Név (olvashatóan):__________________ Név (aláírás):__________________ Neptun kód: ___________

Logika és számításelmélet, logika zh, Hétfő 16:00, A.

1. Feladat. (12 pont) Igaz vagy hamis? A válaszokat röviden indokolja is!

a) Legyenek A_1, A_2, A_3 ítéletkalkulusbeli formulák úgy, hogy mindegyikük csak a következő szimbólumokat tartalmazhatja: $X, \neg, \wedge, \vee, \supset, (,)$. A fentiek között van két olyan formula melyek közül az egyik logikai következménye a másiknak.

Megoldás: A fenti formulák mindegyike a következő formulák valamelyikével ekvivalens: $\{X, \neg X, \downarrow, \uparrow\}$. Tehát az A_1, A_2, A_3 formulák közül legalább az egyik az $\uparrow$ vagy a $\downarrow$ formulával ekvivalens. Tudjuk azt is, hogy a $\downarrow$-nak bármi logikai következménye, míg $\uparrow$ bárminek logikai következménye. Tehát a fenti állítás igaz.

b) Legyen F egy kielégíthetetlen formulahalmaz. Ha negáljuk F elemeit, akkor egy szintén kielégíthetetlen formulahalmazt kapunk.

Megoldás: Természetesen nem igaz az állítás. Legyen például $F = \{X \wedge \neg X\}$. Ekkor F kielégíthetetlen, de az $F' = \{\neg(X \wedge \neg X)\}$ kielégíthető.

2. Feladat. (6 pont) Adjon egy olyan X, Y, Z változókat tartalmazó formulát ami pontosan két interpretációban igaz!

Útmutatás: Írjunk fel egy feltételeknek megfelelő igazságtáblát, majd ebből írjunk fel egy ekvivalens diszjunktív normálformát.

3. Feladat. (7 pont) Döntse el zérusrendű rezolúcióval, hogy az alábbi formula tautológia-e:

$$(X \supset Y) \supset \neg(X \wedge \neg Y).$$

Útmutatás: A megadott formula tagadását hozzuk konjunktív normálformába, majd a kapott formula klózaiból vezessük le az üres klózt.

4. Feladat. (7 pont) Igazságértékelés fával döntse el, hogy teljesül-e az alábbi állítás:

$$\{\neg Y \wedge X \supset Z, \neg Y\} \models X \supset Z.$$

Útmutatás: Tudjuk, hogy a fenti állítás pontosan akkor teljesül, ha $A = (\neg Y \wedge X \supset Z) \wedge \neg Y \wedge \neg(X \supset Z)$ kielégíthetetlen. Írjuk fel az A igazságértékelés-fáját φA^i gyökérből kiindulva. Ha a kapott fa minden levele zárt (ellentmondásos a levélből gyökérig vezető út), akkor (és csak akkor) az A igazhalmaza üres, azaz A kielégíthetetlen.

5. feladat (8 pont) Tekintsük a következő interpretációt: $I = \langle \mathbf{Z}; =; +, *, s; \mathbf{0}\rangle$, ahol $\mathbf{Z}$ az egész számok halmaza, $+, *, s$ interpretációi rendre az összeadás, szorzás és "1-gyel növelés" műveletek, a $\mathbf{0}$ interpretációja pedig a 0 szám. Kielégíti-e ez az interpretáció az alábbi formulákat? A válaszokat röviden indokolja is!

a) $\forall x(\exists y\ s(s(\mathbf{0})) * y = x \supset \exists z\ s(s(\mathbf{0})) * z = s(x))$

Megoldás: Nem elégíti ki, mert nem teljesül az, hogy minden n egész számra, ha n páros, akkor az $n+1$ is páros.

b) $\forall x \forall y(x = s(s(y)) \supset \exists z(z = s(y) \wedge x = s(z)))$

Megoldás: Kielégíti, mert igaz az, hogy minden n és m egész számra, ha $n = m + 2$, akkor létezik olyan u egész, hogy $u = m + 1$ és $u + 1 = n$.

6. feladat (10 pont) Tekintsük azt az elsőrendű nyelvet melyben egy konstans szimbólum (b), két kétváltozós predikátum szimbólum ($=$ és Q) és egy egyváltozós függvényszimbólum van (f). Legyen $I = \langle U, =^I, Q^I, f^I, b^I \rangle$ ennek a nyelvnek egy tetszőleges interpretációja, ahol $=^I$ a szokásos *egyenlőség* reláció. Formalizálja az alábbi állításokat ebben a nyelvben:

1. Nincs olyan U-beli elem ami relációban lenne Q^I szerint a saját f^I általi képével.

   Megoldás: $\neg \exists x Q(x, f(x))$

2. Ha van két különböző $u, u' \in U$ elem melyeknek megegyezik az f^I általi őse, akkor $Q^I(u, b^I)$ és $Q^I(u', b^I)$ igazságértéke is megegyezik.

   Megoldás: $\exists x \exists y[\neg x = y \wedge \exists z(f(z) = x \wedge f(z) = y) \supset (Q(x, b) \supset Q(y, b)) \wedge (Q(y, b) \supset Q(x, b))]$