

# Bevezetés a programozáshoz I.

## Feladatok

2006. szeptember 15.

### 1. Alapfogalmak

1.1. Legalább, illetve legfeljebb hány eleme van egy  $m$  elemű és egy  $n$  elemű halmaz

- metszetének;
- egyesítésének;
- Descartes-szorzatának;
- különbségének?

1.2. Bizonyítsa be, hogy  $H \subseteq A \times B$  esetén

- $(\forall (a, b), (c, d) \in H : (a, d) \in H) \Leftrightarrow (\exists K \subseteq A : \exists L \subseteq B : H = K \times L)$ ;
- ha  $H$  nem üres, akkor  $K$  és  $L$  egyértelmű.

1.3.  $R \subseteq A \times B$ . Mivel egyenlő  $R^{-1}(B)$ ?

1.4.  $R = \{((x, y), (x + y, y)) \mid x, y \in \mathbb{N}\}$ . Mi a  $H = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N} \text{ és } a + b < 5\}$  halmaz inverz képe, illetve ősképe?

1.5.  $R = \{((x, y), (x + y, y)) \mid x, y \in \mathbb{N}\} \cup \{((x, y), (x - y, y)) \mid x, y \in \mathbb{N}\}$ . Mi a  $H = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N} \text{ és } a + b < 5\}$  halmaz inverz képe, illetve ősképe?

1.6.  $R = \{((x, y), (f(x, y), y)) \mid x, y \in \mathbb{N}\}$ , ahol  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Mi a  $H = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N} \text{ és } a + b < 5\}$  halmaz ősképe, illetve inverz képe?

1.7.  $R \subseteq A \times B, Q \subseteq B$ . Van-e valamilyen összefüggés az  $R^{-1}(B \setminus Q)$  halmaz és az  $A \setminus (R^{-1}(Q))$  halmaz között?

1.8. Készítsen olyan nem üres relációt, amelyre igaz, hogy értékkészlete minden valódi részhalmazának ősképe üres halmaz!

1.9. Legyen  $F, G \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, Y = \{1, 2\}$ .  $F = \{(a, b) \mid b \mid a \text{ és } b \neq 1 \text{ és } b \neq a\}$ .  
 $G = \{(a, b) \mid 2 \mid a \text{ és } a = 2b\}$ .

$$\begin{aligned} G \circ F &=? & G \odot F &=? \\ F^{(-1)} \circ G^{(-1)} &=? & F^{-1}(G^{-1}(Y)) &=? \\ (G \circ F)^{-1}(Y) &=? & (G \circ F)^{(-1)} &=? \end{aligned}$$

1.10. Legyen  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, R \subseteq A \times A, R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (3, 4), (3, 3), (3, 5), (4, 5)\}, f \subseteq A \times \mathbb{L}$  és  $f = \{(1, i), (2, i), (3, i), (4, h), (5, i)\}$ . Mi  $f$ , illetve  $(f \circ R)$  igazsághalmaza és gyenge igazsághalmaza?

1.11.  $R, Q \subseteq A \times A$ . Igaz-e, hogy  $(R \odot Q)^{(-1)} = Q^{(-1)} \circ R^{(-1)}$ ?

1.12.  $F \subseteq A \times B, G \subseteq B \times C$ . Igaz-e, hogy  $\forall Y \subseteq C : (G \circ F)^{-1}(Y) = F^{-1}(G^{-1}(Y))$ . Igaz-e az állítás, ha  $G$  vagy  $F$  függvény?

**1.13.**  $F \subseteq A \times B, G \subseteq B \times C$ . Igaz-e, hogy  $(G \odot F)^{(-1)} = F^{(-1)} \odot G^{(-1)}$ . Igaz-e az állítás, ha  $G$  vagy  $F$  függvény?

**1.14.** Mi az összefüggés két reláció kompozíciójának értelmezési tartománya és ugyanezen két reláció szigorú értelemben vett kompozíciójának értelmezési tartománya között?

**1.15.** Készítsen olyan nem üres  $R$  relációt és  $f$  logikai függvényt, hogy  $f \circ R$  igazsághalmaza üres legyen!

