35. MINTAILLESZTÉS AUTOMATÁVAL

Ha ma tudni szeretnénk, hogy mi Zimbabwe fővárosa, mikor írta Petőfi az Anyám tyúkját, mi a szinusz függvény definíciója, akkor ma már nem állunk neki a lexikonok böngészésének, hanem az Internetet hívjuk segítségül. Valamelyik kereső programba beírjuk azt a tudásmorzsát, amelyet az adott kérdéskörből ismerünk. A program az Interneten lévő dokumentumok közül felsorolja mindazokat, melyek illeszkednek az előbbi tudáselemhez. Beütve például a Google-ba a „Zimbabwe" szót, felsorolásra kerülnek a Zimbabwéről szóló dokumentumok. Ezek között előkelő helyen ott lesz a Wikipedia Zimbabwét bemutató cikke, melyben aztán megtalálhatjuk a főváros nevét. A tudásmorzsa a legtöbbször – mint előbb is – valamilyen szó, a *keresés* számára egy *minta*, és azokat a dokumentumokat kapjuk vissza valamilyen sorrendben, melyekben ez a minta előfordul.

A szövegfeldolgozó rendszerek, például a Word is, kínálnak hasonló jellegű lehetőségeket. Ha ebben a jegyzetben meg szeretnénk keresni, mi a mintaillesztés fogalma, akkor a Word keresés funkciójánál begépeljük a „mintaillesztés" szót, beállítjuk az „összes" opciót. A keresés eredményeként az jegyzet elejétől kezdve rendre villogva ráállhatunk a „mintaillesztés" szó előfordulásaira, melyek között ott lesz az is, amely a definíciót tartalmazza.

35.1. A mintaillesztési feladat

Az bevezetőben szereplő két példa a mintaillesztési feladat két lehetséges változatát mutatja be. Az első esetben a feladat az, hogy valamely szövegről eldöntsük, hogy benne van-e részszövegként az adott minta (ezek összességét kell azután felsorolni). A második esetben nem csak el kell döntenünk, hogy szerepel-e a szövegben az adott minta, hanem annak összes lehetséges előfordulását is meg kell keresnünk. Világos, hogy a második feladat megoldásával az első feladatot is megoldjuk, hiszen a minta első előfordulása után már jelezhetjük, hogy a minta megtalálható a szövegben.

Fogalmazzuk meg pontosan a feladatot. Ehhez szükségünk lesz néhány jelölésre, illetve fogalomra.

A fejezetben legyen X egy rögzített ábécé (véges, nem üres szimbólumhalmaz), X^* az X elemeiből képzett véges sorozatok halmaza, míg X^+ a nem üreseké. Egy $u \in X^*$ szó, mint sorozat hosszára $|u|$ jelölést fogjuk használni.

Az X^* elemeit X ábécé feletti szavaknak, vagy X rögzítettsége esetén egyszerűen csak szavaknak hívjuk. Az üres szó jele ε.

Tetszőleges $u \in X^*$ és $h \geq 0$ esetén definiáljuk u szó h hosszú *kezdőszeletét (végszeletét)*, mely $h \leq |u|$ esetén u első (utolsó) h jele, illetve az egész u, ha $|u| < h$. Az első esetben valódi kezdőszeletről (végszeletről) beszélünk. Jelölésük $pre\,(u, h)$, illetve $suf\,(u, h)$ (a nekik megfelelő angol szavak, *prefix*, illetve *suffix* rövidítésével).

(Megjegyezzük, hogy ez a terminológia kissé megtévesztő, hiszen a h hosszú kezdőszelet (végszelet) hossza csak $h \leq |u|$ esetében h hosszúságú szó, egyébként magának az u-nak a hosszával egyenlő.)

Rögzítsük most X^* egy $m = m_1m_2\ldots m_{|m|}$ nem üres szavát, melyet mintának fogunk nevezni.

Azt mondjuk, hogy m *illeszkedik* az $u \in X^*$ szóhoz, ha u felírható az $u = vmw$ alakban, ahol v és w X feletti szavak. Az *m illeszkedik az u elejéhez (végéhez)*, ha illeszkedik hozzá és $v = \varepsilon$ ($w = \varepsilon$).

