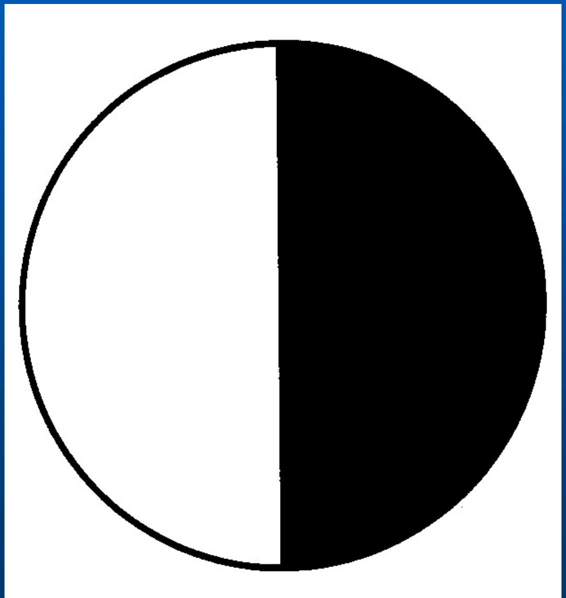
# Intelligens irányítások

## Fuzzy halmazok

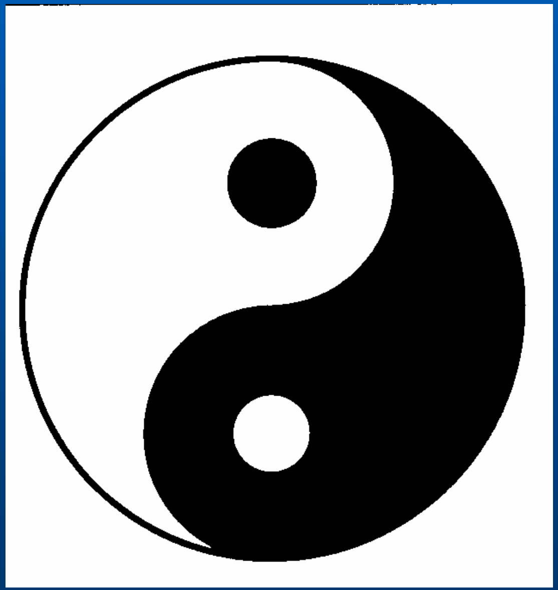

**Ballagi Áron**

**Széchenyi István Egyetem**
**Automatizálási Tsz.**

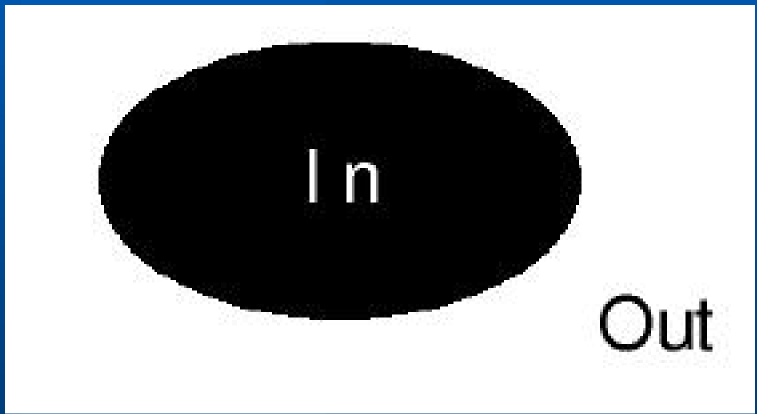
# Arisztotelészi logika



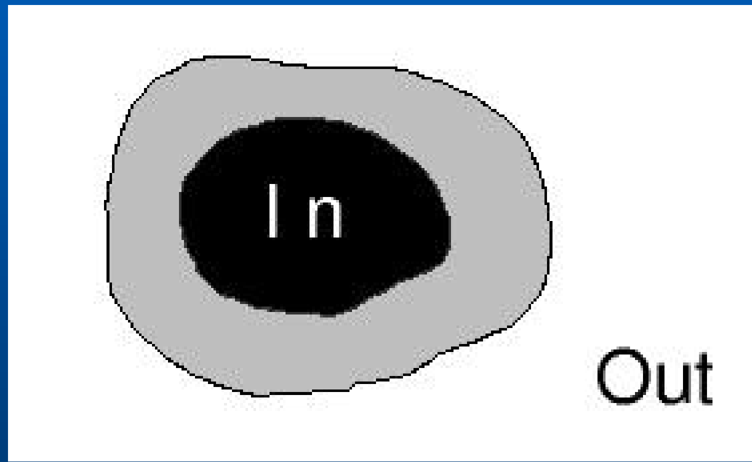
# Taichi Yin-Yang logika



# Hagyományos és Fuzzy halmaz

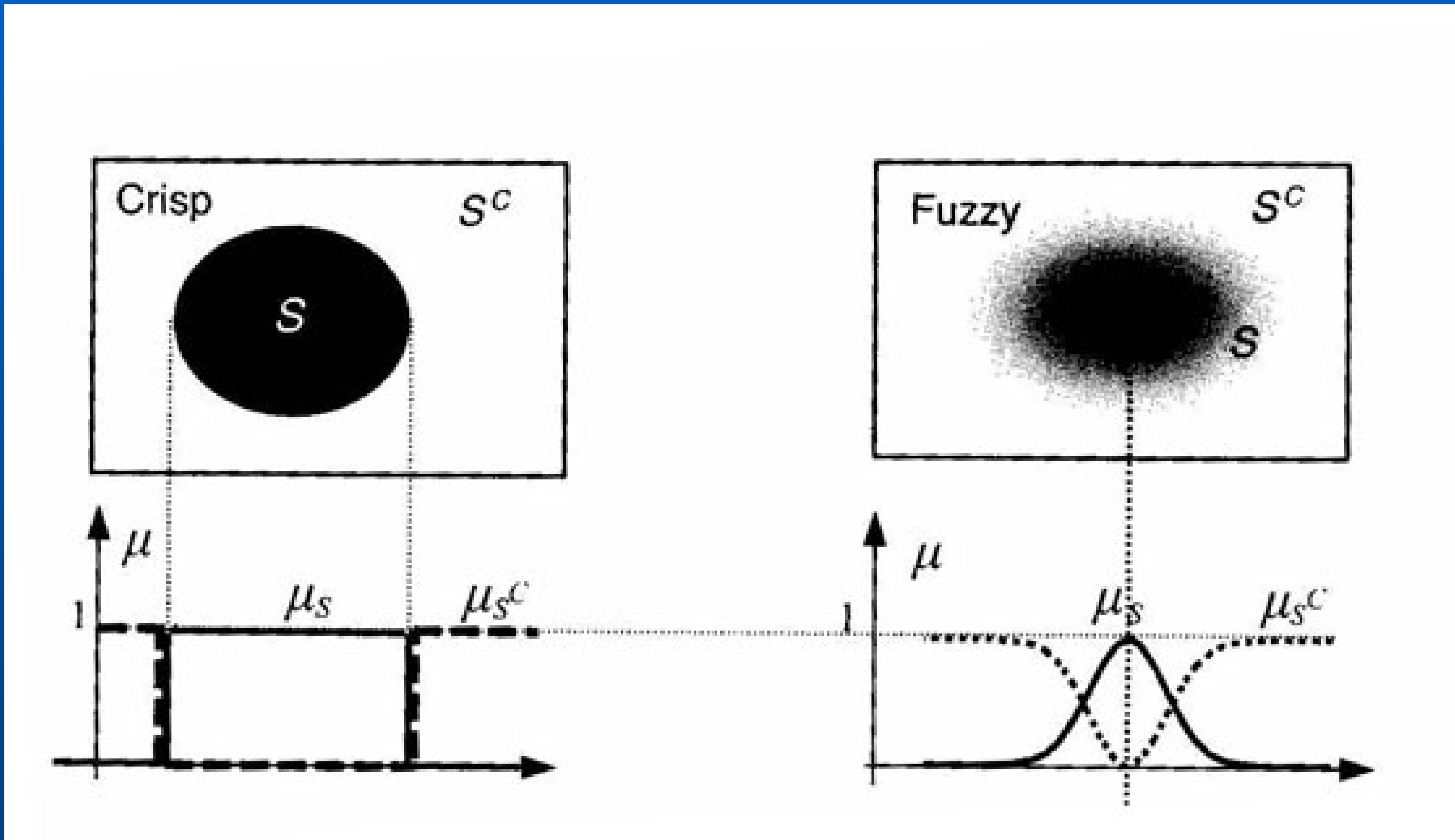



Egy hagyományos halmaz




Egy fuzzy halmaz

# Hagyományos és Fuzzy halmaz



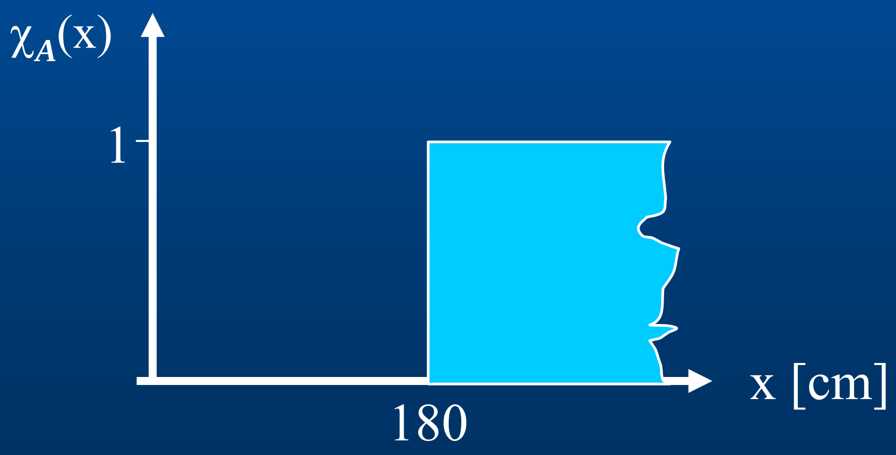
# A hagyományos halmazok

- **$A=\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$**
- **Egy elem halmazba tartozása egyértelműen megállapítható.**
- **Ha beletartozik, úgy ezt egy logikai igaz, ha nem azt egy logikai hamis értékekkel jellemezzük.**
- **Az, hogy egy elem beletartozik-e *A*-ba 0 vagy 1 értékkel jelemezhető.**

# A hagyományos halmazok - pl

Magas emberek halmaza: $\boldsymbol{A} = \{ x \in X \mid x \geq 180 \}$

karakterisztikus függvény : $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \geq 180 \\ 0 & \text{ha } x < 180 \end{cases}$



# A határozatlanság formái

- Sztochasztikus: kocka dobás, ...
- Lingvisztikus: magas ár, alacsony kor, ...
- Információs: őszinteség, hitelesség,...

Hagyományos halmazok segítségével nem vagy csak nagyon nehezen reprezentálhatók.