**1.16.**  $R \subseteq A \times A$ . Igaz-e, hogy  $(R^{(-1)})^2 = (R^2)^{(-1)}$ ?

**1.17.**  $R \subseteq A \times A$ . Igaz-e, hogy  $\forall H \subseteq A : R^{-1}(R^{-1}(H)) = (R^2)^{-1}(H)$ ?

**1.18.**  $P, Q \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .  $Q = \{(a, b) \mid 2|a \text{ és } b|a \text{ és } \text{prim}(b)\}$ .

a)  $P = \{(a, b) \mid b|a \text{ és } b \neq 1 \text{ és } b \neq a\}$

b)  $P = \{(a, b) \mid b|a\}$

Adja meg a  $Q^{(-1)}$ ,  $Q \circ P$  és  $Q \odot P$ -t relációt!

**1.19.**  $H \subseteq A \times B, G \subseteq B \times C, F \subseteq C \times D$ . Igazak-e az alábbi állítások?

a) Ha  $a \in \mathcal{D}_{G \circ H} \cap \mathcal{D}_{G \odot H}$ , akkor  $G \circ H(a) = G \odot H(a)$ .

b)  $\mathcal{D}_{G \odot H} \subseteq \mathcal{D}_{G \circ H}$ .

c)  $(\forall a \in \mathcal{D}_H : |H(a)| = 1) \Rightarrow G \circ H = G \odot H$ .

d)  $\mathcal{D}_G = B \Rightarrow G \circ H = G \odot H$ .

**1.20.** Asszociativitás:  $H \subseteq A \times B, G \subseteq B \times C, F \subseteq C \times D$ . Igazak-e:

$$\begin{aligned} (F \circ G) \circ H &= F \circ (G \circ H), \\ (F \odot G) \odot H &= F \odot (G \odot H)? \end{aligned}$$

**1.21.** Legyen  $Q, R, S \subseteq A \times A$ , és vezessük be az alábbi jelölést: ha  $X \subseteq A \times A$  tetszőleges reláció, akkor  $X$  komplementere:

$$\widehat{X} = \{(a, b) \in A \times A \mid (a, b) \notin X\}.$$

Igaz-e, hogy

$$Q \odot R \subseteq S \iff Q^{(-1)} \odot \widehat{S} \subseteq \widehat{R}?$$

Igaz-e a fenti állítás nemszigorú kompozíció esetén?

**1.22.** Legyen  $Q, R, S \subseteq A \times A$ . Igaz-e, hogy

$$\begin{aligned} R \subseteq S &\Rightarrow R \odot Q \subseteq S \odot Q, \\ R \subseteq S &\Rightarrow Q \odot R \subseteq Q \odot S? \end{aligned}$$

**1.23.** Legyen  $R$  és  $Q$  két reláció a természetes számok halmazán!  $R$  egy természetes számhoz rendeli önmagát és a kétszeresét,  $Q$  egy páros természetes számhoz a felét.

a) Írja fel a két relációt, és adja meg az értelmezési tartományukat!

- b) Írja fel az  $R$  reláció  $k$ . hatványát ( $k \geq 1$ ) és ennek az értelmezési tartományát!  
 c) Írja fel a  $Q \circ R$  relációt és annak értelmezési tartományát!  
 d)  $F = Q \circ R$ . Írja fel az  $F$  relációt és az értelmezési tartományát!

**1.24.**  $F \subseteq A \times B$ ,  $G \subseteq B \times C$ . Igaz-e, hogy:

- a)  $\mathcal{D}_{G \circ F} = F^{-1}(\mathcal{D}_G)$ ,  
 b)  $\mathcal{D}_{G \circ F} = F^{-1}(\mathcal{D}_G)$ ?

**1.25.**  $P \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ .  $P = \{(a, b) \mid b|a \text{ és } b \neq 1 \text{ és } b \neq a\}$ . Mi lesz  $P$  lezártja és korlátos lezártja?

**1.26.**  $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .  $R = \{(a, b) \mid b|a \text{ és } b \neq 1 \text{ és } b \neq a\}$ .  $[\pi] = \{x \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : x = 2^k\}$ . Írjuk fel az  $R|_{\pi}$  relációt, lezártját és korlátos lezártját!

**1.27.** Adjunk példát olyan nem üres relációra, amelynek lezártja üres halmaz, és van olyan  $\pi$  feltétel, hogy a reláció feltételre vonatkozó lezártjának értelmezési tartománya megegyezik az eredeti reláció értelmezési tartományával!

**1.28.**  $R \subseteq A \times A$ . Tegyük fel, hogy az  $R$  értelmezési tartománya egyenlő az  $R$  értelmezési tartományának  $R$ -re vonatkozó ősképeivel. Mit mondhatunk  $R$  lezártjáról?