Definíció: Az m minta *illeszkedési függvénye*, ill_m egy olyan $ill_m : X^* \to \{0,1\}^*$ leképezés, melyben tetszőleges $u \in X^*$ mellett $|ill_m(u)| = |m| + 1$. Továbbá, minden $0 \le i \le |u|$ esetén: $ill_m(u)_{i+1} = 1 \Leftrightarrow$ az u szó i hosszú kezdőszeletének végéhez illeszkedik az m minta.

Definíció: A *mintaillesztés feladata* valamely $m \in X^*$ mintára az ill_m illeszkedési függvény előállítása.

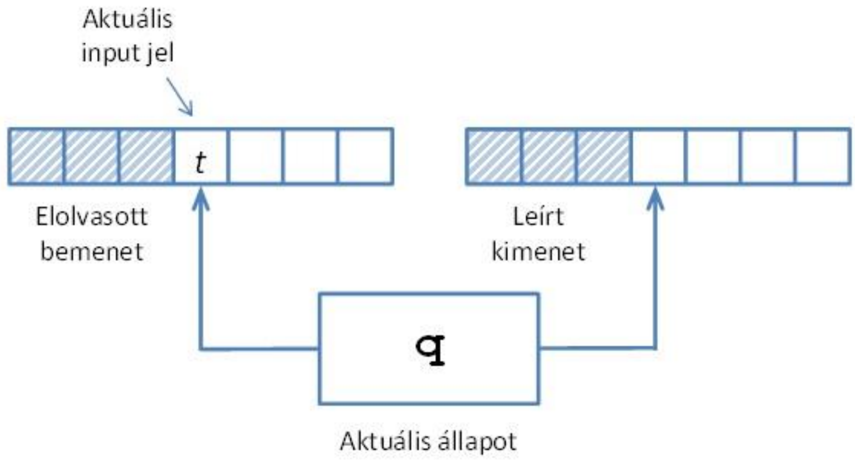
A feladatot egy olyan algoritmussal fogjuk megoldani, amely által megvalósított $\lambda: X^* \to \{0,1\}^*$ függvényre $\lambda = ill_m$.

Világos, hogy $\lambda = ill_m$ pontosan akkor teljesül, ha minden $v \in X^*$ szóra teljesül, hogy $\lambda(v)_{|v|+1} = 1 \Leftrightarrow v$ végére odailleszthető az m minta. (u kezdőszeleteit választjuk rendre v-nek). A megoldás helyességének belátásához a továbbiakban ezt a tulajdonságot fogjuk ellenőrizni.

A feladatot speciális algoritmussal, megjelölt állapotú, véges, determinisztikus automatával fogjuk megoldani. Később látni fogjuk, hogy ezt az automatát megvalósíthatjuk valamilyen szokásos, algoritmusokat leíró nyelven.

35.2. Megjelölt állapotú véges determinisztikus automaták

A megjelölt állapotú véges, determinisztikus automata egy absztrakt matematikai gép, melynek sémája a következő 35.1. ábrán látható.



35.1. ábra. Megjelölt állapotú automata

A gép diszkrét időskálában működik. Elindul egy kezdeti állapotból és ütemenként elolvassa a bemeneti szalagján lévő jeleket. Egy ütem során aktuális állapota és az olvasott bemenő jel függvényében új állapotba megy át. Minden érintett állapot esetén (tehát a kiinduló állapotban is), kiad egy Y-beli, csak az állapottól függő kimeneti jelet. A működés eredménye a kimenetre írt, a bemeneti szónál eggyel hosszabb szó. A megjelölt állapotú véges, determinisztikus automatára adott informális leírást a következő módon formalizálhatjuk:

Definíció: Az $A = \langle A, X, Y, \delta, a_0, \mu \rangle$ hatost *megjelölt állapotú véges, determinisztikus automatának* nevezzük, ahol

- A: véges halmaz, az automata állapotainak halmaza,
- X: ábécé, az automata bemenő jeleinek halmaza,

- Y: ábécé, az automata kimenő jeleinek halmaza,
- δ: A × X → A alakú, mindenütt értelmezett leképezés, az állapot-átmeneti függvény,
- a_0 : $a_0 \in$ A, az automata kezdőállapota,
- μ: $A \to Y$ alakú, mindenütt értelmezett leképezés, a jelölő függvény.

