34. A RABIN-KARP ALGORITMUS

Az előző két mintaillesztő algoritmus a karakterekből álló minta minél nagyobb ugrásaival törekedett a szöveg illeszkedésre esélyes pozícióinak bejárására. Az előttünk álló *Rabin-Karp* eljárás a mintát, valamint a szöveg ugyanolyan hosszúságú szakaszait nagy egész számokkal kódolja, így az illeszkedés vizsgálat két szám egyenlőségének ellenőrzésére vezet.

Az eljárás ezzel a szemlélettel „elveszíti" a közvetlen kapcsolatot az egyes karakterekkel, így várhatóan nem lesz képes nagyobb ugrásokra, hanem mindig csak egy pozícióval csúsztatja jobbra a mintát a szövegen, ahol minden helyzet egy új egész számot határoz meg, mint a lefedett karakterek kódját. Tekinthetjük úgy az eljárást, hogy egy egész számokból álló sorozaton lineáris kereséssel keressünk egy szám első előfordulását, ahol ez a keresett szám a mintának a kódolásából származik.

Ettől a módszertől azt várhatjuk, hogy hatékony lesz, mivel az egész számokkal való műveletek gyorsan végrehajthatóak. Mivel azonban igen nagy számokról lehet szó, az egyelőségük fogalma és ellenőrzése összetettebb, mint a megszokott nagyságrendekben, így a hatékonyság nem magától értetődik.

34.1. Az algoritmus elvi alapjai

Legyen az ábécé a H véges halmaz, melynek elemeit sorszámozzuk meg $[0..d-1]$ közötti egész számokkal. Ekkor $d=|H|$, az ábécé betűinek száma. Ekkor egy H feletti szót (karakter sorozatot) úgy is tekinthetünk, mint egy d alapú számrendszerben felírt számot. Például a "BBAC" szónak megfelelő szám tízes számrendszerben 1102, ha az 'A', 'B' és 'C' sorszámai rendre 0, 1 és 2.

Vezessük be azt a függvényt, amely megadja egy karakter H-beli sorszámát: $ord: H \to [0..d-1]$

Ekkor az $M[1..m]$ mintának megfelelő szám

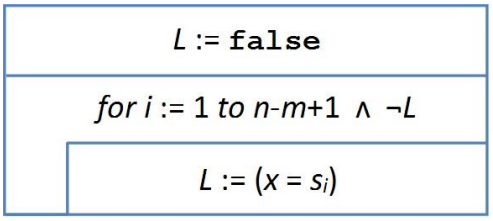
$$x=\sum_{j=1}^{m} ord(M[j])d^{m-j} = ord(M[1])d^{m-1}+ord(M[2])d^{m-2}+...+ord(M[m])d^{0},$$

amelyet *Horner* algoritmussal hatékonyabban is kiszámíthatunk

$$x=(...((ord(M[1])\,d+ord(M[2]))\,d+ord(M[3]))\,d+...+ord\,(M[m-1]))\,d+ord\,(M[m]).$$

A *Rabin-Karp* algoritmus lényege az, hogy a bemutatott módon kapott x számot hasonlítjuk össze minden egyes k eltolás esetén, a szöveg $S[k+1..k+m]$ részsorozatával, mint egy d alapú számrendszerben felírt számmal.

Jelöljük s_i-vel az $S[i..i+m-1]$ szónak megfelelő számot ($i=k+1$). Ekkor a feladatot visszavezethetjük egy egész számok sorozatán való lineáris keresésre (lásd: 34.1. ábra).



34.1. ábra. Lineáris keresés egész számok sorozatán

Nézzünk egy példát új eljárásunkra. Legyen a szöveg S = "DACABBAC", a minta pedig M = "BBAC". A 34.2. ábrán követhetjük, hogy az egyes pozíciókban milyen számok kerülnek összehasonlításra.

	D	A	C	A	B	B	A	C
s_1	3	0	2	0				
s_2		0	2	0	1			
s_3			2	0	1	1		
s_4				0	1	1	0	
s_5					1	1	0	2
x	1	1	0	2				

34.2. ábra. Példa a lineáris keresés szerinti működésre

A példában az is látható, hogy a mintát kódoló x-et csak egyszer kell meghatározni (mivel nem változik). Azonban az s_i egész számokat minden léptetés után újra kell számolni, ami igen költséges még akkor is, ha Horner algoritmussal számítjuk. Hogyan lehetne s_i+1-et hatékony számolni s_i ismeretében?

