelleggel. Miután minden, ebből elérhető csúcsot bejártunk, visszajutottunk az említett kezdőpontba. Ha maradt olyan csúc, amelyet a bejárás nem ért el, azaz színe fehér maradt, akkor választunk közülük egy következőt és abból kiindulva újra elvégezzük a mélységi bejárást.

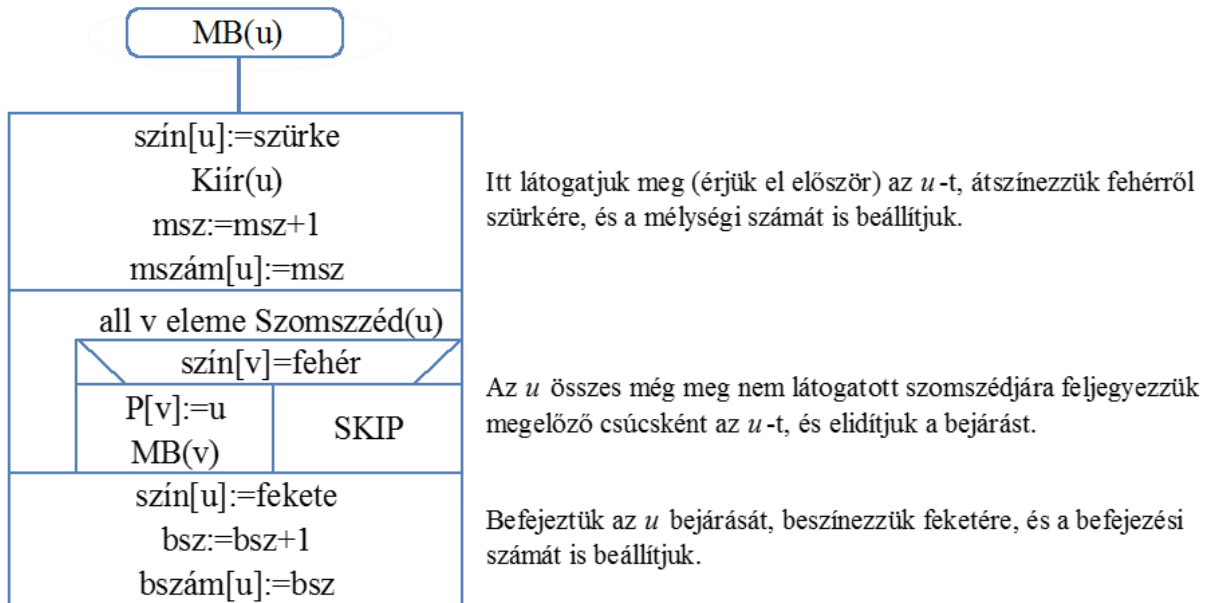
Ezt az eljárást *addig folytatjuk*, amíg van fehér csúcsunk. Nyilván minden ilyen menetben legalább egy csúcsot átszínezzük feketére, tehát véges számú menet után elfognak a fehér csúcsok. Elegendő a csúcsok halmazán egyszer végigmenni (a gyakorlatban a csúcsok címkéje szerinti növekedően), és ha egy csúc színe fehér, akkor onnan indítunk egy bejárást.

Tehát az algoritmust bontsuk két részre, vagy inkább *két szintre*. Az egyik szintet az a rekurzív „belső” algoritmus valósítja meg (lásd: 28.6. ábra), amely egy megadott kezdőcsúcsból indítja a bejárást, ez lesz az $MB(u)$ eljárás. A másik, „külső” algoritmus, (lásd: 28.5. ábra) végigveszi a gráf pontjait, és minden fehér csúcsra elindítja az előbbi eljárást.

Az pontból induló $MB(u)$ mélységi bejárásra egyszerű rekurzív definíciót adni, amely szerint az u csúcsot pontosan akkor jártuk be, ha az összes szomszédját bejártuk. Ennek alapján az $MB(u)$ eljárást rekurzív formában adjuk meg. A *rekurzív* eljárás önmagát hívja meg egy csúc szomszédjaira, azzal a „kijáráttal”, hogy csak fehér színű csúc esetén történik hívás.