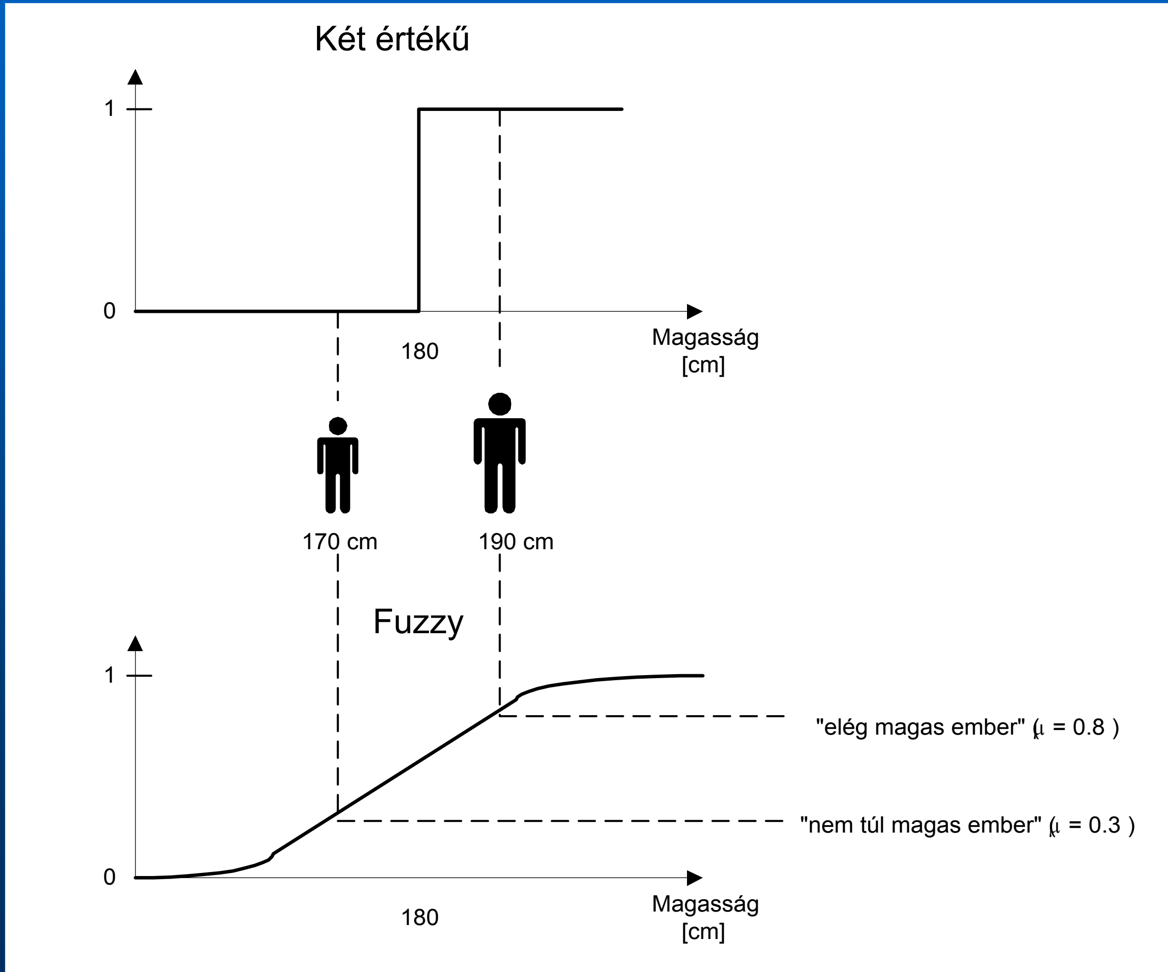
# Fuzzy Logika

- **A fuzzy logika alkalmazása lehetővé teszi a mindennapi életben megszokott, korábban igen nehezen kezelhető nyelvi fogalmak (pl. magas, alacsony, öreg, fiatal) matematikai kezelését. A fuzzy logika a többértékű logikák sorába tartozik, tehát ellentétben a kétértékű logikával, ahol az érték vagy „igaz” vagy „hamis” köztes állapot nincsen, itt az igaz és hamis közti értékeket is meg tudunk különböztetni (pl. talán igaz).**
- **A fuzzy logika műveletei fuzzy halmazokra épülnek**

# Történeti áttekintés

- **1965 L.A Zadeh: a fuzzy halmazok első leírása (a fuzzy időszámítás kezdete)**
- **1973 L.A. Zadeh: az első fuzzy következtető rendszer – fuzzy algoritmusok**
- **1974 E.H. Mamdani: az első működő fuzzy vezérlés (gőzgép vezérlése)**
- **1985 Megjelenik a fuzzy chip (Bell Labs)**
- **1988 Az Omron elkezdi árulni fuzzy szabályozó rendszerét**

# Fuzzy halmazok



# Fuzzy halmazok

- **Az *X* univerzumon értelmezett *A* fuzzy halmaz az *x* elemek és az ezekhez tartozó tagsági értékek által alkotott rendezet számpárok halmaza,**

$$A = \left\{ (x, \mu_A(x)) \middle| \; x \in X \right\}$$

- **diszkrét elemű halmaz esetén:** $A = \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i) / x_i$
- **folytonos elemű halmaz esetén:** $A = \int_u \mu(x) / x$
- **A hozzárendelést tagsági függvénynek nevezzük, mely egy *A* fuzzy halmaz esetén:**

