Számításelmélet

Második előadás

Többszalagos Turing-gép

- **Többszalagos Turing-gép**
  - Turing-gép k (konstans) számú szalaggal
  - A szalagok mindegyike rendelkezik egy független író / olvasó fejjel
  - A bemenet az első szalagra kerül, a többi szalag üres
  - Az átmeneti függvény:

    $$\boldsymbol{\delta}: (\boldsymbol{Q} - \{\boldsymbol{q_i}, \boldsymbol{q_n}\}) \times \boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{k}} \to \boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{k}} \times \{\boldsymbol{L}, \boldsymbol{R}\}^{\boldsymbol{k}}$$
  - A további komponensek mint az egyszalagos esetben
  - **Megjegyzés:** az egyszalagosra tanult definíciók kiterjeszthetők a többszalagos esetre (konfiguráció-átmenet, felismert nyelv, időigény, stb.)

Többszalagos Turing-gép

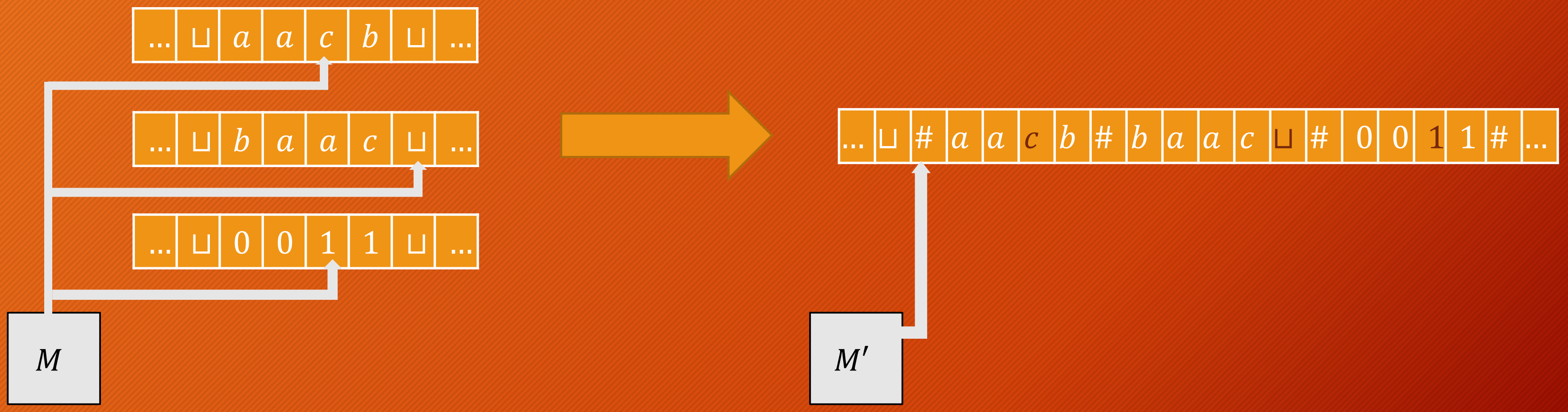
- **Feladat:** adjunk kétszalagos Turing-gépet, ami a korábban látott

$$L = \{uu^{-1} \mid u \in \{a,b\}^*\}$$

  nyelvet dönti el
- Egy L nyelv $\boldsymbol{f(n)}$ **időben eldönthető**, ha van olyan $f(n)$ időigényű, akár többszalagos Turing-gép, ami eldönti L-t
- **Feladat:** milyen időben dönti el a megadott kétszalagos Turing-gép a fenti L nyelvet?
- **Két Turing-gép ekvivalens**, ha ugyanazt a nyelvet ismerik fel