**1.29.**  $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ .

$$R(a) = \begin{cases} \{a - 3\}, & \text{ha } a > 2; \\ \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}, & \text{ha } a = 1. \end{cases}$$

Mi az  $R$  reláció lezártja és korlátos lezártja?

**1.30.**  $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Az  $R$  reláció minden összetett számhoz a legnagyobb valódi osztóját rendeli. Legyen  $q$

- a) egy rögzített összetett természetes szám!  
 b) egy rögzített prímszám!

Legyen  $P_q(a) = (\exists k \in \mathbb{N} : a = q^k)$ ! Mi lesz az  $R$  reláció  $P_q$  feltételre vonatkozó lezártjának értelmezési tartománya?

**1.31.**  $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ .

$$R(x) = \begin{cases} \{b \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : b = 2k + 1\}, & \text{ha } x \neq 0 \text{ és } x \text{ páros;} \\ \{x - 7\}, & \text{ha } x \geq 7 \text{ és } x \text{ páratlan;} \\ \{0\}, & \text{ha } x = 1; \\ \{7\}, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Mi lesz  $R$  lezártja és korlátos lezártja?

**1.32.**  $R$  legyen az 1.29. feladatban adott reláció.  $\pi(k) = (k \text{ páratlan szám})$ . Adja meg az  $R|_{\pi}$  relációt, lezártját és korlátos lezártját!

**1.33.** Igazak-e az alábbi állítások?

- a) Ha  $a \in \mathcal{D}_{\overline{R}} \cap \mathcal{D}_{\overline{\overline{R}}}$ , akkor  $\overline{R}(a) = \overline{\overline{R}}(a)$ .  
 b)  $\mathcal{D}_{\overline{\overline{R}}} \subseteq \mathcal{D}_{\overline{R}}$ .

c) Ha az  $A$  halmaz véges és  $R \subseteq A \times A$ , akkor  $\overline{R} = \overline{\overline{R}}$ .

d) Ha  $A$  megszámlálhatóan végtelen,  $R \subseteq A \times A$ , és

$$\forall a \in A : (\exists n(a) \in \mathbb{N}_0 : |R(a)| \leq n(a)) \Rightarrow \overline{R} = \overline{\overline{R}}.$$

**1.34.** Legyen  $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ .

$$R(x) = \begin{cases} \{b | b > 0 \text{ és } b < x \text{ és } 2|b\}, & \text{ha } x \text{ páratlan;} \\ \{x - 1\}, & \text{ha } x \text{ páros;} \end{cases}$$

$\pi(x) = (x \text{ páros természetes szám})$ . Mi az  $R$  reláció  $\pi$  feltételre vonatkozó lezártja és korlátos lezártja?

**1.35.** Legfeljebb, illetve legalább milyen hosszú egy  $m$  és egy  $n$  hosszúságú sorozat redukáltjának konkatenációja, illetve konkatenációjának redukáltja?

**1.36.** Igaz-e, hogy egy  $\alpha$  sorozat redukáltjának projekciója ugyanolyan hosszú, mint az  $\alpha$  sorozat redukáltja?

**1.37.** Igaz-e, hogy egy  $\alpha$  sorozat projekciójának redukáltja ugyanolyan hosszú, mint az  $\alpha$  sorozat redukáltja?

**1.38.** Legyen  $A = N_1 \times N_2 \times N_3 \times N_4$ ,  $B = N_4 \times N_1$ , ahol  $N_i = \mathbb{N}$  ( $i = 1..4$ ).

$$\alpha = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 2, 3, 1), (1, 2, 3, 4), \\ (5, 2, 3, 4), (5, 7, 3, 4), (5, 7, 10, 4), (5, 7, 10, 14), \dots \rangle$$