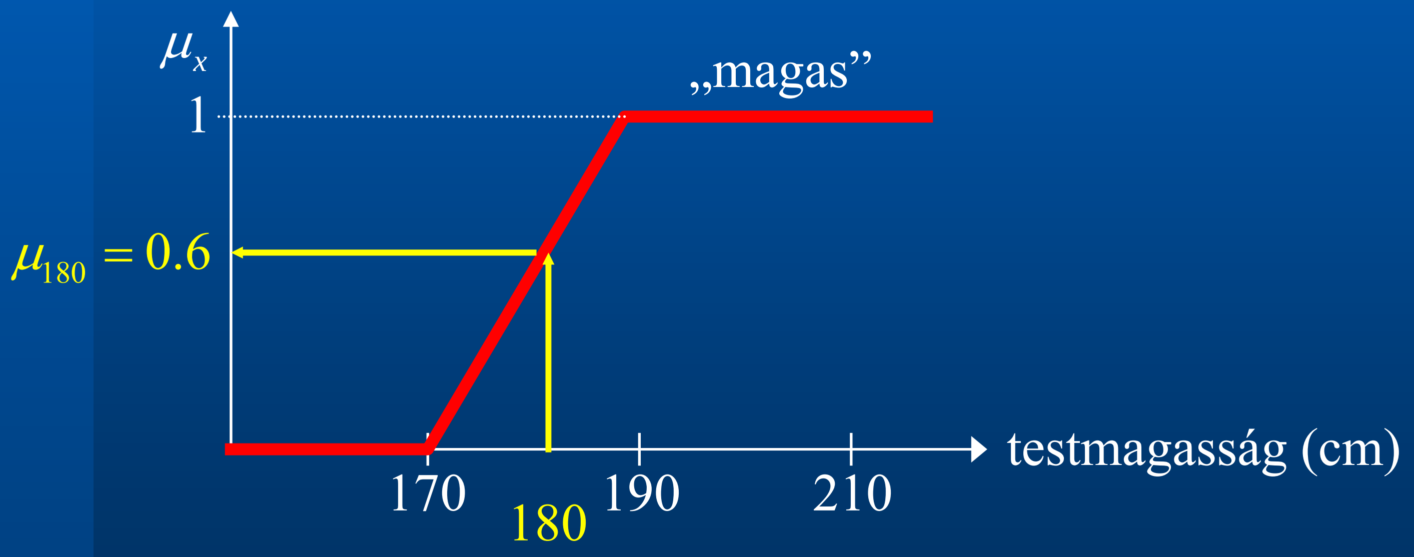
$$\mu_A : X \to [0,1]$$

# Fuzzy halmazok

- $A=\{[a_1,\mu_A(a_1)],[a_2,\mu_A(a_2)], \ldots, [a_n,\mu_A(a_n)]\}$
- **Minden A halmazbeli $a_k$ elemhez hozzárendelünk egy számot, általában 0 és 1 (néha -1 és 1 között), ami jellemzi az elem halmazba tartozásának mértékét.**
- **A fuzzy tagsági függvény megmutatja, hogy egy adott $a_k$ elem mennyire tartozik bele a halmazba:**
  - **nagyon, kissé, kevésbé, vagy egyáltalán nem.**

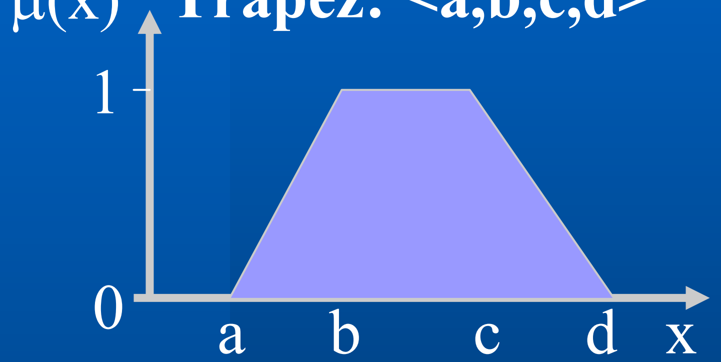
# Fuzzy halmazok – pl.

- **Testmagasság univerzum:** $X : 0 \le x \le 270$
- **Magas emberek halmaza:** $\mu_{magas} : X \to [0,1]$

