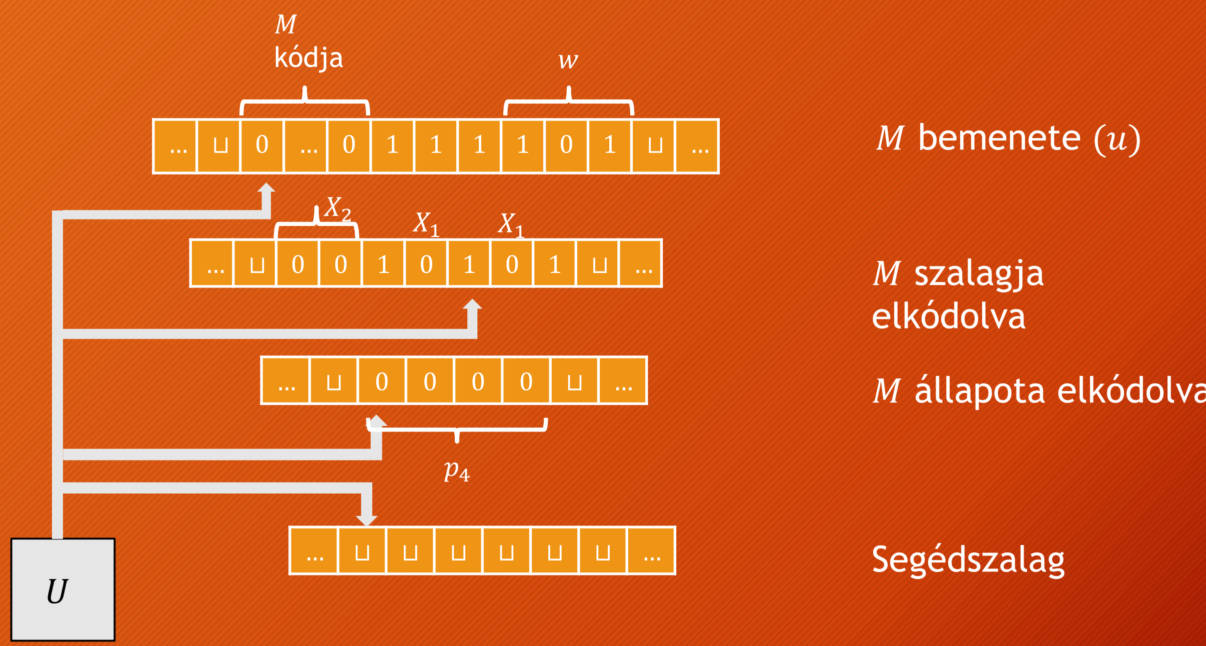
Számításelmélet

Harmadik előadás

Eldönthetetlen problémák 2

- **Tétel:** $L_u \in RE \; (L_u = \{\langle M, w\rangle \mid w \in L(M)\})$
- **Bizonyítás (vázlat):** L_u-t egy ún. **Univerzális Turing-gép** ismeri fel:

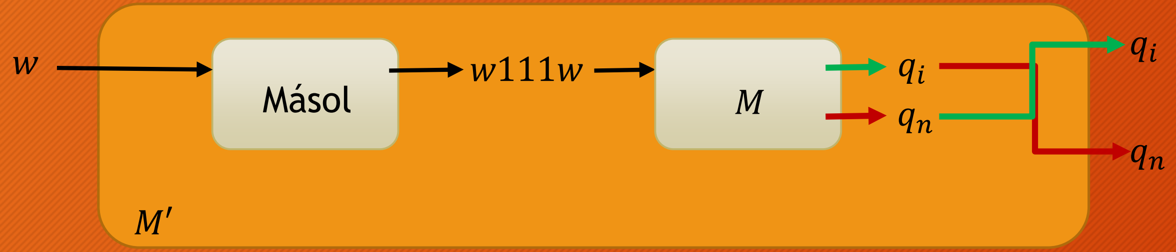


Eldönthetetlen problémák

- **Bizonyítás:**
  - **U működése vázlatosan:**
    - Megnézi, hogy a bemenetén szereplő szó kódol-e Turing-gépet; ha nem elutasítja a bemenetet
    - Létrehozza M kezdőkonfigurációját elkódolva a 2-es (M szalagja) és 3-as (M állapota) szalagon
    - Szimulálja M egy lépését:
      - Leolvassa a második szalagról M aktuálisan olvasott szalagszimbólumát
      - Leolvassa a harmadik szalagról M aktuális állapotát
      - Szimulálja M egy lépését (ha kell, használja a segédszalagot)
    - Ha M aktuális állapota elfogadó vagy elutasító, akkor U is belép a saját elfogadó vagy elutasító állapotába
  - **Megjegyzés:** ha M nem áll meg w-n, akkor U sem áll meg $\langle M, w \rangle$-n

Eldönthetetlen problémák

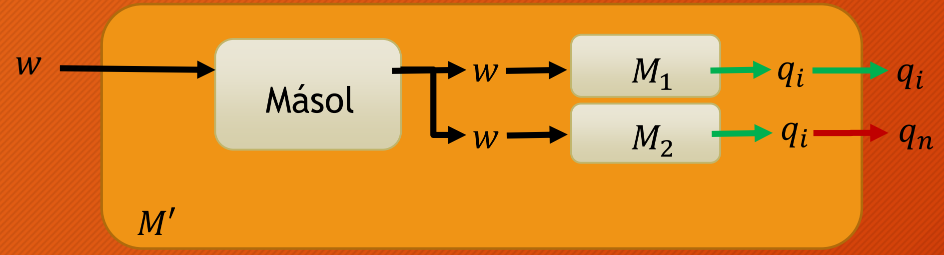
- **Tétel:** $L_u \notin R$
- **Bizonyítás:**
  - Indirekt módon tfh. $L_u \in R$ és legyen M egy L_u-t eldöntő Turing-gép
  - Konstruáljuk meg M'-t:



  - Ekkor $w \in L(M') \Leftrightarrow w111w \notin L(M) \Leftrightarrow$ a w által kódolt Turing-gép nem fogadja el w-t $\Leftrightarrow w \in L_{\text{átló}}$
  - Azaz $L(M') = L_{\text{átló}}$, ami ellentmondás

Eldönthetetlen problémák

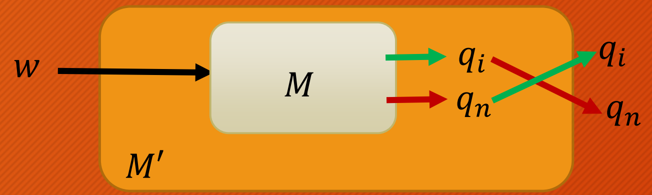
- **Jelölés:** Ha $L \subseteq \Sigma^*$, akkor $\bar{L} \coloneqq \{u \in \Sigma^* \mid u \notin L\}$
- **Tétel:** Ha $L, \bar{L} \in RE$, akkor $L \in R$
- **Bizonyítás:**
  - Legyen M_1 és M_2 rendre az L-t és $\bar{L}$-t felismerő Turing-gép
  - Konstruáljuk meg az M' kétszalagos Turing-gépet:



  - M' lemásolja w-t a második szalagjára, majd **felváltva szimulálja M_1 és M_2 egy-egy lépését** addig, amíg valamelyik elfogadó állapotba lép
  - Így M' az L-et ismeri fel, és **minden bemeneten meg is áll**, azaz $L \in R$

Eldönthetetlen problémák

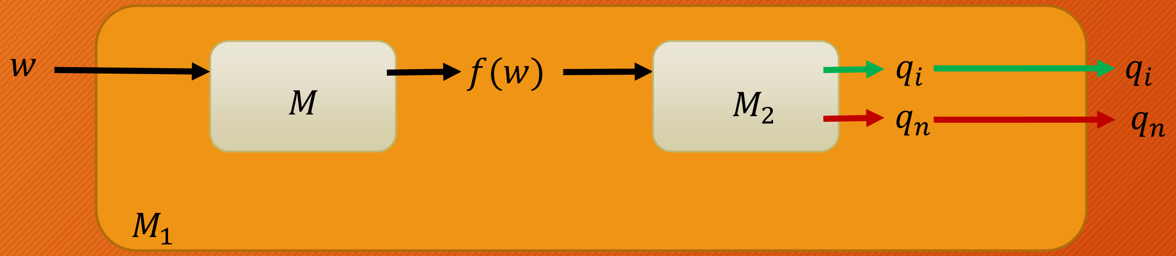
- **Következmény:** RE nem zárt a komplementer-képzésre
- **Bizonyítás:**
  - Legyen $L \in RE - R$ (L_u pl. egy ilyen nyelv)
  - Ekkor $\overline{L} \notin RE$.
  - Valóban, ha $\overline{L} \in RE$, akkor az előző tétel miatt $L \in R$, ami ellentmondás.
- **Tétel:** R zárt a komplementer-képzésre
- **Bizonyítás:**
  - Legyen $L \in R$ és M egy Turing-gép, ami az L-t dönti el
  - Akkor az alábbi M' $\overline{L}$-t dönti el:



Visszavezetések

- **Definíció:**
  - Egy $f: \Sigma^* \to \Delta^*$ függvény **kiszámítható** ha van olyan M Turing-gép, ami minden $u \in \Sigma^*$ szóra, u-val a szalagján indítva, véges sok lépés után megáll, és ekkor a szalagján az $f(u)$ szó van
  - Egy $\boldsymbol{L_1 \subseteq \Sigma^*}$ **nyelv visszavezethető egy** $\boldsymbol{L_2 \subseteq \Delta^*}$ **nyelvre** $(\boldsymbol{L_1 \leq L_2})$, ha van olyan $f: \Sigma^* \to \Delta^*$ kiszámítható függvény, hogy minden $u \in \Sigma^*$ szóra,
  $$\boldsymbol{u \in L_1 \Leftrightarrow f(u) \in L_2}$$
- **Tétel:** Ha $L_1 \leq L_2$ és $L_2 \in R$ $(L_2 \in RE)$, akkor $L_1 \in R$ $(L_1 \in RE)$
- **Bizonyítás:** Csak az első állítást bizonyítjuk, a másik hasonlóan bizonyítható
  - Legyen $L_2 \in R$ és tegyük fel, hogy $L_1 \leq L_2$
  - Legyen M_2 az L_2-t eldöntő, M pedig a visszavezetést kiszámító Turing-gép
  - Konstruáljuk meg M_1-et:

Visszavezetések



- Világos, hogy M_1 az L_1-et dönti el, amiből következik az állítás

- **Következmény:** Ha $L_1 \leq L_2$ és $L_1 \notin R$, akkor $L_2 \notin R$

A megállási probléma

- **Definíció:** Az alábbi nyelvet a **Turing-gépek megállási problémájának** is nevezzük:

$$\boldsymbol{L_h = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ megáll } w\text{ - n}\}}$$

- **Megjegyzés:** $L_u \subseteq L_h$
- **Tétel:** $L_h \notin R$
- **Bizonyítás:** Korábbi tételek alapján elég megmutatni, hogy $L_u \leq L_h$
  - Tetszőleges M Turing-gépre, legyen M' az alábbi Turing-gép
    - M' tetszőleges u bemeneten a következőket teszi:
      1. Futtatja M-et u-n
      2. Ha M q_i-be lép, akkor M' is q_i-be lép
      3. Ha M q_n-be lép, akkor M' egy végtelen ciklusba lép

A megállási probléma

- **Bizonyítás:**
  - **Belátható**, hogy
    1. Az $\boldsymbol{f}: \langle \boldsymbol{M} \rangle \rightarrow \langle \boldsymbol{M}' \rangle$ leképezés egy kiszámítható függvény
    2. Tetszőleges M, w Turing-gép – bemenet párosra:

       $\langle M, w \rangle \in L_u \Leftrightarrow M$ elfogadja w-t $\Leftrightarrow$

       Az M' megáll w-n $\Leftrightarrow \langle M', w \rangle \in L_h$
  - **Tehát** az M' konstrukciója az L_u visszavezetése L_h-ra
  - **Következik, hogy $L_h \notin R$**
  - **Megjegyzés:**
    - visszavezetések megadásakor jellemzően csak azon szavakra térünk ki, amelyek kódolnak valamilyen objektumot
    - Pl. a fenti esetben nem foglalkoztunk azzal, hogy f mit rendeljen egy olyan szóhoz, ami nem kódol Turing-gépet (ami egyébként egy könnyen kezelhető eset)