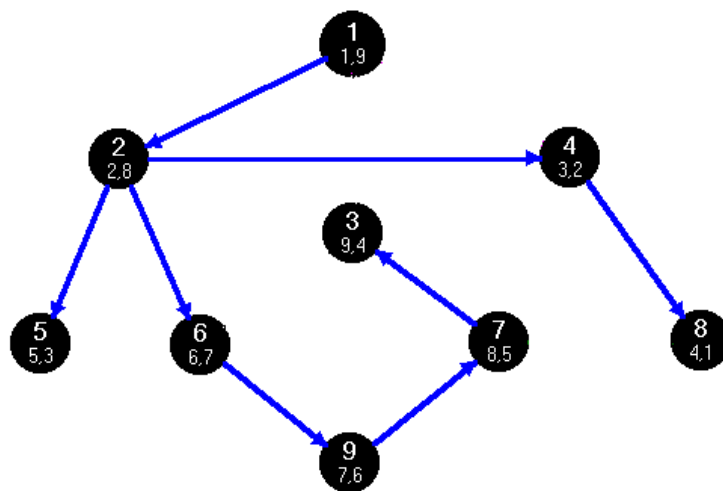
28.5. ábra. A mélységi bejárás „külső” algoritmus



28.6. ábra. A mélységi bejárás „belső” algoritmus

Az $MB(u)$ eljárás futása során feljegyezzük a P tömbbe egy csúcs megelőzőjét, így egy u csúcsból kiinduló, úgynevezett *mélységi feszítőfát* kapunk. A 28.1. fejezet példáján az 1-es csúcsból kiinduló mélységi faként a 28.7. ábrán látható gráfot kapjuk. Összességében, pedig a P tömbben feljegyzett megelőzési reláció, G egy- esetleg több fából álló – részgráfját adja, amelyet *mélységi erdőnek* nevezünk.

Definíció. Legyen $G = (V, E)$ irányított, véges gráf. A G mélységi bejárása után a P -ben keletkező megelőzési reláció által ábrázolható irányított T részgráfot, a G gráf egy *mélységi erdőjének* nevezük.



28.7. ábra. A mélységi erdő

A mélységi bejárás *műveletigényének* meghatározásakor elegendő azt figyelembe venni, hogy egyrészt minden u csúcsra pontosan egyszer hívjuk meg az $MB(u)$ eljárást, másrészt az eljárásban a csúcsnak minden szomszédját vizsgáljuk, ami összesen annyi vizsgálatot jelent, mint ahány éle van a gráfnak, így

$$T(n) = O(n + e).$$

28.4. Élek osztályozása a mélységi bejárás szerint

A mélységi bejárás során felfedezett éleket különböző kategóriákba sorolhatjuk. Ezek ismertetése előtt azonban tisztáznunk kell néhány alapfogalmat és állítást.

Definíció. Legyen T a $G = (V, E)$ gráf egy mélységi erdője, és $u, v \in V$ csúcsok. A v leszármazottja u -nak T -ben, ha $\exists u \rightsquigarrow v$ T -beli irányított út.

Állítás. (a leszármazottság szükséges feltétele): Legyen T a $G = (V, E)$ gráf egy mélységi erdője, $u, v \in V$ csúcsok, $u \neq v$, és v leszármazottja u -nak T -ben, akkor $\text{mszám}[v] > \text{mszám}[u]$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy v leszármazottja u -nak T -ben, tehát $\exists u \rightsquigarrow v$ út T -ben. Ez az út úgy keletkezik, hogy az út (u, v) éleinek vizsgálatakor, szín $[v] = \text{fehér}$ csúcsok esetén a P tömbbe bejegyzésre kerül a megelőző u csúcs, majd meghívjuk az $MB(v)$ eljárást, ahol a v csúcs legalább egyel megnövelt mélységi szám értéket fog kapni.