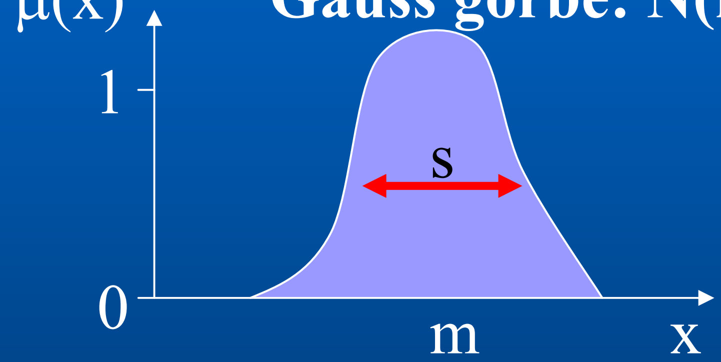


# A tagsági függvény formái

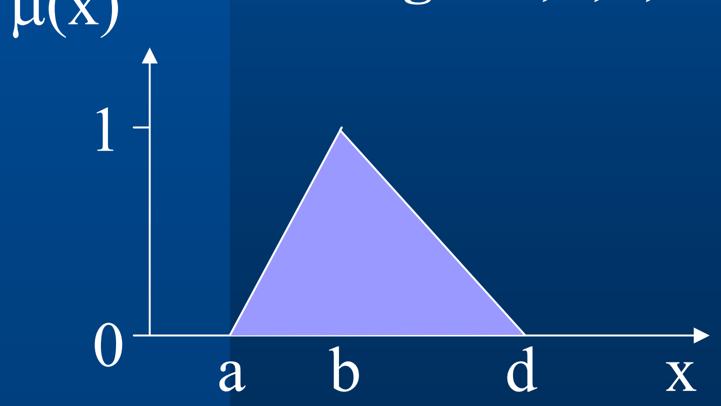
**Trapéz: <a,b,c,d>**



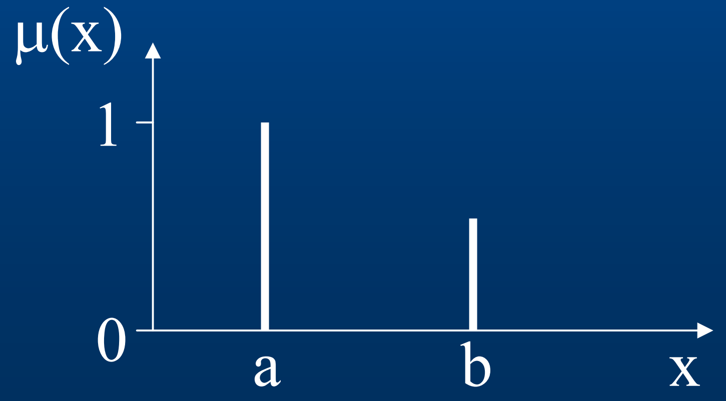

**Gauss görbe: N(m,s)**




**Háromszog: <a,b,b,d>**



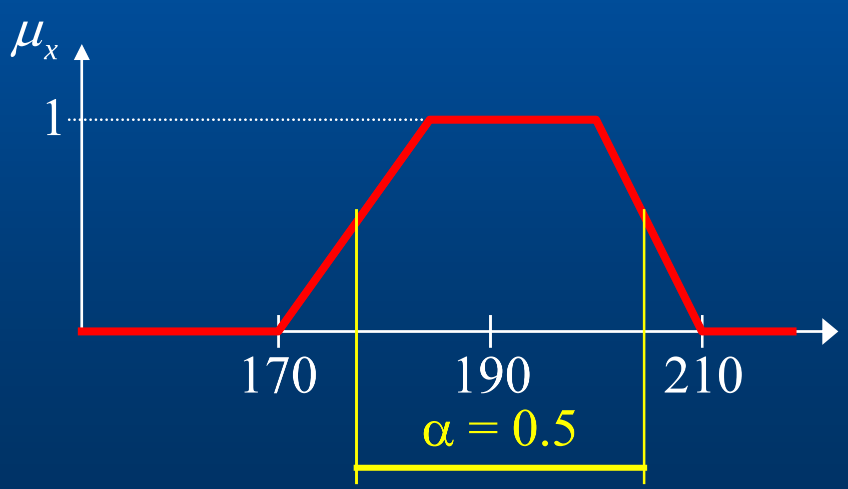

**Singleton: (a,1) and (b,0.5)**



# Fuzzy halmazok: az α - vágat

- **Valamely adott *A* fuzzy halmazhoz az $A_\alpha$ α – vágat minden α ∈ [0,1] értékre az**

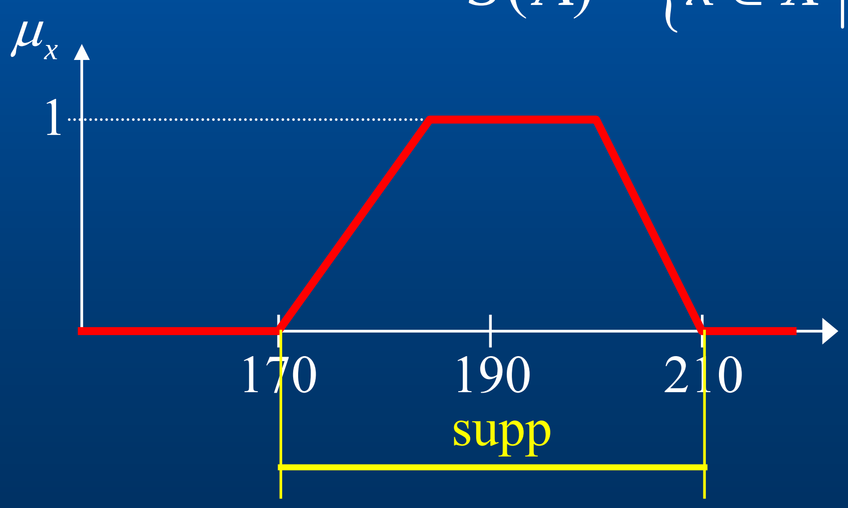
$$A_\alpha = \{x \mid A(x) \geq \alpha\}$$



# Fuzzy halmazok: a hordozó

- **Az *X* univerzumon értelmezett *A* fuzzy halmaz *hordozója (support) S(A)* halmaz, mely tartalmazza az *X* univerzum összes olyan elemét amelynek tagsági értéke nem *nulla*:**

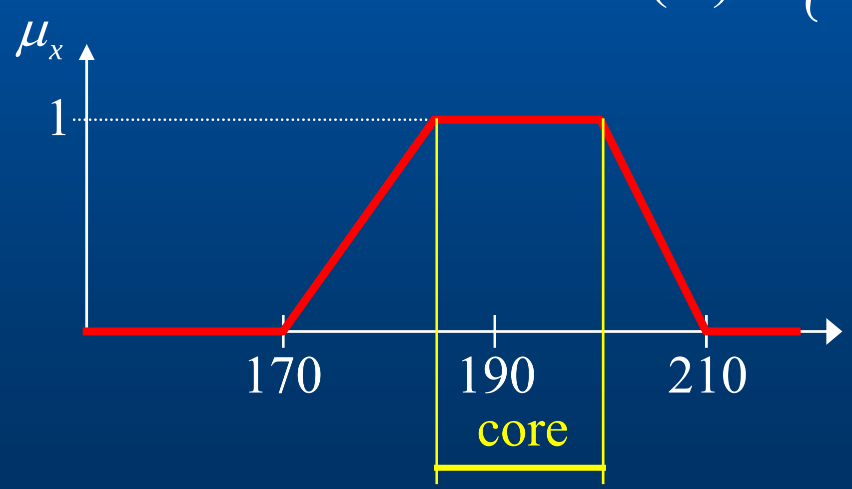
$$S(A) = \left\{ x \in X \,\middle|\, \mu_A(x) > 0 \right\}$$