A megállási probléma

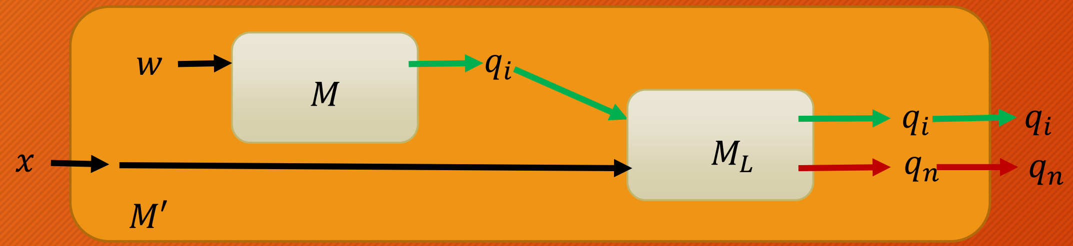
- **Tétel:** $L_h \in RE$
- **Bizonyítás:** Korábbi tétel alapján elég megmutatni, hogy $L_h \leq L_u$
  - **Tetszőleges M Turing-gépre, legyen M' az alábbi Turing-gép:**
    - M' tetszőleges u bemeneten a következőket teszi:
      1. Futtatja M-et u-n
      2. Ha M q_i-be vagy q_n-be lép, akkor M' q_i-be lép
  - **Belátható,** hogy
    1. Az $\boldsymbol{f}: \langle \boldsymbol{M} \rangle \to \langle \boldsymbol{M}' \rangle$ leképezés egy kiszámítható függvény
    2. Tetszőleges M, w Turing-gép – bemenet párosra,
       $\langle M, w \rangle \in L_h \Leftrightarrow$ Az M megáll w-n $\Leftrightarrow$
       A M' elfogadja w-t $\Leftrightarrow \langle M', w \rangle \in L_u$
  - **Tehát** M' konstrukciója az L_h visszavezetése L_u-ra
  - **Következik, hogy $L_h \in RE$**

Rice tétele

- **Definíció:**
  - Tetszőleges $\mathcal{P} \subseteq RE$ halmazt **a rekurzívan felsorolható nyelvek egy tulajdonságának** nevezzük
  - $\mathcal{P}$ **triviális**, ha $\mathcal{P} = \emptyset$ vagy $\mathcal{P} = RE$
  - $\boldsymbol{L_{\mathcal{P}} := \{ \langle M \rangle \mid L(M) \in \mathcal{P} \}}$
- **Tétel:** Ha $\mathcal{P} \subseteq RE$ egy nem triviális tulajdonság, akkor $L_{\mathcal{P}} \notin R$
- **Bizonyítás:**
  - Legyen $\mathcal{P}$ egy nem triviális tulajdonság
  - Mivel $L_u \notin R$, elég megmutatni, hogy $L_u \leq L_{\mathcal{P}}$
  - **Először feltesszük, hogy $\emptyset \notin \mathcal{P}$**
  - Legyen $L \in \mathcal{P}$, $L \neq \emptyset$ és M_L egy L-et felismerő Turing-gép

Rice tétele

- **Bizonyítás ($\boldsymbol{L_u \leq L_{\mathcal{P}}}$):**
  - Legyen $\langle M, w\rangle$ egy tetszőleges Turing-gép – bemenet páros
  - **Legyen $\boldsymbol{M'}$ a következő kétszalagos Turing-gép:**



  - **$\boldsymbol{M'}$ működése:**
    1. Szimulálja M-et w-n
    2. Ha M elutastja w-t, akkor M' q_n-be lép leáll (azaz nem fogadja el x-et $\Rightarrow L(M') = \emptyset$)
    3. Ha M elfogadja w-t, akkor M' szimulálja M_L-et x-en (azaz $L(M') = L$)
  - Belátható, hogy $\langle M, w\rangle \in L_u \Rightarrow L(M') = L \Rightarrow L(M') \in \mathcal{P} \Rightarrow \langle M'\rangle \in L_{\mathcal{P}}$ és
    $\langle M, w\rangle \notin L_u \Rightarrow L(M') = \emptyset \Rightarrow L(M') \notin \mathcal{P} \Leftrightarrow \langle M'\rangle \notin L_{\mathcal{P}}$
  - Tehát, $L_u \leq L_{\mathcal{P}}$