Állítás. (leszármazottság szükséges és elégséges feltétele): Legyen T a $G = (V, E)$ gráf egy mélységi erdője, $u, v \in V$ csúcsok, $u \neq v$. Ekkor $\text{mszám}[y] > \text{mszám}[x]$ és $\text{bszám}[y] < \text{bszám}[x]$ akkor, és csak akkor, ha v leszármazottja u -nak T -ben.

Bizonyítás. A mélységi és befejezési számok viszonyából következik, hogy előbb meghívtuk az $MB(u)$ eljárást, majd még mielőtt végett ért volna az u szomszédainak rekurzív bejárását végző ciklus, meghívtuk $MB(v)$ -t, amely teljes egészében lefutott, majd csak ez után terminálhatott az említett ciklus. Ez akkor lehetséges, ha létezik egy olyan $w \in V$ csúcs, hogy az $MB(w)$ eljárásban hívtuk meg $MB(v)$ -ot, és $P[y] = w$ bejegyzésre kerül. Továbbá a w csúcs olyan, hogy $w = v$ (azaz w szomszédja u -nak) vagy $MB(w)$ lefutása is teljesül, amit az $MB(v)$ -ről az előbb említettünk. Ezt a gondolatmenetet addig folytathatjuk, míg $w = u$ nem lesz, miközben láthatjuk, hogy a P tömb bejegyzései által reprezentált irányított úton haladunk visszafelé (a rekurzív hívási fán haladunk felfelé). Tehát ez az út igazolja, hogy v leszármazottja u -nak T -ben.

Állítás. (Fehér út tétel): Legyen T a $G = (V, E)$ gráf egy mélységi erdője, $u, v \in V$ csúcsok, $u \neq v$. Ekkor v leszármazottja u -nak T -ben akkor, és csak akkor, ha u elérésekor a v elérhető az u -ból, az u kivételével csak fehér csúcsokat tartalmazó úton.

Bizonyítás.

\Rightarrow : Legyen v leszármazottja u -nak. Ekkor $\exists u \rightsquigarrow v$ T -beli út, amelynek mentén minden csúcs leszármazottja u -nak. Ezen fabeli út minden w csúcsára teljesül, hogy $\text{mszám}[w] > \text{mszám}[u]$, azaz minden w csúcsot később érünk el, mint az u -t. Tehát az u elérésekor a w leszármazott csúcsok még fehérek.

\Leftarrow : Tegyük fel, hogy u elérésekor létezik v -be vezető fehér csúcsokból álló út, legyen w egy ilyen út első olyan csúcsa, amelyet az u szomszédait felsoroló ciklusban elérünk, azaz meghívjuk az $MB(w)$ eljárást. Az u csúcs már szürke és w még fehér, ezért w -t később érjük el, mint u -t, tehát $\text{mszám}[w] > \text{mszám}[u]$. Továbbá $MB(u)$ belsejéből hívtuk meg $MB(w)$ -t tehát $MB(w)$ előbb lefut, mint $MB(u)$, azaz $\text{bszám}[w] < \text{bszám}[u]$. Tehát a korábbi állítás szerint w leszármazottja u -nak. Azonban feltettük, hogy w -t érjük el először az v -hez vezető úton, tehát az út többi csúcsa v elérésekor még fehér, így a $v \rightsquigarrow u$ útra hasonlóan alkalmazható a fenti rekurzív gondolatmenet (míg el nem jutunk az $u \rightsquigarrow u$ útig). Miután beláttuk, hogy w leszármazottja u -nak és v leszármazottja w -nek, tehát v leszármazottja u -nak.

Megjegyzés. Ha $u = v$, akkor triviálisan teljesül a kölcsönös leszármazottság.

A leszámzott fogalmát kihasználva az éleket a következő osztályokba sorolhatjuk a mélységi bejárás szerint. Legyen T a $G = (V, E)$ gráf egy mélységi erdője, és $u, v \in V$ csúcsok. Az $(u, v) \in E$ él

1. *faél*, ha (u, v) éle T -nek;
2. *előreél*, ha (u, v) nem éle T -nek, de v leszámzottja u -nak T -ben, és $u \neq v$;
3. *visszaél*, ha u leszámzottja v -nek T -ben ((u, v) nem éle T -nek, ide tartozik $u = v$ hurokél is);
4. *keresztél*, ha u és v nem leszámzottjai egymásnak T -ben.