a)  $pr_B(\alpha) = ?$

b)  $red(pr_B(\alpha)) = ?$

## 2. A programozás alapfogalmai

2.1. Legyen  $A = \{\Omega, \Phi, \Psi, \Theta, \Gamma\}$ ,  $S \subseteq A \times A^{**}$ .

$$S = \left\{ \begin{array}{lll} (\Omega, \langle \Omega\Phi\Gamma\Omega \rangle), & (\Omega, \langle \Omega\Theta\Psi\Gamma \rangle), & (\Omega, \langle \Omega\Psi\Phi \dots \rangle), \\ (\Phi, \langle \Phi\Omega \rangle), & (\Psi, \langle \Psi\Theta \rangle), & (\Psi, \langle \Psi\Psi\Psi\Psi\Psi \dots \rangle), \\ (\Theta, \langle \Theta\Omega\Gamma\Omega\Theta \rangle), & (\Theta, \langle \Theta\Psi\Omega\Phi\Gamma\Omega \rangle), & (\Theta, \langle \Theta\Omega\Gamma\Theta\Phi \rangle), \\ (\Gamma, \langle \Gamma\Phi\Psi \rangle), & (\Gamma, \langle \Gamma\Psi \rangle), & (\Gamma, \langle \Gamma\Phi\Psi\Omega \rangle) \end{array} \right\}$$

$$F = \{(\Phi, \Omega) (\Phi, \Psi) (\Theta, \Omega) (\Theta, \Phi) (\Theta, \Theta)\}.$$

- Adjuk meg  $p(S)$ -t!
- Megoldja-e  $S$  az  $F$  feladatot?

2.2. Legyen  $S$  program,  $F$  olyan feladat, hogy  $S$  megoldása  $F$ -nek. Igaz-e, hogy

- ha  $F$  nemdeterminisztikus, akkor  $S$  sem az?
- ha  $F$  determinisztikus, akkor  $S$  is az?
- ha  $F$  nemdeterminisztikus, akkor  $p(S)$  sem az?
- ha  $p(S)$  determinisztikus, akkor  $F$  is az?
- ha  $F$  determinisztikus, akkor  $p(S)$  is az?
- ha  $S$  nemdeterminisztikus, akkor  $p(S)$  sem az?

2.3. Igaz-e, hogy  $p(S)$  értelmezési tartománya éppen  $A^*$  ősképe  $S$ -re nézve?

2.4. Mondhatjuk-e, hogy az  $S$  program megoldja az  $F$  feladatot, ha igaz a következő állítás:

$$q \in \mathcal{D}_F \Rightarrow S(q) \subseteq A^* \text{ és } p(S)(q) \subseteq F(q)?$$

2.5. Legyen  $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $F_1, F_2 \subseteq A \times A$ .

$$F_1 = \{((u, v), (x, y)) \mid y|u\},$$

$$F_2 = \{((u, v), (x, y)) \mid x = u \text{ és } y|u\}.$$

Ugyanaz-e a két feladat? (Van-e valamilyen összefüggés közöttük?)

2.6.  $F \subseteq A \times A$ .  $S_1, S_2$  programok  $A$ -n. Az  $S_1$  és az  $S_2$  is megoldja az  $F$  feladatot. Igaz-e, hogy az  $S = (S_1 \cup S_2)$  program is megoldja az  $F$  feladatot?

2.7. Tekintsük a következő szövegesen megadott feladatot: Adott egy sakktábla és két rajta lévő bástya helyzete. Helyezzünk el a táblán egy harmadik bástyát úgy, hogy az mindkettőnek az ütésében álljon! Készítsük el a modellt: írjuk fel az állapotteret és az  $F$  relációt!

2.8. Tudjuk, hogy  $S$  megoldja  $F$ -et (az  $A$  állapottéren). Igaz-e, hogy ha  $a \in A$ , akkor

$$S(a) \not\subseteq A^* \text{ vagy } p(S)(a) \not\subseteq F(a) \Rightarrow a \notin \mathcal{D}_F?$$

2.9. Legyen  $F \subseteq A \times A$  egy feladat és  $S \subseteq A \times A^{**}$  egy program. Jelöljük  $FP$ -vel azt a relációt, amely  $F$  és  $p(S)$  metszeteként áll elő. Igaz-e, hogy

- ha  $\mathcal{D}_{FP} = \mathcal{D}_F$ , akkor  $S$  megoldja  $F$ -et?
- ha  $S$  megoldja  $F$ -et, akkor  $\mathcal{D}_{FP} = \mathcal{D}_F$ ?