Adjuk meg most az automata működési módját.

Egy $u = u_1u_2\ldots u_{|u|} \in X^*$ bemenetre való működés leírásához először kiterjesztjük a δ állapot-átmeneti függvényt δ: $A \times X^* \to A$ alakú függvénnyé:

δ (a, $u_1u_2\ldots u_{|u|}$) = a' ⇔ létezik olyan $c_0c_1\ldots c_{|u|} \in A^+$ sorozat, hogy $c_0 = a$, $c_n = a'$ és minden i = 0, 1, n-1 esetén $\delta(c_i, u_i) = c_{i+1}$.

A $c_0c_1\ldots c_n$ sorozat az $u = u_1u_2\ldots u_n$ bemenet feldolgozása során érintett állapotok sorozata (bele értve a kiinduló állapotot is).

Definiáljuk most a $\lambda: A \times X^* \to Y^*$ *kimeneti függvényt* a következő módon: $\lambda(a,u_1u_2\ldots u_{|u|}) = \mu(c_0)\ \mu(c_1)\ldots\ \mu(c_n)$, ahol $c_0c_1\ldots c_n$ az előbb definiált, a működés során érintett állapotsorozat

Világos, hogy tetszőlegesen rögzített $a \in A$, $u \in X^*$ és $u = vw$ mellett igaz hogy $|\lambda(a,u)| = |u| + 1$ és $\lambda(a,u) = \lambda(a,v)suf(\lambda(\delta(a,v),w),|w|)$.

Az *A által megvalósított* $\lambda_A : X^* \to Y^*$ leképezés ezek után a következő: $\lambda_A(u) = \lambda(a_0,u)$.

A véges automaták struktúráját és működését leírhatjuk a szokásos algoritmus leíró nyelvek valamelyikével is.

A δ átmeneti függvény értékeit tárolhatjuk egy Δ nevű, $|A| \times |X|$ méretű, A típusú mátrixban, míg μ-t egy M nevű $|A|$ méretű, Y típusú vektorban. Használunk még egy *Aktáll* nevű, állapot típusú változót, továbbá egy-egy X^* típusú, illetve Y^* típusú változót az *Bemenet* és *Kimenet* névvel.

Az *Aktáll* változót a_0-ra, míg *Kimenet*-et $\mu(a_0)$-ra inicializálva rendre beolvassuk u elemeit az *Bemenet*-ről. A Δ mátrixból minden beolvasott jellel aktualizáljuk *Aktáll*-t (tehát végrehajtjuk az átmenetet), majd az M vektor alapján *Aktáll* (most már új) értékéből meghatározzuk a következő Y-beli kimenetet, amit a *Kimenet* végére írunk.

Amennyiben $|A|$ nagy, akkor a Δ és M sok helyet foglalhat el. Ilyenkor a Δ-ban és M-ben való tárolást megpróbálhatjuk elkerülni úgy, hogy δ és λ érékét valamilyen eljárással, képlettel számítjuk ki. Ehhez persze az állapotokon valamilyen szabályszerűségeknek kell lenniük.

35.3. Mintaillesztés megjelölt állapotú véges, determinisztikus automatákkal

Az m mintánkhoz olyan A megjelölt állapotú véges, determinisztikus automatát építünk, melyre $\lambda_A = ill_m$. Ehhez természetesen az Y = {0,1} kimeneti ábécét fogjuk használni.

A konstrukció alapötlete, hogy A állapotaiban olyan információt tárolunk, mely alapján az addig beolvasott $v \in X^*$ bemenetről eldönthető, hogy a végéhez illeszkedik-e a minta. Ha igen, 1 választ adunk, egyébként 0-t.

Azt, hogy az előbb említett információ az automata minden ütemének végén ott van az állapotkomponensben, invariáns tulajdonságnak, vagy egyszerűen invariánsnak fogjuk nevezni.

Világos, hogy elegendő, ha az invariánsban szereplő információ nem a teljes v-től, csak annak $|m|$ hosszú végszeletétől, $suf(v, |m|)$-től függ (hogy előtte mi volt v-ben, az nem befolyásolja m-nek a v végére való illeszkedését). Az is világos, hogy az invariánsnak teljesülnie kell az automata kezdőállapotára, továbbá az is, hogy az átmeneti-függvénynek olyannak kell lennie, hogy az x bemenet az invariáns tulajdonságot a $w = suf(v, |m|)$ végszeletről átörökítse $suf(wx, |m|)$-re.