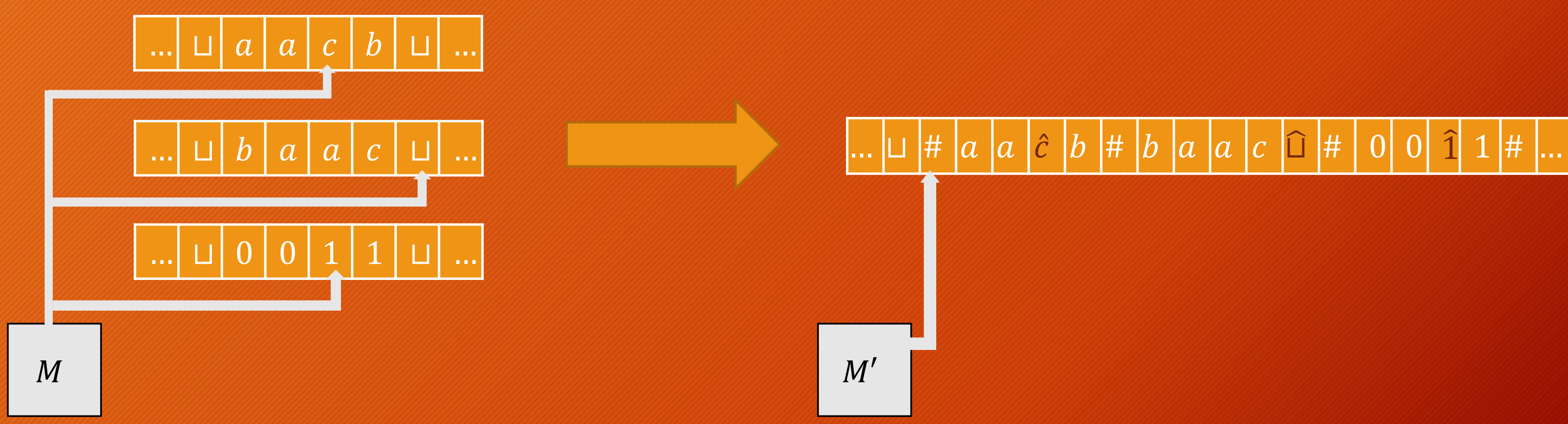
Többszalagos Turing-gép

- **Tétel:** Minden k-szalagos M Turing-géphez van vele ekvivalens egyszalagos M' Turing-gép
- **Bizonyítás:** M' egy szalagon tárolja az M teljes konfigurációját:



Többszalagos Turing-gép

- **Tétel:** Minden k-szalagos M Turing-géphez van vele ekvivalens egyszalagos M' Turing-gép
- **Bizonyítás:** M' egy szalagon tárolja az M teljes konfigurációját:



Többszalagos Turing-gép

- **A szimuláció menete egy $\boldsymbol{a_1 a_2 \dots a_n}$ bemeneten:**
  1. M' előállítja M kezdőkonfigurációját:

…	$\sqcup$	#	$\hat{a}_1$	a_2	…	a_n	#	$\hat{\sqcup}$	#	$\hat{\sqcup}$	#	…

  2. M' végigmegy a szalagon (számolja a #-okat) és eltárolja a ˆ-pal megjelölt szimbólumokat az állapotában
  3. M' az M átmenetfüggvénye alapján aktualizálja a szalagját (ha M valamelyik szalagján nő a szó hozza, akkor M'-nek az adott ponttól mozgatnia kell a szalagja tartalmát jobbra)
  4. Ha M elfogadó vagy elutasító állapotba lép, akkor M' is belép a saját elfogadó vagy elutasító állapotába
  5. Egyébként M' folytatja a szimulációt a 2-ik ponttal
- **Megjegyzés:** M' időigény-romlása négyzetes