### 3. Specifikáció

3.1. Legyen  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $S \subseteq A \times A^{**}$ .

$$S = \left\{ \begin{array}{llll} (1, \langle 1251 \rangle), & (1, \langle 14352 \rangle), & (1, \langle 132 \dots \rangle), & (2, \langle 21 \rangle), \\ (2, \langle 24 \rangle), & (3, \langle 333333 \dots \rangle), & (4, \langle 41514 \rangle), & (4, \langle 431251 \rangle), \\ (4, \langle 41542 \rangle), & (5, \langle 524 \rangle), & (5, \langle 534 \rangle), & (5, \langle 5234 \rangle) \end{array} \right\}$$

és  $[R] = \{1, 2, 5\}$ . Írja fel az  $[lf(S, R)]$  halmazt!

3.2. Mivel egyenlő  $lf(S, Igaz)$ ?

3.3. Legyen  $A$  tetszőleges állapotér,  $Q_i : A \rightarrow \mathbb{L}$  ( $i \in \mathbb{N}$ ). Igaz-e, hogy ha

$$\forall i \in \mathbb{N} : Q_i \Rightarrow Q_{i+1},$$

akkor

$$(\exists n \in \mathbb{N} : lf(S, Q_n)) = lf(S, (\exists n \in \mathbb{N} : Q_n))?$$

3.4. Igaz-e, hogy ha  $lf(S_1, R) = lf(S_2, R)$ , akkor  $lf(S_1 \cup S_2, R) = lf(S_1, R) \vee lf(S_2, R)$ ?

3.5. Igaz-e, hogy ha  $\forall x, y \in A : x \in [lf(S_1, \mathcal{P}(\{y\}))] \Leftrightarrow x \in [lf(S_2, \mathcal{P}(\{y\}))]$ , akkor  $\mathcal{D}_{p(S_1)} = \mathcal{D}_{p(S_2)}$ ?

3.6.  $S_1, S_2 \subseteq A \times A^{**}$  programok. Igaz-e, hogy ha  $\forall H : A \rightarrow \mathbb{L}$  esetén  $lf(S_1, H) = lf(S_2, H)$ , akkor  $S_1$  ekvivalens  $S_2$ -vel?

3.7.  $A = \mathbb{N}$ .  $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{**}$ .

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (a, \langle a \dots \rangle) \mid a \equiv 1 \pmod{4} \\ \cup \{(b, \langle b \rangle), (b, \langle b, b/2 \rangle) \mid b \equiv 2 \pmod{4}\} \\ \cup \{(c, \langle c, 2c \rangle) \mid c \equiv 3 \pmod{4}\} \\ \cup \{(d, \langle d, d/2 \rangle) \mid d \equiv 0 \pmod{4}\}, \end{array} \right.$$

$$H(x) = (x \text{ páros szám}). [lf(S, H)] = ?$$

3.8. Adott az  $A = V \times V \times \mathbb{L}$  állapotér ( $V = \{1, 2, 3\}$ ) és a  $B = V \times V$  paraméterér, továbbá az  $F_1$  és  $F_2$  feladatok.

$$F_1 = \{((a_1, a_2, l), (b_1, b_2, k)) \mid k = (a_1 > a_2)\},$$

$F_2$  specifikációja pedig:

$$A = \begin{array}{ccc} V & \times & V & \times & \mathbb{L} \\ a_1 & & a_2 & & l \end{array}$$

$$B = \begin{array}{cc} V & \times & V \\ a'_1 & & a'_2 \end{array}$$

$$Q : (a_1 = a'_1 \wedge a_2 = a'_2)$$

$$R : (Q \wedge l = (a'_1 > a'_2))$$

Azonosak-e az  $F_1$  és  $F_2$  feladatok?

3.9. Tekintsük az alábbi két feladatot.  $F_1$  specifikációja:

$$A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{cc} x & y \end{array}$$

$$B = \mathbb{Z}$$

$$x'$$

$$Q : (x = x')$$

$$R : (Q \wedge x = |y \cdot y|)$$

$$F_2 = \{((a, b), (c, d)) \mid c = a \wedge |d| \cdot d = c\}.$$

Megadható-e valamilyen összefüggés  $F_1$  és  $F_2$  között?