A legtermészetesebb ötlet az, hogy a tárolt információ legyen maga az $|m|$ hosszú végszelet, hiszen így a vele való összehasonlítással |m| illeszkedése könnyen megállapítható. Később látni fogjuk, hogy ennél egyszerűbb struktúrájú információ is megfelel céljainknak.

35.4. A „nyers erő" automata

A nyers erő automatában magukat a lehetséges |m| hosszú végszeleteket tárolja.

A nyers-erő automata ennek megfelelően a következő:

$A^{nyers} = <\{a_w;\, w \in X^{\leq |m|}\}, X, \{0,1\}, \delta, a_{\in}, \mu>$

$\delta(a_w, x) = a_{suf(wx,\, |m|)},$

$\mu(a_w) = 1 \Leftrightarrow w = m.$

Az invariáns tulajdonság A^{nyers}-ben, hogy állapotaiban az addig elolvasott szó $|m|$ hosszú végszeleteit ($X^{\leq |m|}$ elemei) jegyzi meg. A kezdőállapotra, $a_{\in}$-ra ez nyilván, hiszen még nem olvastunk semmit. Az átmeneti függvény $\delta(a_w, x) = a_{suf(wx,\, |m|)}$ definíciója ezt az invariánst nyilván megőrzi. A v-re adott $\lambda_A^{nyers}(v)$ kimenet utolsó, $|v| + 1$-edik jele μ definíciója alapján pontosan akkor 1, ha v végéhez illeszkedik az m minta. Így $\lambda_A^{nyers} = ill_m$.

Az A^{nyers} automata megvalósításában Aktáll karakterlánc, melyet maximum |m| méretű sorként kezelünk. Az állapotváltás az olvasott szimbólumnak a sorba való berakásával történik. Annak ellenőrzéséhez, hogy Aktáll tartalma m (vagyis 1 vagy 0 kimenetet tartozik-e hozzá) a sort körbe kell pakolni. A körbepakolás ideje nyilván arányos $|m|$-el, ezért az egész szimuláció műveleti igénye arányos $|u||m|$-el.

Ahogy már utaltunk rá, nem feltétlenül szükséges az invariánsban a bemenet $|m|$ hosszú végszeletét, mint sorozatot tárolni, Más reprezentáció, esetleg kevesebb tartalom is elég lehet az m-el való illeszkedés ellenőrzéséhez. Erre példák az alább ismertetett *Rabin-Karp, Dömölky* és *Knuth-Morris-Pratt automaták.*

35.5. A Rabin-Karp automata

A *Rabin-Karp automata* alapötlete az, hogy $X^{\leq |m|}$ elemeit nemnegatív egész számokból álló párokkal kódoljuk és a nyers erő automata struktúráját és működését ezeknek a számpároknak a segítségével szimuláljuk. (Ebben az alfejezetben szám alatt mindig nemnegatív egész számot fogunk érteni.)

A számpárokkal való kódolás értelme az automata megvalósításánál jelentkezik, mert ekkor az *Aktáll* változó értéke nem karakterlánc lesz, hanem az őt kódoló számpár, melynek az elemein végzett műveletek gyorsan, konstans ($|m|$-től nem függő) idő alatt megvalósíthatók. (Ez persze csak akkor igaz, ha az adott szám befér programozási nyelvünk nemnegatív egész típusának értéktartományba. Erről később meg szót ejtünk.)

Először foglakozzunk a kódolással. Tekintsük X jeleit számjegyeknek, és vezessük be egy $v \in X^*$ szó esetén a $\underline{v}$ jelölést a v, mint d-áris szám értékére (az üres szónak 0-t feletetve meg). A $w \in X^{\leq |m|}$ alakú szavakat kölcsönösen egyértelműen kódolhatjuk a $(|w|, \underline{w})$ alakú számpárokkal. (A $|w|$ azért szerepel, hogy a kód egyértelműen visszakódolható legyen.