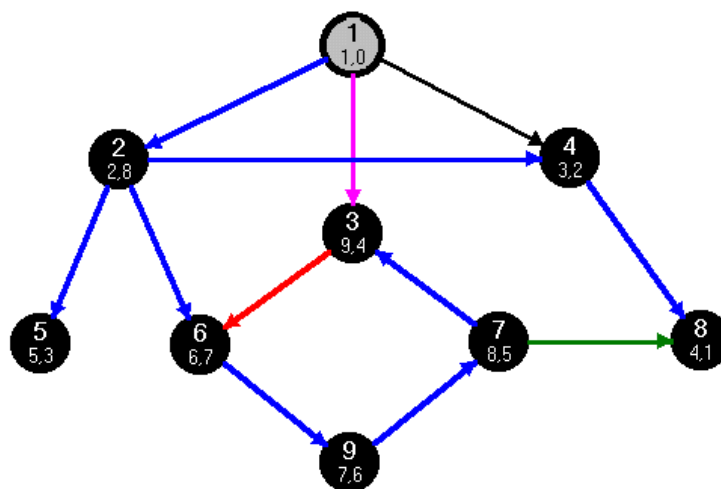
Az éltípusokat az eljárás végrehajtása közben tudjuk megállapítani, az mszám és bszám értékek segítségével, ahogy az állítások esetében láttuk.

Állítás. Tegyük fel, hogy $G = (V, E)$ irányított véges gráf mélység bejárása során éppen az $(u, v) \in E$ vizsgálatánál tartunk. Ekkor (u, v) él

1. *faél*, ha $\text{mszám}[v] = 0$;
2. *előreél*, ha $\text{mszám}[v] > \text{mszám}[u]$;
3. *visszaél*, ha $\text{mszám}[v] \leq \text{mszám}[u]$ és $\text{bszám}[v] = 0$;
4. *keresztél*, ha $\text{mszám}[v] < \text{mszám}[u]$ és $\text{bszám}[v] = 0$.

Bizonyítás

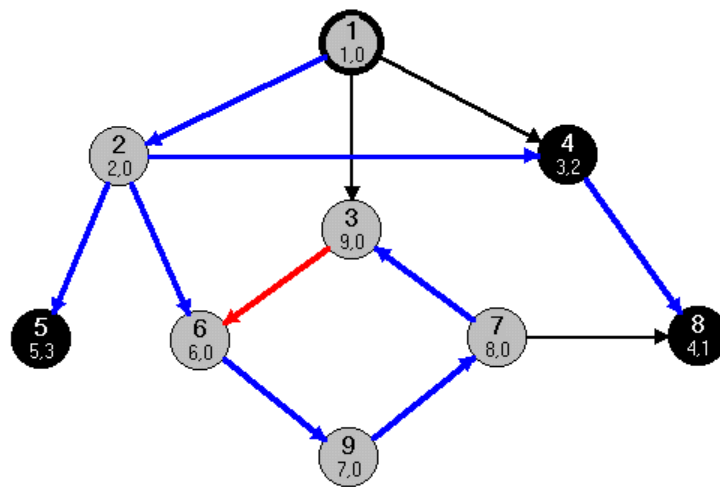
1. $\text{mszám}[v] = 0$ azt jelenti, hogy most érjük el a v csúcsot, azaz a csúcs még fehér. Továbbá az (u, v) él mentén jutunk az v csúcsba, mint u szomszédja, amely az $MB(u)$ u szomszédait felsoroló ciklusában, az elágazás bal oldali ágában lehetséges, ahol valóban a P tömbbe bejegyzésre kerül az él, tehát faél lesz.
2. $\text{mszám}[v] > \text{mszám}[u]$ és $\text{mszám}[u] > 0$, így $\text{mszám}[v] > 0$, tehát v nem fehér (így az él nem lehet faél). Továbbá a mélységi számok viszonyából következik, hogy az $MB(v)$ -t később hívtuk meg, mint az $MB(u)$ -t, de az $MB(u)$ még nem fejeződött be. Így az $MB(v)$ meghívása, az $MB(u)$ eljárás (u szomszédait felsoroló ciklusában, valamely szomszédra meghívott MB eljárásban, vagy annak rekurzív leszámzottjában történt, az (u, v) él vizsgálata előtt. Azonban az (u, v) él vizsgálata a ciklus egy későbbi iterációjában történik, tehát az $MB(v)$ -nek mostanra be kellett fejeződnie, de az $MB(u)$ még csak ezek után fog befejeződni $\text{bszám}[v] < \text{bszám}[u]$.



