

Név (olvashatóan): _____ Név (aláírás): _____ Neptun kód: _____

Logika és számításelmélet, számításelmélet zh, Szerda 8:00, A. Megoldások

1. Feladat. (10 pont)

- a) Legyen $f(n) = 2^n$ és $g(n) = 9^{\frac{n}{2}}$. Hogyan viszonyulnak egymáshoz ezek a függvények a növekedési ütemük alapján? A választ indokolja is!

Megoldás: $g(n) = 9^{\frac{n}{2}} = 3^n = (1.5 \cdot 2)^n = 1.5^n \cdot 2^n$, tehát nincs olyan c konstans amivel megszorozva $f(n)$ -t $cg(n) \leq f(n)$ teljesülne valamely küszöbindextől kezdve. Következik, hogy $g(n)$ gyorsabban nő, mint $f(n)$.

- b) Legyen D_{fin} azon végtelen hosszú bitsztringek (azaz 0-t és 1-et tartalmazó végtelen szavak) halmaza, melyekben véges sok 0 van. Mi a D_{fin} halmaz számossága? A választ indokolja is!

Megoldás: Vegyük észre, hogy megadható egy bijekció D_{fin} és a következő halmaz között: $A = \{\varepsilon\} \cup \{u0 \mid u \in \{0,1\}^*\}$ (azaz minden D_{fin} -beli szó azonosítható a leghosszabb olyan prefixével, ami nem 1-esre végződik). Mivel az A halmaz számossága megszámlálhatóan végtelen, ezért D_{fin} számossága is az.

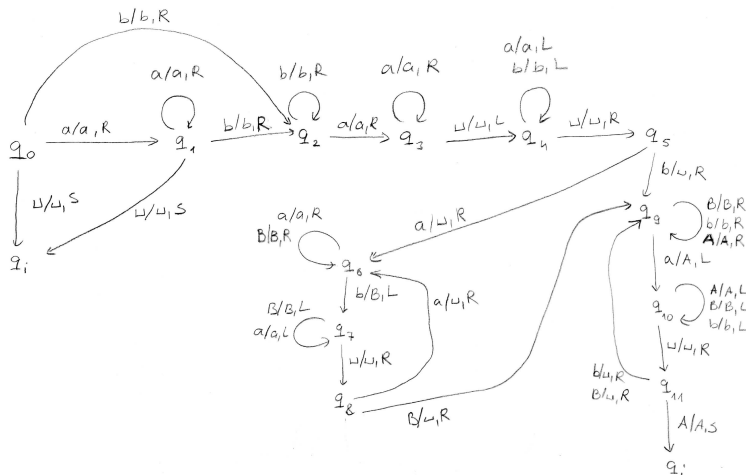
2. Feladat. (8 pont) Adjon egy olyan egyszalagos determinisztikus Turing-gépet, ami az

$$L = \{a^i b^j a^k \mid 0 \leq i \leq j \leq k\}$$

nyelvet ismeri fel. Ismertesse vázlatosan a megadott Turing-gép működését!

Megjegyzés: A megoldás hasonló lesz, mint a gyakorlaton látott $a^n b^n c^n$ nyelvet eldöntő Turing-gép, azzal a különbséggel, hogy két ciklust használunk a betűk „párosításához”: egyszer párosítjuk a szó elejei a -kat a szó közepén lévő b -kkel, majd ezeket a b -ket a szó végi a -kal.

Megoldás: Az alábbi Turing-gép (remélhetőleg) a fenti nyelvet dönti el.

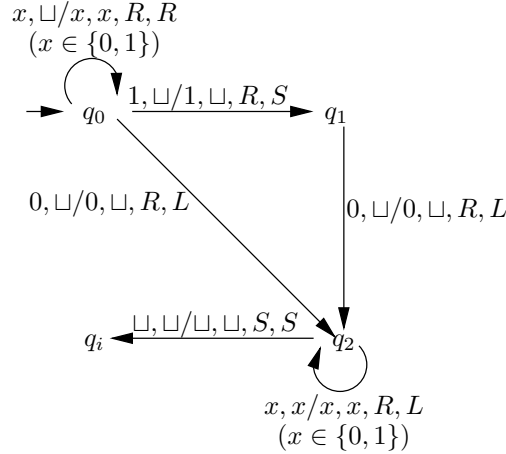


Működése:

- $q_0 - q_5$: Megnézzük, hogy jó alakja ven-e a bemenetnek, közben, ha a^* alakú, el is fogadjuk;

2. $q_5 - q_8$: Ha a -val kezdődik a szó (és ez esetben követni fogja öt néhány b is), akkor leellenőrizzük, hogy legalább annyi b van-e a szóban, mint amennyi a a szó elején; közben kitöröljük a szó elejei a -kat;
3. $q_5 - q_{11}$: Leellenőrizzük, hogy legalább annyi a van a szó végén, mint amennyi b van benne.

3. Feladat. (8 pont) Milyen nyelvet ismer fel az alábbi (nemdeterminisztikus) Turing-gép (bemenő jelek halmaza: $\{0, 1\}$)? Elfogadja-e a gép a 0100 szót! Ha igen, akkor adja meg a gép egy elfogadó számítását ezen a szón! (Nem kell az egész számítási fát megadni, elég csak magát az elfogadó számítást leírni.)



Megoldás: A gép az $L = \{u10u^{-1} \mid u \in \{0, 1\}^*\} \cup \{u0u^{-1} \mid u \in \{0, 1\}^*\}$ nyelvet ismeri fel. Ezek alapján elfogadja a 0100 szót.

4. Feladat. (8 pont) Adjon meg egy olyan egyszalagos Turing-gépet, ami az alábbi szófüggvényt számolja ki:

$$f : X^n \mapsto (XY)^n,$$

ahol $n \geq 0$. (Tehát például $f(XXX) = XYXYXY$.)

Ismertesse vázlatosan a megadott Turing-gép működését!

Ötlet: A gyakorlaton látott $f : X^n \mapsto X^{2n}$ függvényt kiszámoló Turing-gépet lehetett felírni azzal a módosítással, hogy ha X^{2n} már megvan, akkor elfogadás előtt még minden második X -et Y -ra kellett írni.

5. Feladat. (8 pont) Legyen $L_{\exists halt} = \{\langle M \rangle \mid \text{Van olyan bemenet amin } M \text{ megáll}\}$ és $L_{\exists accept} = \{\langle M \rangle \mid \text{Van olyan bemenet amit } M \text{ elfogad}\}$. Vázolja $L_{\exists halt}$ egy lehetséges visszavezetését $L_{\exists accept}$ -re! Mit mondhatunk el ez alapján az $L_{\exists accept}$ eldönthetőségéről, ha tudjuk, hogy $L_{\exists halt}$ nem eldönthető?

Megoldás: Tetszőleges M Turing-géphez konstruáljuk meg M' a következő módon. M' annyiban különbözik M -től, hogy M q_n -be vezető átmeneteit q_i -be irányítjuk. Mivel így M akkor és csak akkor áll meg egy u szón, ha M' elfogadja u -t, kapjuk, hogy M pontosan akkor áll meg legalább egy szón, ha M' elfogad legalább egy szót. Azaz a fenti konstrukció egy megfelelő visszavezetés. Ezek alapján $L_{\exists halt}$ eldönthetlensége implikálja $L_{\exists accept}$ eldönthetlenségét.

6. Feladat. (8 pont) Legyen k SZIN a következő probléma. Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf. Kérdés: kiszínezhetők-e G csúcsai k színnel úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző

színűek? Adja meg a 3SZIN probléma egy polinom idejű visszavezetését a 6SZIN problémára! Mit tudunk elmondani ezek alapján a 6SZIN probléma bonyolultságáról, ha tudjuk, hogy 3SZIN NP-teljes?

Megoldás: Legyen G egy tetszőleges gráf. A gyakorlaton látott módon felvesszünk három új csúcsot a G csúcsai mellé és ezeket összekötjük G minden csúcsával. Továbbá a három új csúcsot is összekötjük egymással. Legyen G' az így kapott gráf. Látható, hogy G pontosan akkor színezhető három színnel, ha G' színezhető hat színnel. Tehát a fenti konstrukció egy megfelelő polinom idejű visszavezetés. Ezek alapján 3SZIN NP-teljessége implikálja 6SZIN NP-nehézségét.