# Fuzzy halmazok: a mag

- **Az *X* univerzumon értelmezett *A* fuzzy halmaz *magja (core)* az a *C(A)* halmaz, mely tartalmazza *A* minden olyan elemét, melynek tagsági értéke *egy*:**

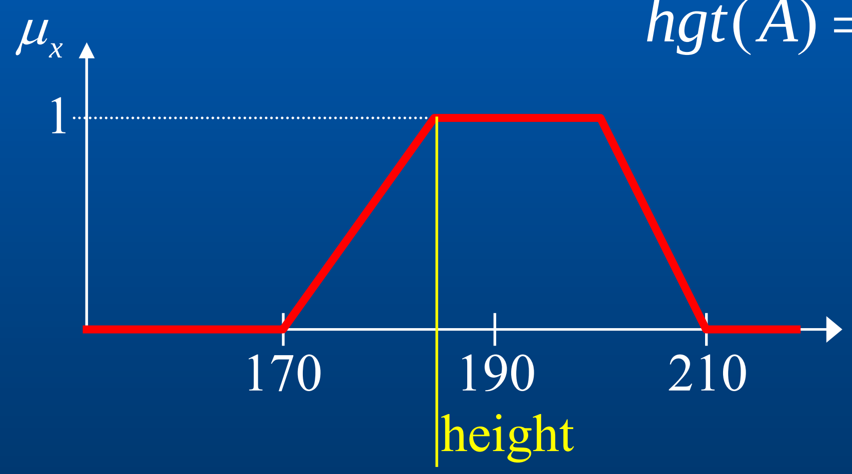
$$C(A) = \{ x \in X \mid \mu_A(x) = 1 \}$$



# Fuzzy halmazok: a magasság

- ***A* fuzzy halmaz *magassága (height) hgt(A)* a halmazban levő legnagyobb tagsági függvényérték:**

$$hgt(A) = \max_x(\mu_A(x))$$




Normalizált a fuzzy halmaz, ha a magassága egységnyi: $hgt(A) = 1$

# Fuzzy halmazok jellemzői

- ***A*,*B* és *C* legyenek az *X* univerzumon értelmezett fuzzy halmazok.**

**1. kommutatív** $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

**2. asszociatív** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

**3. disztributív** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

**4. idempotenciális** $A \cup A = A$ és $A \cap A = A$

# Fuzzy halmazok jellemzői

- ***A*,*B* és *C* legyenek az *X* univerzumon értelmezett fuzzy halmazok.**

**5. identitás** $A \cup 0 = A$ és $A \cap X = A$

$A \cap 0 = 0$ és $A \cup X = X$

**6. tranzitív** ha $A \subseteq B \subseteq C$ akkor $A \subseteq C$

**7. involució** $\overline{\overline{A}} = A$

- **Fuzzy halmazok esetén is alkalmazhatók a DeMorgan szabályok:**

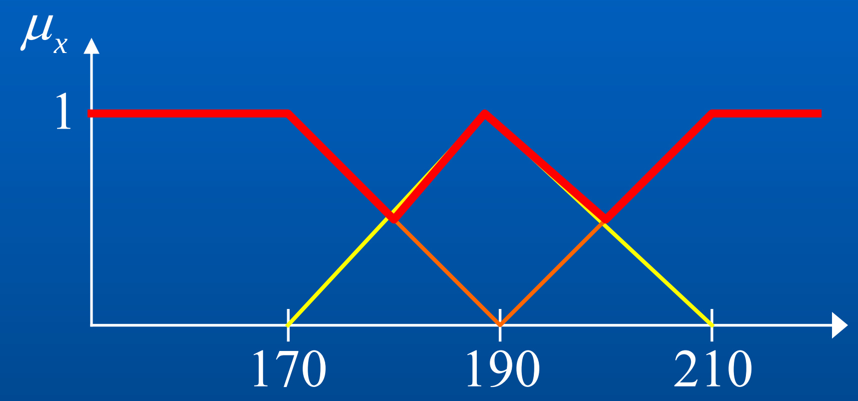
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

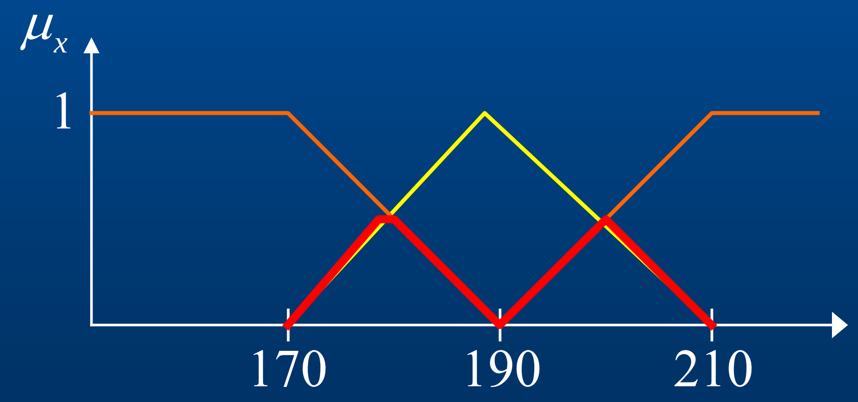
# Fuzzy halmazok jellemzői

***Figyelem!***

$$A \cup \bar{A} \neq X$$




$$A \cap \bar{A} \neq 0$$



# Fuzzy halmazműveletek

- ***Komplemens*** **definiálható bármely olyan *c* függvény segítségével, amely megfelel a következő axiomának:**