Többszalagos Turing-gép

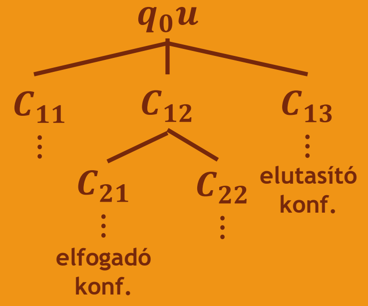
- **Turing-gép egy irányban végtelen szalaggal**
  - A Turing-gép egy, a bal oldalán zárt szalaggal rendelkezik
  - A fej nem tud „leesni” a bal oldalon, még ha az állapot-átmeneti függvény balra lépést ír is elő
- **Tétel:** Minden egyszalagos M Turing-géphez van vele ekvivalens egy irányban végtelen szalagos Turing-gép
- **Bizonyítás (vázlat):**
  - Először szimuláljuk M-et egy olyan M' Turing-géppel, ami két darab egy irányban végtelen szalaggal rendelkezik:
    - M' megjelöli mindkét szalagjának első celláját egy speciális szimbólummal
    - Ezután az első szalagján szimulálja M-et akkor, amikor az a fej kezdőpozícióján vagy attól jobbra dolgozik,
    - A második szalagján pedig akkor, amikor az M a fej kezdőpozíciótól balra dolgozik (ezen a szalagon az ettől a pozíciótól balra lévő szó tükörképe van)
  - Ezután szimuláljuk M'-t egy egy irányban végtelen szalagos Turing-géppel (az előző tételben látott bizonyításhoz hasonlóan)

Nemdeterminisztikus Turing-gép

- **Nemdeterminisztikus Turing-gép**
  - A két irányban végtelen szalaggal rendelkező Turing-gép általánosítása
  - Az átmeneti függvény:
    $$\boldsymbol{\delta}: (\boldsymbol{Q} - \{\boldsymbol{q_i}, \boldsymbol{q_n}\}) \times \boldsymbol{\Gamma} \to \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{\Gamma} \times \{\boldsymbol{L}, \boldsymbol{R}\})$$
  - A további komponensek mint az egyszalagos esetben
- **Konfiguráció átmenet:** $\vdash \subseteq C_M \times C_M$
  - Legyen $C_1, C_2 \in C_M$, $\boldsymbol{C_1} \vdash \boldsymbol{C_2}$ ha az alábbiak egyike teljesül
    - $C_1 = uqav, C_2 = ubpv'$ és $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{R}) \in \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{a})$, ahol $a, b \in \Gamma, u, v \in \Gamma^*, v' = v$, ha $v \neq \varepsilon$ és $v' = \sqcup$ egyébként
    - $C_1 = ucqav, C_2 = upcbv$ és $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{L}) \in \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{a})$, ahol $a, b, c \in \Gamma, u, v \in \Gamma^*$

Nemdeterminisztikus Turing-gép

- A **többlépéses konfiguráció átmenet** és a **felismert nyelv** a determinisztikus esethez hasonlóan definiálható
- **Megjegyzés:** egy M nemdet. Turing-gép számítása egy u szón egy ún. **számítási (konfigurációs) fával** szemléltethető:



Pl. $q_0u \vdash C_{12} \vdash C_{21} \vdash \cdots \vdash vq_iw$

- ***M* elfogadja az *u*-t** ha a számítási fa legalább egy levele elfogadó konfiguráció

Nemdeterminisztikus Turing-gép

- **M eldönti az $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvet,** ha felismeri és minden $u \in \Sigma^*$ szóra az M számítási fája véges és minden levele elfogadó vagy elutasító konfiguráció
- **M $f(n)$ időigényű**, ha minden $u \in \Sigma^*$ n hosszú szóra a számítási fa legfeljebb $f(n)$ magas
- **Megjegyzés:** a k-szalagos Turing-gép definíciója értelemszerűen kiterjeszthető nemdeterminisztikus Turing-gépre is
- **Feladat:** adjunk nemdeterminisztikus Turing-gépet, ami az