Például a 0 kód minden olyan szó kódja lenne, mely nem tartalmaz a 0 jegytől különböző jegyet. Közülük a kódban tárolt hossz fog egyértelműen meghatározni egyet, nevezetesen az annyi 0-t tartalmazó szót, amennyi ez a letárolt hossz

Tekintsük most azt az állapot-átmeneti függvény definíciójánál jelentkező problémát, hogy ha ismerjük valamely $w \in X^{\leq |m|}$ szó (e,f) kódját, akkor ebből hogyan határozhatjuk meg suf(wx,|m|) kódját.

Vizsgáljuk először az egyszerűbb, $|w| = e < |m|$ esetet. Az x jel w mögé írása a d-áris számrendszerben d-vel való szorzásnak, majd x hozzáadásának felel meg. Ekkor tehát a kód $(e+1, df + x)$.

Ha |w| = e = |m|, akkor először $suf(w, |m| - 1)$ kódját kell megkeresnünk, visszavezetve a dolgot az előbbi esetre. A d-áris számrendszer tulajdonságai miatt az első jegy leválasztása a $d^{|m|-1}$ -el való maradékos osztással történhet, ahol az eredmény a maradék. Jelölje $rem(f, d^{|m|-1})$ ezt a maradékot. Ezzel a jelöléssel $suf(w, |m| - 1)$ kódja az $(e - 1, rem(f, d^{|m|-1}))$. Az első eset képletét erre alkalmazva $suf(wx, |m|)$ kódja $(e, rem(f, d^{|m|-1}) + x)$ lesz. Jelöljük $inc(e)$-vel $0 \leq e < |m|$ esetén $e + 1$-et, míg $e = |m|$ esetén magát az e-t. Ezzel a jelöléssel $suf(wx, |m|)$ kódja egységesen az $(inc(e), rem(f, d^{|m|-1}) + x)$ alakban írható.

Jelöljük Inf-fel a $X^{\leq |m|}$ halmazon értelmezett $w \rightarrow (|w|, w)$ kódolás értékeinek halmazát. $Inf := \{(e, f); 0 \leq e \leq |m|$ és f legfeljebb |m| jegyű, d alapú szám$\}$.

Az előbb bevezetett jelöléseket használva a *Rabin-Karp* automata a következő:

$A^{RK} = <\{a_{e,f}\ ; (e,f) \in Inf\}, X, \{0,1\}, \delta, a_{0,0}, \mu>$

$\delta(a_{e,f}, x) = a_{e',f'}$, ahol $(e', f') = (\, inc(e), rem(f, d^{|m|-1}) + x\,)$

$\mu(a_{e,f}) = 1 \Leftrightarrow (e,f) = (|m|, \underline{m})$

Az A^{RK} automata itt az A^{nyers}-nek ezzel a kölcsönösen egyértelmű kódolással való megvalósítása (így készítettük el), ezért $\lambda_A{}^{RK} = \lambda_A{}^{nyers}$, amiből $\lambda_A{}^{RK} = ill_m$ már következik.

Térjünk rá az implementáció műveleti idejére azon feltételezés mellett, hogy a kódban szereplő e és f ábrázolható a nyelvünk nemnegatív egész típusában. Ilyenkor *Aktáll* új értékének meghatározása az $inc(e)$, $rem(f, d^{h-1}) + x$ képletekkel konstans, $|m|$-től független, idő alatt történik, ezért a műveleti igény $O(|u|)$.

Mit lehet tenni akkor, mikor az A^{RK} implementációja során az (e, f) kód második tagja, f nem fér el a nyelv nemnegatív egészeinek értéktartományába? (Hogy e se férjen el, az praktikusan úgysem fordulhat elő). Ilyenkor választunk egy olyan nagy p prímszámot, mely még ábrázolható a nyelvben egészként, és a kód második komponensében a számításokat *modulo p* végezzük. Ezzel kapcsolatosan két probléma lép fel.