$$c:[0,1] \to [0,1]$$

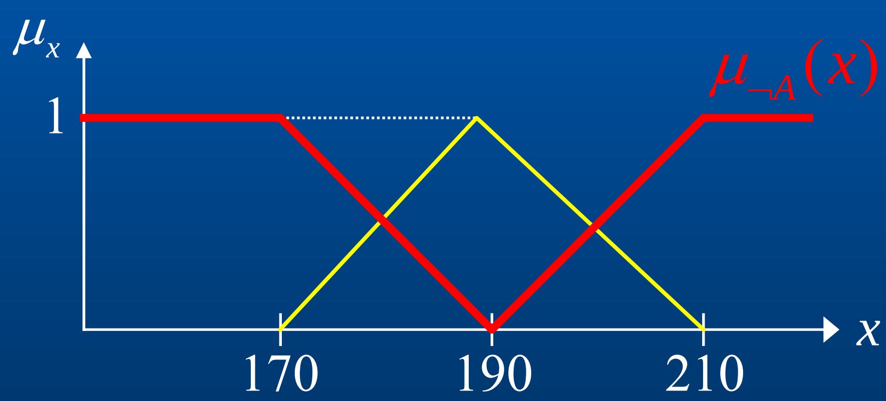
$$\mu_{\neg A}(x) = c(\mu_A(x)) \quad \forall x \in X$$

1: $c(0)=1$ és $c(1)=0$

2: $\forall a,b \in [0,1]$, ha $a<b$, akkor $c(a) \geq c(b)$
($c$ monoton nem növekvő)

# Zadeh-féle standard komplemens

$$\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in X$$



# Fuzzy halmazműveletek

- **Fuzzy *t-norma* *(metszet)* definiálható bármely olyan *t* függvény segítségével, amely megfelel a következő axiómáknak:**

$$t:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$$

$$\mu_{A\cap B}(x)=t\left[\mu_A(x),\mu_B(x)\right]\quad\forall x\in X$$

1: $t(1,1)=1$
$t(0,1)=t(1,0)=t(0,0)=0$ (határfeltétel)

2: $t(a,b)=t(b,a)$ (kommutatív)

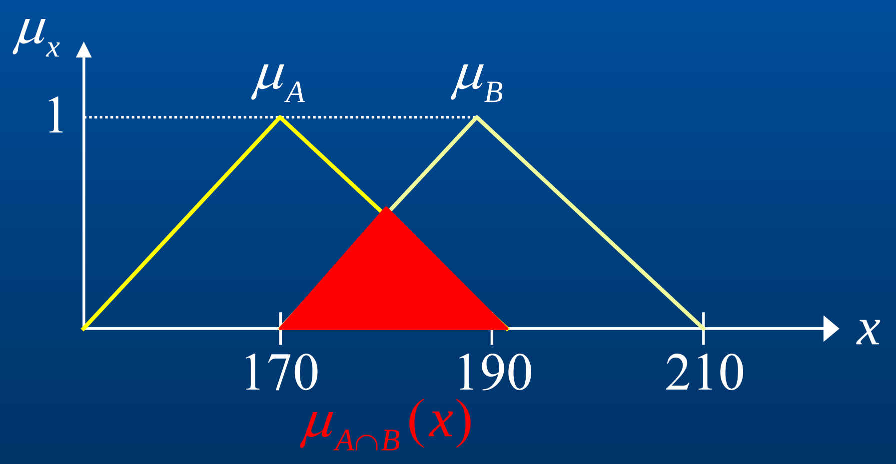
3: ha $a\le a'$ és $b\le b'$ akkor $t(a,b)\le t(a',b')$ (monoton)

4: $t(t(a,b),c) = t(a,t(b,c))$ (asszociatív)

# Zadeh-féle metszet

- **A Yager-féle t-norma speciális esete**

$$\lim_{w\to\infty}\left[t_w^Y(a,b)\right]=\min(a,b)=\min\left[\mu_A(x),\mu_B(x)\right]\qquad \forall x\in X$$



# Fuzzy halmazműveletek

- **Fuzzy *s-norma (t-conorma, unió)* definiálható bármely olyan *s* függvény segítségével, amely megfelel a következő axiómáknak:**

$$s:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$$

$$\mu_{A\cup B}(x)=s\left[\mu_A(x),\mu_B(x)\right]\quad\forall x\in X$$

1: s*(0,0)=0*
*s(0,1)=s(1,0)=s(1,1)=1* (határfeltétel)

2: s*(a,b)*=s*(b,a)* (kommutatív)

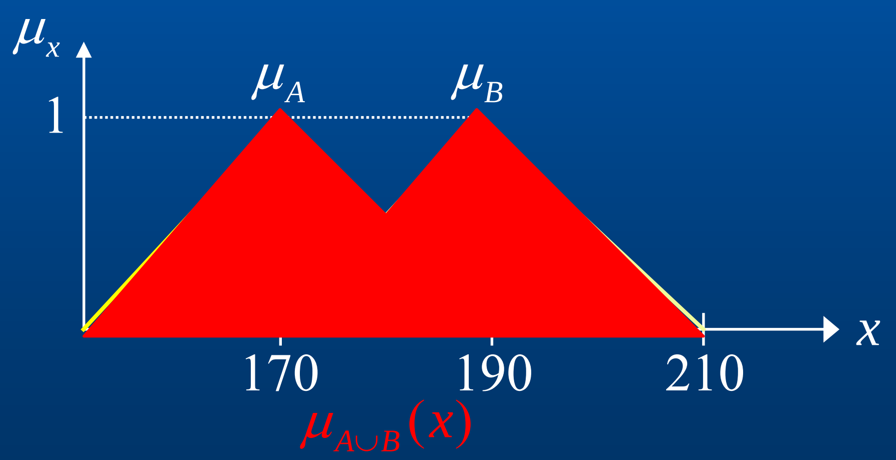
3: ha $a\le a'$ és $b\le b'$ akkor $s(a,b)\le s(a',b')$ (monoton)