$$L = \{\, uu^{-1} \mid u \in \{a, b\}^* \,\}$$

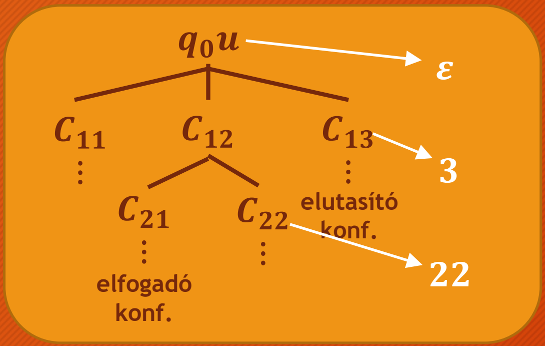
nyelvet dönti el

Nemdeterminisztikus Turing-gép

- **Tétel:** Minden $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n)$ $f(n)$ idejű nemdeterminisztikus Turing-géphez megadható egy ekvivalens, $2^{O(f(n))}$ idejű M' (det.) Turing-gép
- **Bizonyítás:** M' egy adott $u \in \Sigma^*$ bemeneten szimulálja az M számítási fájában szereplő összes számítást a következőképpen
  - Legyen d az M átmenetfüggvényének jobb oldalán szereplő halmazok számosságának a maximuma, azaz $\boldsymbol{d = \max_{(q,a)\in Q\times\Gamma}\{|\delta(q,a)|\}}$
  - Legyen $\boldsymbol{T = \{1, 2, \dots, d\}}$ (azaz T egy ábécé)
  - Tegyük fel, hogy minden $(q, a) \in Q \times \Gamma$ esetén **a $\boldsymbol{\delta(q,a)}$ elemeinek van egy rögzített sorrendje**

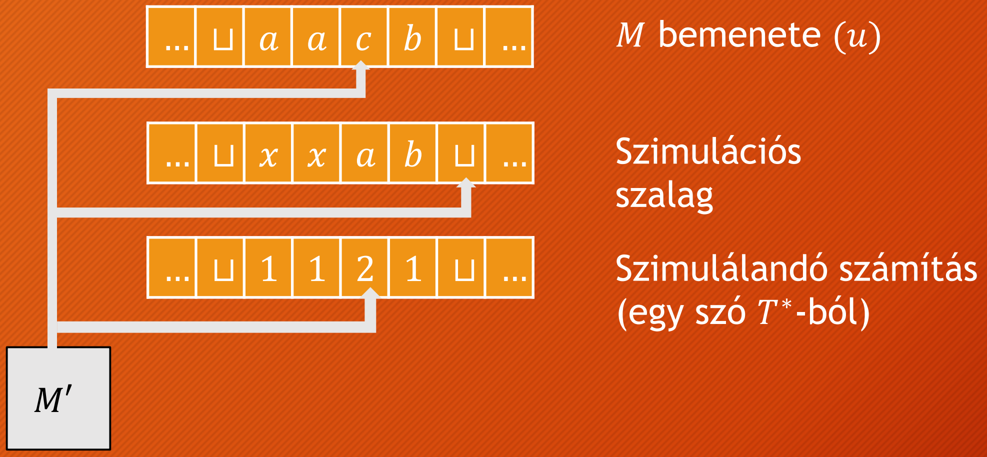
Nemdeterminisztikus Turing-gép

- **Bizonyítás:**
  - Tekintsük az M számítási fáját az u-n
  - A fa minden szögpontjához egyértelműen hozzárendelhető egy T^*-beli szó:



Nemdeterminisztikus Turing-gép

- **Bizonyítás:**
  - M' egy konfigurációja:



Nemdeterminisztikus Turing-gép

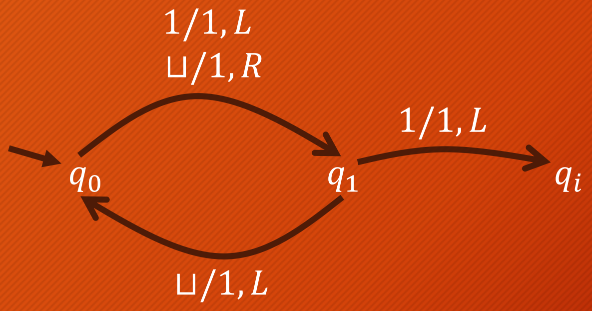
- **Bizonyítás:**
  - M' működése:
    - **M' kezdőkonfigurációja:** az 1-es szalag tartalmazza a bemenetet, a 2-es és 3-as szalagok üresek
    - **Amíg nincs elfogadás**
      - M' rámásolja az 1-es szalag tartalmát a 2-esre
      - **Amíg a 3-ik szalagon a fej nem ⊔-ra mutat**
        - Legyen k a 3-ik szalagon a fej pozíciójában lévő betű
        - Legyen a 2-ik szalagon a fej pozíciójában lévő betű a és a szimulált M aktuális állapota q
        - **Ha $\delta(q, a)$-nak van k-ik eleme, akkor**
          - M' szimulálja M egy lépését ezen elem szerint
          - Ha ez lépés q_i-be vezet, akkor M' is elfogadó állapotba lép és leáll
          - Ha ez lépés q_n-be vezet, akkor M' kilép ebből a ciklusból
        - M' a 3-ik szalagon eggyel jobbra lép
      - M' lexikografikusan növeli eggyel a harmadik szalagon lévő szót