Rice tétele

- **Bizonyítás (az $\emptyset \in \mathcal{P}$ eset):**
  - Már tudjuk, hogy ha $\emptyset \notin \mathcal{P}$, akkor $L_{\mathcal{P}} \notin R$
  - **Tegyük fel, hogy $\emptyset \in \mathcal{P}$**
    - Ismételjük meg a fenti bizonyítást $\overline{\mathcal{P}} = \boldsymbol{RE} - \mathcal{P}$-re
    - Kapjuk, hogy $L_{\overline{\mathcal{P}}} \notin R$
    - **Másrészt,** $L_{\overline{\mathcal{P}}} = \overline{L_{\mathcal{P}}}$

$\overline{\mathcal{P}}$-beli nyelveket felismerő T.-gépek kódjai

Olyan T.-gépek kódjai melyek nem $\mathcal{P}$-beli nyelveket ismernek fel

-
  -
    - **Tehát,** $\overline{L_{\mathcal{P}}} \notin R$
    - **Következik, hogy $L_{\mathcal{P}} \notin R$** (mivel R zárt a komplementer-képzésre)

Post Megfelelkezési Probléma

- **Definíció:**
  - Legyen $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in \Sigma^+ \ (n \geq 1)$
  - A $\boldsymbol{D} = \left\{\frac{\boldsymbol{u_1}}{\boldsymbol{v_1}}, \dots, \frac{\boldsymbol{u_n}}{\boldsymbol{v_n}}\right\}$ halmazt **dominókészletnek** nevezzük
  - Az $\frac{\boldsymbol{u_{i_1}}}{\boldsymbol{v_{i_1}}} \dots \frac{\boldsymbol{u_{i_m}}}{\boldsymbol{v_{i_m}}}$ $(m \geq 1, 1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n)$ dominósorozat a $\boldsymbol{D}$ **egy megoldása**, ha

$$\boldsymbol{u_{i_1} \dots u_{i_m} = v_{i_1} \dots v_{i_m}}$$

  - **Példa:** A $\left\{\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{ca}}, \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{ab}}, \frac{\boldsymbol{ca}}{\boldsymbol{a}}, \frac{\boldsymbol{abc}}{\boldsymbol{c}}\right\}$ egy megoldása: $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{ab}} \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{ca}} \frac{\boldsymbol{ca}}{\boldsymbol{a}} \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{ab}} \frac{\boldsymbol{abc}}{\boldsymbol{c}}$
  - $\boldsymbol{L_{PMP} \coloneqq \{\langle D \rangle \mid D \text{ - nek van megoldása}\}}$
- **Tétel:** $L_{PMP} \notin R$, de $L_{PMP} \in RE$

CF nyelvekkel kapcsolatos eldönthetetlen problémák

- **Definíció:**
  - Egy G környezetfüggetlen (CF, 2-es típusú) nyelvtan **egyértelmű**, ha minden $L(G)$-beli szónak **pontosan egy baloldali levezetése van** G-ben
  - $\boldsymbol{L_{ECF}} := \{\langle \boldsymbol{G} \rangle \mid \boldsymbol{G}$ **egy egyértelmű CF nyelvtan** $\}$
- **Tétel:** $L_{ECF} \notin R$
- **Bizonyítás:** Először megmutatjuk, hogy $\boldsymbol{L_{PMP} \leq \overline{L_{ECF}}}$
  - Legyen $D = \left\{\frac{u_1}{v_1}, \dots, \frac{u_n}{v_n}\right\}$ egy dominókészlet
  - Legyen $\boldsymbol{G_D := (\{S, A, B\}, \Sigma \cup \Delta, P \cup \{S \rightarrow A, S \rightarrow B\}, S)}$, ahol
    - $\Delta = \{a_1, \dots, a_n\}$, $\Sigma \cap \Delta = \emptyset$
    - $P = \{A \rightarrow u_1 A a_1, \dots, A \rightarrow u_n A a_n, A \rightarrow \varepsilon\} \cup \{B \rightarrow v_1 B a_1, \dots, B \rightarrow v_n B a_n, B \rightarrow \varepsilon\}$
  - **Megmutatjuk**, hogy az $\boldsymbol{f}: \langle \boldsymbol{D} \rangle \rightarrow \langle \boldsymbol{G_D} \rangle$ konstrukció tényleg visszavezetés