Az első probléma az, hogy $f \equiv \underline{m}\ (mod\ p)$ akkor is teljesülhet, ha $f \neq \underline{m}$. Ilyenkor nincs más, mint „visszalépve” $|m|$ karaktert elvégezzük a nyers erő automatában látott vizsgálatot. Ehhez az állapotkomponensben tárolni kell $(|w|, \underline{w})$ mellett a nyers erő automatában látott w-t is. Ezt a w egyenlő m plusz vizsgálatot szerencsére csak $e = |m|$ és $f \equiv \underline{m}\ (mod\ p)$ esetében, tehát csak ritkán kell elvégezni. (Ha az implementáció során az egész szöveg a rendelkezésünkre áll, akkor ennek a kiegészítő információnak a tárolására nincs is szükség, a visszalépést magában a szövegben is megtehetjük).

A második probléma, hogy hogyan történhet *modulo p* végzett számítás során $rem(f, d^{|m|-1})$ *modulo p* értékének meghatározása. $rem(f, d^{|m|-1})$-et úgy is kiszámíthatjuk, hogy az f kódú w első jegyét beszorozzuk $d^{|m|-1}$ -el, majd ezt a szorzatot vonjuk le f-ből. Ez a számítás már végezhető *modulo p*, de ismerni kell hozzá w első jegyét.

Ezt a nem *modulo p* számítás során *f*-ből visszakódolással ki tudnánk nyerni, de a *modulo p* értékéből már nem. Ezért most is szükséges az a $|m|$ jellel való visszalépés. Ennek megvalósítása is a *w*-nek az állapot-komponensben való tárolásán alapszik. Amikor az őt tartalmazó sorból a berakás során kilép egy jel, az lesz az $|m|$-el való visszalépésnek megfelelő jel. Ha még nem lép ki semmi, akkor a kilépő jelnek a 0-t tekintjük.

35.6. A Dömölky automata

A Dömölky automata alapötlete, hogy a lehetséges $w \in X^{\leq |m|}$ végszeletek helyett elegendő csak azt tárolni róluk, hogy végükre mely hosszakban illeszthető a minta eleje (illeszkedési hosszak). Az illeszkedési hosszak halmaza alapján egyértelműen eldönthetjük az *m*-hez való illeszkedést, hiszen ez akkor áll fenn, ha az illeszkedési hosszak között szerepel $|m|$.

Az illeszkedési hosszak halmazát leírhatjuk a karakterisztikus vektorukkal. Ez egy olyan $|m|$ hosszúságú bitvektor, melynek valamely eleme akkor 1, ha a vektorbeli indexe illeszkedési hossz. Az ilyen vektorokat illeszkedési vektornak fogjuk nevezni és *illvek* (*w*)-vel jelöljük.

Az illeszkedési vektorok tekinthetők a $w \in X^{\leq |m|}$ szavak kódjaiként is, ahol persze ez a kód – a *Rabin-Karp* kóddal ellentétben – már nem kölcsönösen egyértelmű.

Hogyan lehet valamely $w \in X^{\leq |m|}$ szó előbb említett illeszkedési vektorából *suf* (*wx*, $|m|$) illeszkedési vektorát előállítani?

Mielőtt erre válaszolnánk, vezessünk be $x \in X$ mellet *x* *karvek* (*x*)-el jelölt karakterisztikus vektorát. Ez is $|m|$ hosszú bitvektor, melynek *j*-edik bitje pontosan akkor 1, ha a minta *j*-edik eleme *x*.

Rátérve az eredeti kérdésre világos, hogy *suf* (*wx*) illeszkedési bitvektorának első eleme pontosan akkor 1, ha *x* a minta első eleme. Az is világos továbbá, hogy az előbbi vektor *j*-edik komponense ($1 < j \leq h$) akkor 1, ha a minta *j* hosszan illeszthető *wx* végéhez. Ennek feltétele egyrészt, hogy az *m* minta (*j*-1) hosszan illeszkedjen az eredeti *w*-hez, továbbá hogy *x* a minta *j*-edik eleme legyen. Ezt a két feltételt együtt úgy fejezhetjük ki, hogy *illvek* (*w*) - t 1-gyel aritmetikailag jobbra léptetjük (az utolsó bit eltűnik, az első pedig 1), majd azt „és-eljük" *karvek* (*x*)-el (az azonos pozícióban levő bitekre alkalmazzuk a logikai „és" műveletet).