Nemdeterminisztikus Turing-gép

- **Bizonyítás:**
  - M' akkor és csak akkor lép elfogadó állapotba, ha a szimulált M elfogadó állapotba lép, azaz a két gép ekvivalens
  - M'-nek $f(n)$-ben exponenciálisan sok számítást kell megvizsgálnia, azaz M' időigénye $2^{O(f(n))}$
- **Megjegyzés:**
  - Abból, hogy a bizonyításban alkalmazott szimuláció exponenciális időigényű még nem következik, hogy nincs hatékonyabb szimuláció
  - Az a sejtés, hogy nem lehet a nemdeterminisztikus Turing-gépet az időigény drasztikus romlása nélkül determinisztikus Turing-géppel szimulálni

Eldönthetetlen problémák

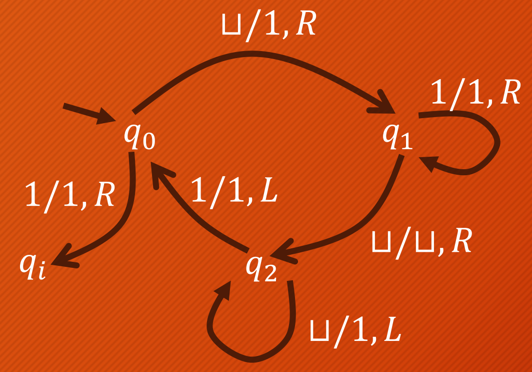
- Miért nehéz a Turing-gépekkel kapcsolatos kérdések eldöntése?
- A 2 állapotú „szorgos hód”
  - Mennyit lép és mennyi 1-est ír a szalagra, amíg megáll:



  - Válasz: 4 1-es 6 lépés után

Eldönthetetlen problémák

- A 3 állapotú „szorgos hód”
  - Mennyit lép és mennyi 1-est ír a szalagra, amíg megáll:



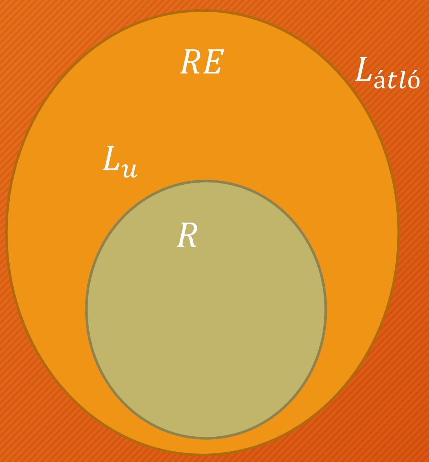
  - Válasz: 6 1-es 14 lépés után

Eldönthetetlen problémák

- A 4 állapotú „szorgos hód”
  - 13 1-est ír a szalagra 107 lépés után
- A legjobb 5 állapotú jelölt:
  - 4098 1-est ír a szalagra 47.176.870 lépés után
- A legjobb 6 állapotú jelölt:
  - $\approx 3.5 \cdot 10^{18267}$ 1-est ír a szalagra $\approx 7.4 \cdot 10^{36534}$ lépés után