Legyen például a 23456 sorozat olyan, amelyben a 2345 szám nem egyezik a négy karakteres mintával. A 2345 szám ismeretében állítsuk elő a 3456 számot! Balról töröljük a 2-es számjegyet, majd a megmaradt 345 szám jegyeit egy helyi értékkel balra léptetjük, végül hozzáadjuk a 6-ot, azaz (2345-2*1000)*10+6 = 3456 lesz az új érték. Általánosan:

$$s_{i+1} = \left(s_i - ord(S[i]) * d^{m-1}\right) * d + ord(S[i+m])$$

A formula két szorzást tartalmaz, mivel d^{m-1}-et előre kiszámíthatjuk, és egy változóban tárolhatjuk, így menet közben nem kell hatványozni.

A módszer lényegét körvonalaztuk, mivel egy *karaktersorozat* kölcsönösen egyértelműen megfeleltettünk egy egész számnak, a feladatot visszavezettük egy egész számokon értelmezett lineáris keresésre, amelynek műveletigénye a fenti formula használatával lineáris marad.

34.2. Az algoritmus részletes kidolgozása

A gyakorlatban hosszabb minta vagy túl nagy ábécé esetén előfordulhat, hogy egy m számjegyből álló, d alapú számrendszerbeli szám nem tárolható egy szabványos egész számként (túlcsordul). Amennyiben nem egész számtípusként tároljuk, a műveletek végrehajtási ideje megnő.

A megoldás az, hogy vegyünk egy kellően nagy p prímet, amely mellett $d*p$ még ábrázolható, és *modulo p* számoljuk az x-et és az s_i-t. Ekkor az egyértelműséget elveszítjük, mivel egyenlőség helyett a maradékosztályokhoz való tartozást vizsgáljuk, de ez a körülmény a nem-egyenlő eseteket nem teszi egyenlővé, azaz

(1) $x \bmod(p) \neq s_i \bmod(p) \Rightarrow x \neq s_i$

Ha viszont egyenlőséget állapít meg a vizsgálat, az csak azonos maradékosztályba való tartozást jelent, ami elvileg nem garantálja azt, hogy a két érték valóban egyenlő:

(2) $x \bmod(p) = s_i \bmod(p) \Rightarrow$ x és s_i azonos maradékosztályba esik, tehát további vizsgálat szükséges, azaz karakterenkénti összehasonlítással eldöntjük, hogy $M[1..m] = S[i..i+m-1]$ egyenlőség teljesül-e.

Hamis találatnak szokás nevezni azt az esetet, amikor $x \bmod(p) = s_i \bmod(p)$, de $M[1..m] \neq S[i..i+m-1]$. Minél nagyobb p-t választunk, a maradékosztályokba annál kevesebb elem esik, így várhatóan a hamis találatok száma is kevesebb lesz.

Visszatérve az s_{i+1} érték számításának módjára, az most így módosul:

$$s_{i+1} = ((s_i - ord(S[i]) * d^{m-1}) * d + ord(S[i+m])) \bmod(p)$$

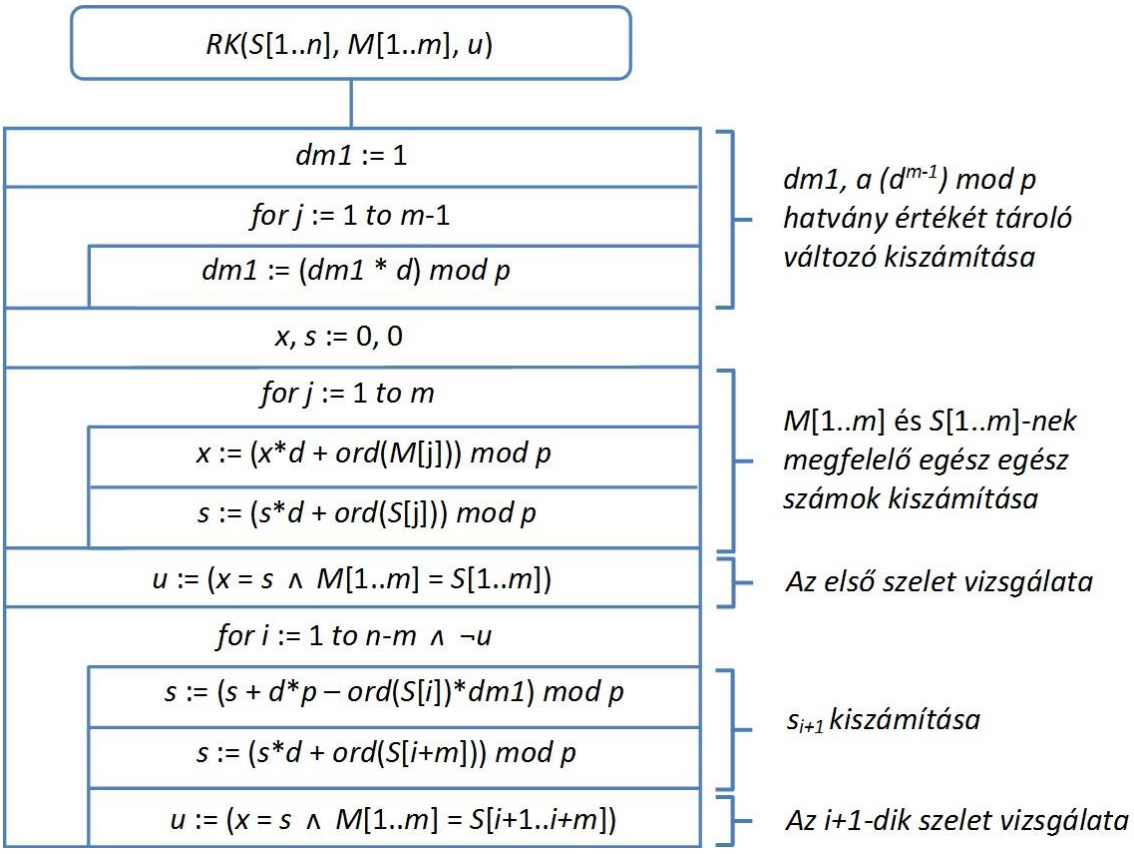
A *modulo* számítás következtében újabb probléma merült fel: $s_i - ord(S[i]) * d^{m-1}$ értéke lehet negatív is, amely megkövetelné az előjeles egész számok használatát, így viszont abszolút értékben kisebb számok lennének ábrázolhatók, miközben p-t szeretnénk minél nagyobbnak választani. Adjunk ezért s_i-hez $d*p$-t, ami biztosítja, hogy a különbség nem lesz negatív, és az osztási maradékot sem változtatja:

$$s_{i+1} = ((s_i + d * p - ord(S[i]) * d^{m-1}) * d + ord(S[i+m])) \bmod(p)$$

A kifejezés túlcsordulásának a megelőzésére számítsuk a kifejezést két lépésben (*modulo* esetén megtehetjük):

$$\begin{cases} s = (s_i + d * p - ord(S[i]) * d^{m-1}) \bmod(p) \\ s_{i+1} = (s * d + ord(S[i+m])) \bmod(p) \end{cases}$$

Összes eddigi megfontolásunkat tartalmazza a Rabin-Karp algoritmus végleges formája, amely a 34.3. ábrán látható.



34.3. ábra. A Rabin-Karp algoritmus

A *műveletigény* a *legjobb esete* abból adódik, ha egyszerűen végigolvassuk a szöveget és minden esetben azt kapjuk, hogy a minta nem egyezik a lefedett szövegrésszel ($x \neq s$).

Ebben az esetben a mintaillesztés műveletigénye a szöveg hosszában lineáris lesz:

$$m\ddot{O}(n,m) = \Theta(n)$$

A *legrosszabb eset* akkor áll elő, ha a választott *p* prímszám mellett mindig hamis találatot kapunk. Ekkor minden esetben karakterenként is megvizsgáljuk az $M[1..m] = S[i+1..i+m]$ egyenlőség teljesülését, Ebben az (elméletileg nem kizárható) esetben lényegében visszakapnánk az egyszerű mintaillesztés algoritmusát. Tehát

$$M\ddot{O}(n,m) = \Theta(n*m)$$.

A tapasztalat azt mutatja, hogy „jó" p választása esetén, nincs vagy csak nagyon kevés a hamis találat, így a Rabin-Karp algoritmus várhatóan lineáris marad:

$$A\ddot{O}(n,m) = \Theta(n)$$.

A szekvenciális fájl input esetén fel kell készülni a p*uffer* használatára, ugyanis az $x = s$ találat esetén, a szövegben vissza kell lépni, és karakterenként meg kell vizsgálni az $M[1..m] = S[i+1..i+m]$ egyenlőség teljesülését.