CF nyelvekkel kapcsolatos eldönthetetlen problémák

- Először tegyük fel, hogy $\frac{u_{i_1}}{v_{i_1}} \dots \frac{u_{i_m}}{v_{i_m}}$ **a D egy megoldása**
  - Akkor $u_{i_1} \dots u_{i_m} = v_{i_1} \dots v_{i_m}$
  - A G_D konstrukciója miatt érvényesek az alábbi levezetések: $S \Rightarrow A \Rightarrow^* u_{i_1} \dots u_{i_m} a_{i_m} \dots a_{i_1}$ és $S \Rightarrow B \Rightarrow^* v_{i_1} \dots v_{i_m} a_{i_m} \dots a_{i_1}$
  - Ezért $\boldsymbol{G_D}$ nem egyértelmű, azaz $\boldsymbol{G_D} \in \overline{\boldsymbol{L_{ECF}}}$
- Most tegyük fel azt, hogy $\boldsymbol{G_D}$ nem egyértelmű
  - Akkor van olyan $w \in L(G_D)$ szó, aminek van két különböző baloldali levezetése
  - Az egyik levezetés $S \rightarrow A$-val a másik pedig $S \rightarrow B$-vel kell kezdődjön
  - Viszont w alakja a következő: $w = xy$, ahol $x \in \Sigma^*$ és $y \in \{a_1, \dots, a_n\}^*$
  - Ezért a fenti két levezetésben a szabályok ugyanolyan sorrendben kell alkalmazásra kerüljenek
  - Következik, hogy **D-nek van megoldása**
- Mivel $L_{PMP} \notin R$, következik, hogy $\overline{L_{ECF}} \notin R$, amiből kapjuk, hogy $L_{ECF} \notin R$

CF nyelvekkel kapcsolatos eldönthetetlen problémák

- **Tétel:** Legyen G_1 és G_2 két CF nyelvtan. Az alábbi problémák eldönthetetlenek
  - a) $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$
  - b) $L(G_1) = L(G_2)$
  - c) $L(G_1) = \Gamma^*$ valamely Γ ábécére
  - d) $L(G_1) \subseteq L(G_2)$
- **Bizonyítás:** Legyen D egy dominókészlet, G_A, G_B a G_D két rész-nyelvtana rendre az A-t és B-t tekintve kezdőszimbólumnak
  - a) Legyen $G_1 = G_A$ és $G_2 = G_B$
    - Ekkor D-ek pontosan akkor van megoldása, ha $L(G_A) \cap L(G_B) \neq \emptyset$
  - b) Ismert, hogy $\overline{\boldsymbol{L(G_A)}}$ és $\overline{\boldsymbol{L(G_B)}}$ is CF nyelvek
    - $(\Sigma \cup \Delta)^*$ is CF nyelv (Σ és Δ rendre a D-beli dominók ábécéje és az $a_1, \dots, a_n$ halmaz)
    - Legyen G_1 az $\overline{\boldsymbol{L(G_A)}} \cup \overline{\boldsymbol{L(G_B)}} = \overline{\boldsymbol{L(G_A)} \cap \boldsymbol{L(G_B)}}$ nyelvet generáló nyelvtan
    - Ekkor $L(G_1)$-ben pontosan azok a szavak vannak, amik D-nek nem megoldásai
    - Legyen G_2 a $(\Sigma \cup \Delta)^*$ nyelvet generáló nyelvtan
    - Ekkor $L(G_1) = L(G_2) \Leftrightarrow D$-nek nincs megoldása
  - c) Egyszerűen adódik $\Gamma = (\Sigma \cup \Delta)$ választással
  - d) Következik abból, hogy $L(G_1) = L(G_2) \Leftrightarrow L(G_1) \subseteq L(G_2)$ és $L(G_2) \subseteq L(G_1)$