28.8. ábra. Előreél detektálása (rózsaszínnel jelölve)

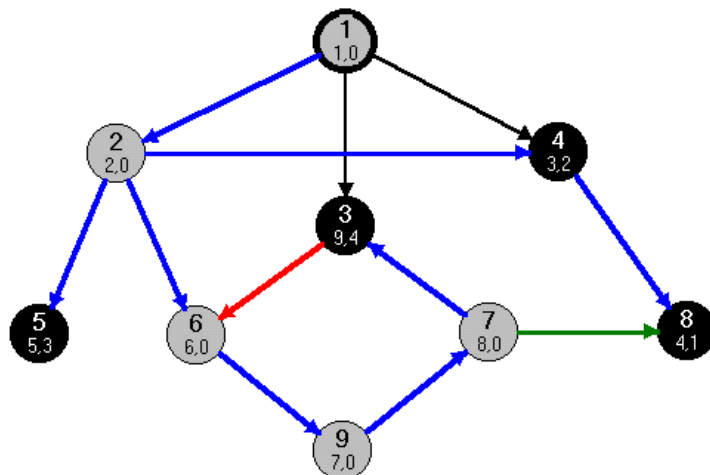
Korábbi állításunkat felhasználva beláthatjuk, hogy v leszármazottja u -nak T -ben, és láttuk, hogy nem lehet faél, tehát előreél. Láthatjuk a 28.1. fejezetben vizsgált példán, hogy az 1-es csúcsból a 3-as csúcsba vezető él feldolgozásakor a 3-as csúcsba már eljutottunk az $(1, 2, 6, 9, 7, 3)$ úton. Tehát a 3-as leszármazottja az 1-nek, és az $(1, 3)$ él nem faél, tehát előreél (28.8. ábra).

- Ha $mszám[v] = mszám[u]$, akkor (u, v) hurokél, ami triviálisan visszaél. Ha $mszám[v] < mszám[u]$ és $bszám[v] = 0$, akkor a v bejárása elkezdődött, de még nem fejeződött be. Elkezdtük az u bejárását, amelynek során vizsgáljuk az (u, v) élt. Tehát az v bejárása során jutunk el az u -hoz, azaz u leszármazottja v -nek. Az $MB(v)$ eljárásban, vagy annak valamely rekurzív leszármazottjában hívtuk meg az $MB(u)$ -t, tehát az $MB(u)$ -nak előbb kell befejeződnie, mint az $MB(v)$ -nek. A 28.9. ábrán a $(3, 6)$ él visszaél.



28.9. ábra. Visszaél detektálása (piros színnel jelölve)