Definiáljuk most a Dömölky automatát a következő módon:

$A^{\text{Döm}} = \langle\{a_b;\ b \in \{0, 1\}^{|m|}\}, X\ , \{0,1\}\ , \delta, a_{0|m|}, \mu\rangle,$

$\delta(a_b, x) = a_{b'}$, ahol $b' = \mathit{jobbrallép}\ (b, 1) \wedge \mathit{karvek}(x)$,

$\mu(a_b) = 1 \Leftrightarrow b$ utolsó komponense 1

Az invariáns tulajdonság, hogy a Dömölky automata állapotaiban az addig elolvasott szó $|m|$ hosszú végszeleteinek ($X^{\leq |m|}$ elemei) karakterisztikus vektorát jegyzi. A kezdőállapotban levő csupa 0 vektornak ezt kielégíti, mivel ekkor még nem olvastunk semmit, ezért egyezés sem lehet. Az átmeneti függvény definíciója korábbi okfejtésünk szerint ezt az invariánst megőrzi.

A *v*-re adott $\lambda_A^{\text{Döm}}(v)$ kimenet utolsó, $|v| + 1$-edik jele μ definíciója alapján pontosan akkor 1, ha *v* végéhez illeszkedik az *m* minta. Így $\lambda_A^{\text{Döm}} = ill_m$.

A megvalósítás során feltételezzük, hogy az aritmetikai jobbra léptetést tetszőleges hosszú bitsorozaton konstans idő alatt, nagyon gyorsan tudjuk elvégezni, s hogy hasonló igaz az „és-elésre" és az utolsó bit kiolvasására is. Így a δ és μ számítása gyorsan, $|m|$-től független idő alatt történhet.

Emiatt a műveletigény most is $O(|u|)$, de a *Rabin-Karp* automatához képest kisebb konstanssal. A *karvek* (x) vektorokat általában előre elkészítjük (*prekondicionálás*), amely folyamat $|X||m|$ kiegészítő időt és tárhelyet igényel.

35.7. A Knuth-Morris-Pratt automata

A Knuth-Morris-Pratt automata alapötlete, hogy a Dömölky automatában szereplő bitvektor helyett elegendő azt tárolni, hogy abban melyik pozíción van benne az utolsó 1-es. Feltéve, hogy ez a pozíció a j-edik, akkor ebből m alapján a teljes bitvektor rekonstruálható, hiszen értéke pontosan ott 1, ahány jelre m a $pre(m, j)$ végéhez illeszthető. A Dömölky automatára való utalás nélkül ez úgy fogalmazható meg, hogy Knuth-Morris-Pratt automata állapotában a mintának a bemenő szó végéhez való leghosszabb illeszkedésének hosszát tárolja.

Hogyan lehet egy $w \in X^{\leq |m|}$ szó előbb említett maximális illeszkedési hosszából $suf(wx, |m|)$ hasonló maximális illeszkedési hosszát előállítani?

Legyen j a w-hez való illeszkedés maximális hossza. A wx-hez való illeszkedés maximális hosszát úgy kapjuk meg, hogy $m_1m_2...m_jx$ végére illesztjük maximális hosszan m-et (w korábbi elemeit nem kell figyelembe venni, mert ha a teljes w alapján hosszabb illeszkedést kaphatnánk, akkor j nem lenne maximális illeszkedési hossz w-hez).

Definiáljuk most a Knuth-Morris-Pratt automatát a következő módon:

$A^{KMP} = <\{a_j;\ 0 \leq j \leq |m|\}, X, \{0,1\}, \delta, a_0, \mu>$,

$\delta(j, x) = a_{j'}$, ahol $j' = Max\{k;\ suf(m_1m_2...m_j,k) = pre(m, k)\}$

$\mu(a_j) = 1 \Leftrightarrow j = |m|$

Az invariáns tulajdonság, hogy a Knuth-Morris-Pratt automata állapotaiban az addig elolvasott szó |m| hosszú végszeleteinek ($X^{\leq |m|}$ elemei) maximális illeszkedési hosszát jegyzi meg. A kezdőállapotban nyilván 0-nak kell lennie, hiszen még nem olvastunk semmit, ezért egyezés sem lehet. Az átmeneti függvény definíciója korábbiak szerint ezt az invariánst megőrzi.