4: s*(s(a,b),c)* = s*(a,s(b,c))* (asszociatív)

# Zadeh-féle unió

- **A Yager-féle s-norma speciális esete**

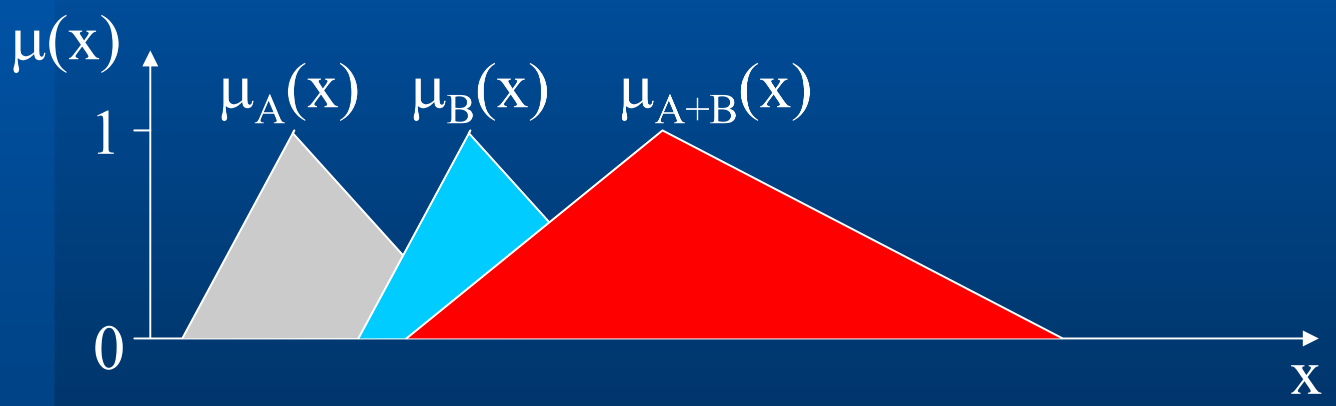
$$\lim_{w\to\infty}\left[s_w^Y(a,b)\right] = \max(a,b) = \max\left[\mu_A(x),\mu_B(x)\right] \qquad \forall x \in X$$



# Számolás fuzzy számokkal

- **Összeadás:**

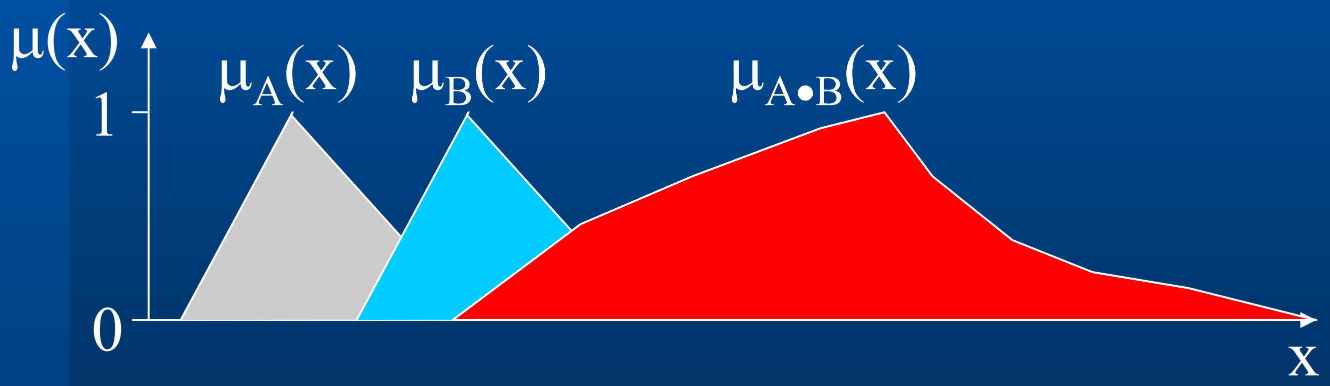
$$\mu_{A+B}(x) = \max\{\mu_A(y), \mu_B(z) \mid x=y+z\}$$



# Számolás fuzzy számokkal

- **Szorzás:**

$$\mu_{A\bullet B}(x) = \max\{\mu_A(y), \mu_B(z) \mid x=y\bullet z\}$$



# Fuzzy reláció

- **Az *n* darab *A1, A2, …,An* halmaz fuzzy relációja az $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ univerzumon értelmezett fuzzy halmaz, ahol $A_i$ az $X_i$ univerzumon értelmezett halmaz és az „×” a direkt (Descartes) szorzat jele:**

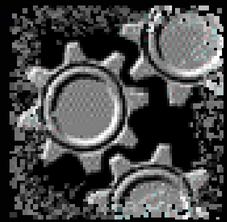
# Fuzzy kompozició

- **A fuzzy kompozíció általános alakja az *s-* és *t-normával* leírva (*s-t kompozíció*):**

$$\mu_{P \circ s,tQ}(x,z) = \underset{y \in Y}{s}\left[ t\left( \mu_p(x,y), \mu_q(y,z) \right) \right] \qquad \forall x \in X\,, z \in Z$$

- **Zadeh-féle max-min kompozíció:**

$$\mu_{P \circ Q}(x,z) = \max_{y \in Y} \min\left[ \mu_p(x,y), \mu_q(y,z) \right] \qquad \forall x \in X\,, z \in Z$$



# Köszönöm a figyelmet!

# Kérdések?