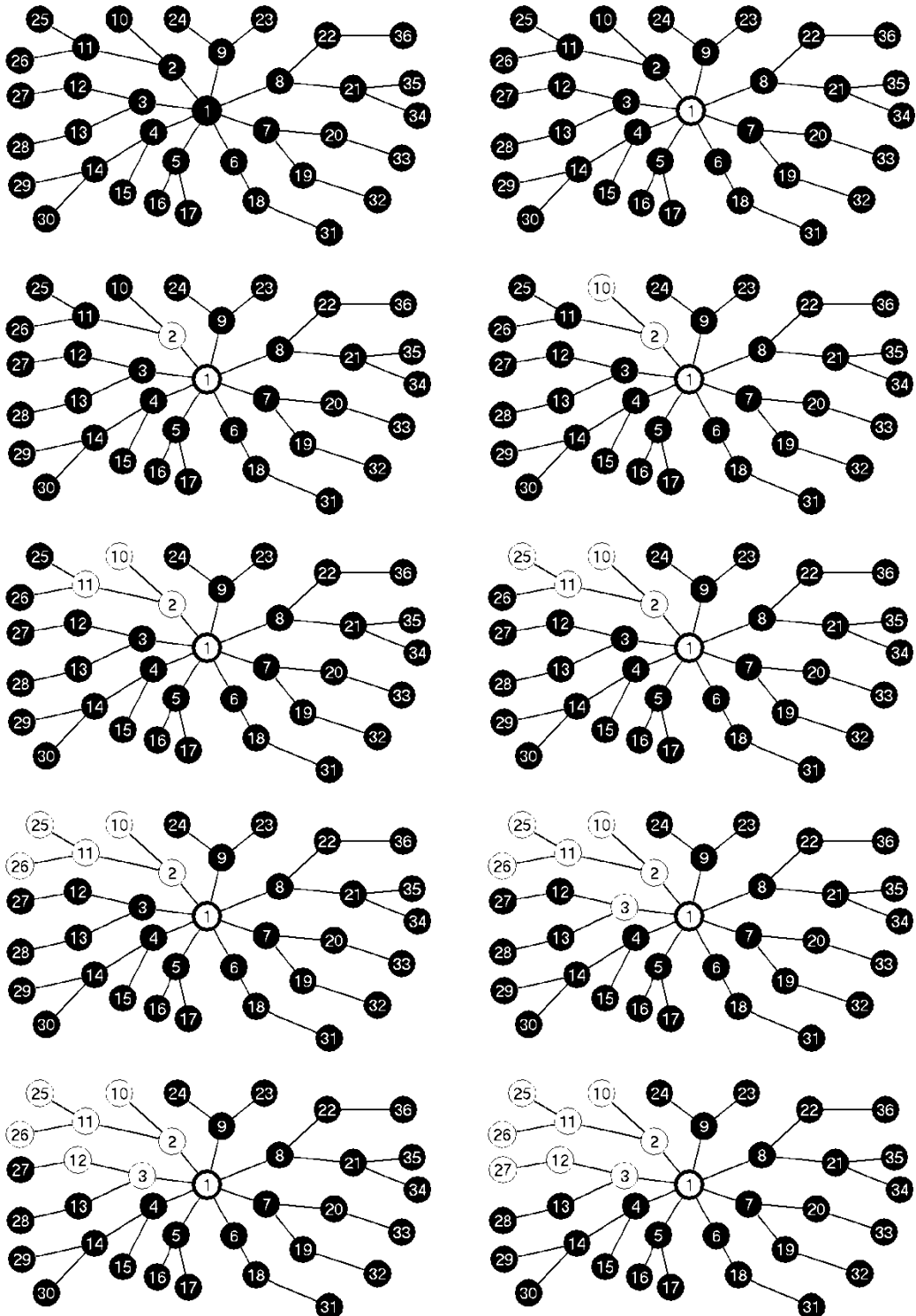
- $mszám[v] < mszám[u]$ szükséges feltétele, hogy u leszármazottja legyen v -nek, de az v bejárása befejeződött ($bszám[v] > 0$), míg az u bejárása még nem, tehát a $bszám[u]$ csak nagyobb lehet $bszám[v]$ -nél, azaz az elégséges feltétel nem teljesül. Tehát u és v nem leszármazottai egymásnak T -ben, amiből következik, hogy (u, v) él keresztél. A 28.10. ábrán a $(7, 8)$ élt, mint keresztélt detektáltuk.