Az A^{KMP} automata az $A^{Döm}$-nek kölcsönösen egyértelmű kódolással való megvalósítása (így készítettük el), ezért $\lambda_A^{KMP} = \lambda_A^{Döm}$, amiből $\lambda_A^{KMP} = ill_m$ már következik.

A megvalósítás során *Aktáll*-ban csak a 0, 1,…, $|m|$ értékeket kell tárolni, ami $log_2(|m|)$ biten történhet. A δ függvényt itt is, ahogy azt a Rabin-Karp és Dömölky automatáknál is tettük, képlettel számoljuk. Nagy eltérés viszont, hogy δ definíciójában szereplő $j' = Max\{k;\ suf(m_1m_2...m_j,k) = pre(m,k)\}$ számítás direkt elvégzéséhez sok, $|m|^2$-el arányos idő kell, emiatt a műveleti igény $O(|m|^2|u|)$ lenne.

Ezen segíthetünk úgy, hogy visszajátsszuk a számítást a Dömölky automatában látottakra. Ez utóbbihoz is szükséges $O(|X||m|)$ idő, hiszen a maximális illeszkedésből az illeszkedési vektort elő kell állítani, illetve viszont. Így számolva a műveleti idő $O(|m||X||u|)$.

Megtehetjük, hogy az átmenetek ütemenkénti számítása helyett előre kiszámítjuk a δ függvény összes értékét, amelyeket letárolunk a már említett Δ átmenet-mátrixba. A mátrix alapján az átmenet gyorsan végrehajtható, csak a mátrix megfelelő indexű elemét kell (konstans időben) elővenni. A műveleti idő ebben az esetben $O(|u|)$ lesz, kicsi konstanssal. Ennek ára viszont, hogy prekondicionálásként szükség van a Δ mátrix számára $(|m| + 1)|X|$ darab $log_2(|m|)$ bitnyi tárhelyre és összesen $O(|X||m|^2)$ időre.

Megjegyezzük, hogy ha csak az állapotok számát tekintjük, akkor a Knuth-Morris-Pratt automata optimális. Nincs $|m| + 1$-nél határozottan kevesebb állapotot tartalmazó automata, amely a mintaillesztést megoldására terveztek. Ennek meggondolására tegyük fel, hogy volna ilyen. Vizsgáljuk meg az m bemenet mellett ennek az automatának a működését. Feltételezésünk szerint ebben az automatában $\delta(a_0, m_1m_2\ldots m_{|m|})$ 1-el van megjelölve. Ha $c_0c_1\ldots c_{|m|} \in A^+$ az érintett állapotok sorozata, akkor az előbbiek miatt $c_0 = a_0$ és $c_{|m|}$ megjelölése 1. A skatulya elv miatt közöttük van kettő, melyek egyformák (hiszen legfeljebb |m| különböző állapotunk van). Legyenek $1 \le i < j \le |m|$ ezeknek az indexei. Az $m_1\ldots m_im_j\ldots m_{|m|}$ szóhoz ekkor a $c_0\ldots c_ic_{j+1}\ldots c_{|m|}$ sorozat tartozik, melyre $c_{|m|}$ megjelölése 1. Ez azt jelenti, hogy $m_1\ldots m_im_j\ldots m_{|m|}$ végéhez illeszkedne m, ami lehetetlen, hiszen $m_1\ldots m_im_j\ldots m_{|m|}$ hossza határozottan kisebb, mint $|m|$.

35.8. Összefoglalás

Összehasonlítva a négy automata felhasználási lehetőségeit a nyers erő automata az $O(|m||u|)$ műveleti idő miatt csak kis mintahossz esetén működtethető gazdaságosan. A többi esetben a működési idő $O(|u|)$, tehát nem függ $|m|$-től. Egy ütem számítási igénye a tárgyalás sorrendje szerint csökken. Ugyanakkor Dömölky automatánál szükség van $|X||m|$ bitnyi tárhelyre és vele arányos időre a *karvek* vektorok kiszámításához. A prekondicionálásos Knuth-Morris-Pratt automata esetén viszont már jelentős többlet memóriát és futási időt igényel a prekondicionálás. Emiatt a Knuth-Morris-Pratt automatát akkor gazdaságos használni, ha ugyanazzal a mintával nagyon sok bemenő szóra kell a feladatot megoldani.