Eldönthetetlen problémák

- **Emlékeztető:** $\boldsymbol{R \subseteq RE}$
- **Cél:**



$$L_u = \{\langle M, w\rangle \mid w \in L(M)\}$$

$$L_{\text{átló}} = \{\langle M\rangle \mid \langle M\rangle \notin L(M)\}$$

- **Megjegyzés:** Ebben a részben csak $\{0,1\}$ bemenő ábécével rendelkező Turing-gépeket vizsgálunk

Eldönthetetlen problémák

- **Turing-gépek elkódolása** (azaz $\langle M, w\rangle$ és $\langle M\rangle$ definíciója)
- Legyen $M = (Q, \{0,1\}, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n)$ és tfh.
  - $\boldsymbol{Q = \{p_1, \dots, p_k\}}$ valamely $k \geq 3$-ra úgy, hogy $p_1 = q_0, p_{k-1} = q_i$ és $p_k = q_n$
  - $\boldsymbol{\Gamma = \{X_1, \dots, X_m\}}$ valamely $m \geq 3$-ra úgy, hogy $X_1 = 0, X_2 = 1$ és $X_3 = \sqcup$
  - a fej irányait **$\boldsymbol{D_1}$-gyel és $\boldsymbol{D_2}$-vel** jelöljük
- M egy $\boldsymbol{\delta(p_i, X_j) = (p_r, X_s, D_t)}$ átmenete egyértelműen elkódolható az $\boldsymbol{0^i10^j10^r10^s10^t}$ szóval
- $\boldsymbol{\langle M\rangle \coloneqq \langle\delta_1\rangle 11 \langle\delta_2\rangle 11 \dots 11 \langle\delta_l\rangle}$, ahol $\delta_1, \dots, \delta_l$ az M összes átmenete
- $\boldsymbol{\langle M, w\rangle \coloneqq \langle M\rangle 111 w}$

Eldönthetetlen problémák

- **Megjegyzés:** A $\{0,1\}^*$ elemei felsorolhatóak:

$$\{0,1\}^* = \{\underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{0-hosszú szó}}, \underbrace{\mathbf{0}, \mathbf{1}}_{\text{1-hosszú szavak lexikografikusan rendezve}}, \underbrace{\mathbf{00}, \mathbf{01}, \mathbf{10}, \mathbf{11}}_{\text{2-hosszú szavak lexikografikusan rendezve}}, \mathbf{000}, \dots \mathbf{111}, \dots\}$$

- **Jelölés:** Minden $i \geq 1$-re,
  - $\boldsymbol{w_i}$ jelöli a $\{0,1\}^*$ halmaz i-ik elemét
  - $\boldsymbol{M_i}$ jelöli a w_i által kódolt Turing-gépet (ha w_i nem kódol Turing-gépet, akkor M_i egy olyan tetszőleges Turing-gép, ami nem fogad el semmit)

Eldönthetetlen problémák

- **Tétel:** $L_{\text{átló}} \notin RE$
- **Bizonyítás:** Tekintsük azt a T táblázatot, mely i-ik sorának j-ik oszlopa $(i, j \geq 1)$, azaz $T(i, j)$, akkor és csak akkor 1, ha $w_j \in L(M_i)$
- Legyen $\boldsymbol{d}$ a T **átlójában olvasható végtelen hosszú bitsztring, és legyen** $\bar{\boldsymbol{d}}$ **a** $\boldsymbol{d}$ **bitenkénti komplementere**
- Ekkor igazak az alábbi megjegyzések:
  - Minden $i \geq 1$-re, T i-ik sora az $L(M_i)$ nyelv karakterisztikus függvénye
  - $\bar{\boldsymbol{d}}$ az $L_{\text{átló}}$ karakterisztikus függvénye
  - Minden Turing-géppel felismerhető, azaz RE-beli nyelv karakterisztikus függvénye megegyezik T valamelyik sorával
  - $\bar{d}$ különbözik T minden sorától
- **Ezek alapján $\boldsymbol{L_{\text{átló}}}$ különbözik az összes $\boldsymbol{RE}$-beli nyelvtől**