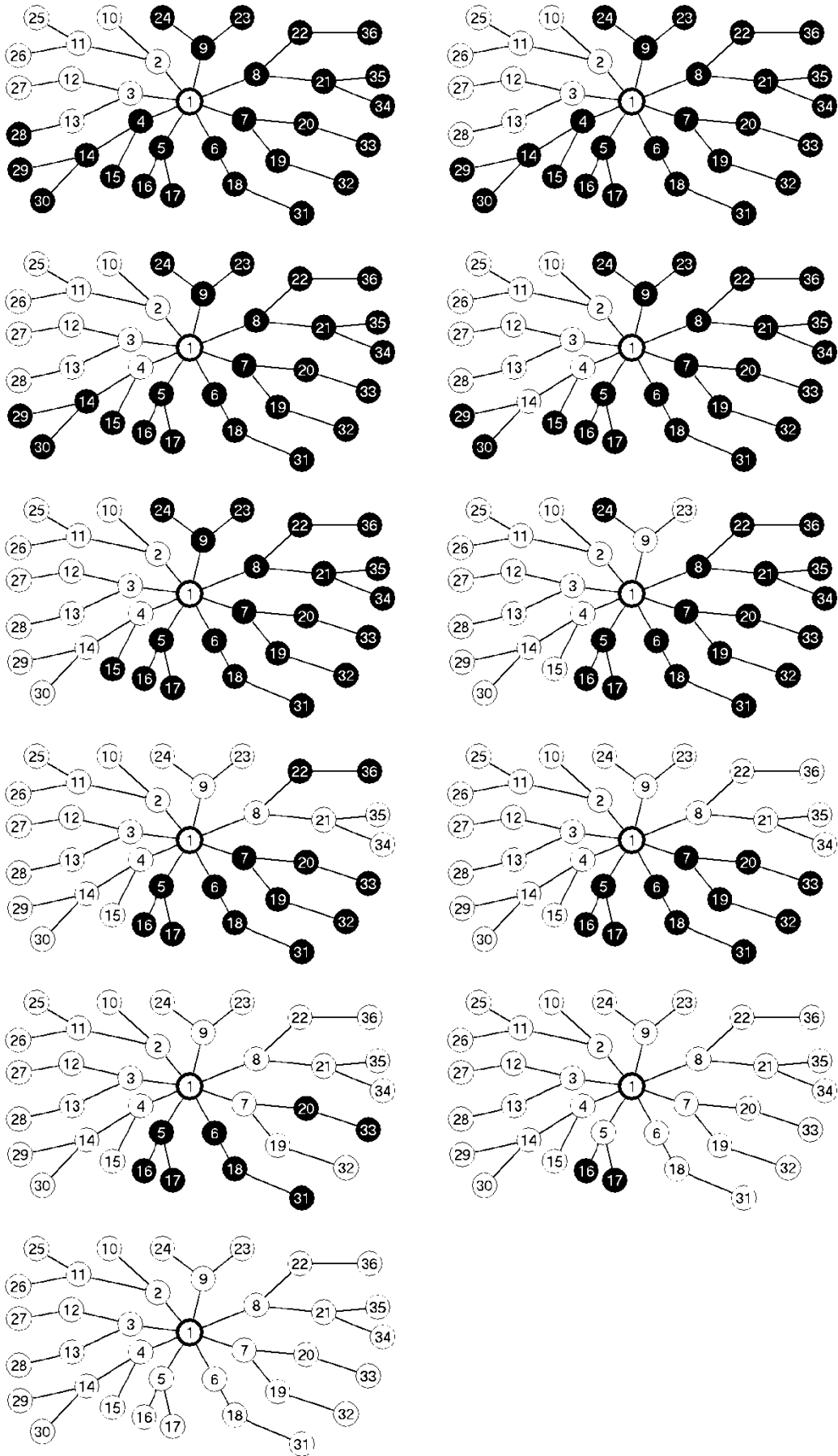


28.10. ábra. Keresztél detektálása (zöld színnel jelölve)

28.5. A mélységi bejárás egy illusztrációja

Az alábbi „pillanatfelvételek” inkább az idézett irodalmi leírás illusztrálásához készültek, minthogy a gráfok algoritmus működését részletesen egy másik ábrason mutattuk be.





28.11. ábra. Mélységi bejárás egy gráfon (illusztráció a „kisváros lámpáihoz”)