3.10. Írja le szövegesen az alábbi feladatot. Legyen  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,

$$A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$$

$$\begin{array}{ccc} m & n & l \end{array}$$

$$B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{cc} m' & n' \end{array}$$

$$Q : (m = m' \wedge n = n' \wedge m \leq n),$$

$$R : (Q \wedge l = \sum_{i=m}^n g(i)),$$

$$\text{ahol } g : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\},$$

$$g(i) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \forall j \in [m..n] : f(j) \leq f(i); \\ 0 & \text{különbén.} \end{cases}$$

3.11. Igaz-e a specifikáció tételének megfordítása? (Ha  $S$  megoldja  $F$ -et, akkor  $\forall b \in B : Q_b \Rightarrow lf(S, R_b)$ )

3.12. Tekintsük az alábbi feladatot:

$$A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{cc} k & p \end{array}$$

$$B = \mathbb{Z}$$

$$k'$$

$$Q : (k = k' \wedge 0 < k)$$

$$R : (Q \wedge \text{prim}(p) \wedge \forall i > 1 : \text{prim}(i) \rightarrow |k - i| \geq |k - p|),$$

ahol  $\text{prim}(x) = (x \text{ prímszám})$ .

Mit rendel a fent specifikált feladat az  $a = (10, 1)$  és a  $b = (9, 5)$  pontokhoz?  
Fogalmazza meg szavakban a feladatot!

3.13.  $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$

$$B = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{cc} x' & y' \end{array}$$

$$F_1, F_2 \subseteq A \times A$$

$F_1$  specifikációja:

$$Q : (x = x' \wedge y = y')$$

$$R : (x = x' \wedge y = y' \wedge x'|z \wedge y'|z \wedge \forall j \in \mathbb{N} : (x'|j \wedge y'|j) \rightarrow z|j)$$

$$F_2 = \{((a, b, c), (d, e, f)) \mid a = d \text{ és } b = e \text{ és } f|a \cdot b \text{ és } a|f \text{ és } b|f\}$$

Megadható-e valamilyen összefüggés  $F_1$  és  $F_2$  között?

3.14. Adott egy  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  függvény.

$$A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$\quad \quad \quad m \quad \quad n \quad \quad i$$

$$B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$\quad \quad \quad m' \quad \quad n'$$

$$F_1, F_2 \subseteq A \times A$$

$F_1$  specifikációja:

$$Q : (m = m' \wedge n = n')$$

$$R : (m = m' \wedge n = n' \wedge i \in [m..n] \wedge \forall j \in [m..i-1] : f(j) < f(i) \wedge \forall j \in [i..n] : f(j) \leq f(i))$$

$F_2$  specifikációja:

$$Q : (m = m' \wedge n = n')$$

$$R : (i \in [m'..n'] \wedge \forall j \in [m'..n'] : f(j) \leq f(i)).$$

Azonos-e a két feladat?

3.15. Specifikáljuk a következő feladatot:  $A = \mathbb{N}$  és  $v : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ .

$$F \subseteq A \times A, F = \{(s, s') \mid s' = \sum_{k=1}^n v(k)\}$$

3.16. Keressük meg egy természetes szám egy osztóját.

3.17. Keressük meg egy összetett természetes szám egy valódi osztóját.

3.18. Keressük meg egy természetes szám egy valódi osztóját.

3.19. Keressük meg egy természetes szám összes valódi osztóját.

3.20. Keressük meg egy természetes szám legnagyobb prímosztóját.

3.21. Állapítsuk meg, hány valódi osztója van egy természetes számnak.

3.22. Keressük az  $[m..n]$  intervallumban az első olyan számot, amelyiknek van valódi osztója.

3.23. Keressük az  $[m..n]$  intervallumban azt a számot, amelyiknek a legtöbb valódi osztója van, de nem osztható 6-tal.

3.24. Az  $[m..n]$  intervallumban melyik számnak van a legtöbb valódi osztója?



## 4. Kiterjesztések

- 4.1.  $B = \mathbb{N}, A = B \times \mathbb{N}. F \subseteq B \times B. F = \{(q, r) \mid r = q + 1\}$ . Mi az  $F$  kiterjesztettje  $A$ -ra?
- 4.2. Igaz-e, hogy ha  $S \subseteq A \times A^{**}$  program,  $B$  altere  $A$ -nak, akkor  $S$   $B \times B$ -ra történő projekciójának kiterjesztése  $A$ -ra azonos  $S$ -sel?
- 4.3. Bizonyítsuk be, hogy egy program kiterjesztettje valóban program!
- 4.4.  $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ . Mondjunk példát olyan programra, amelynek egyetlen valódi altérre vett projekciója sem program. ( $A_k = \mathbb{N}, k = 1, \dots, n$ ).
- 4.5. Legyen  $A$  altere  $B$ -nek,  $F \subseteq A \times A, F'' \subseteq B \times B, F'$  az  $F$  kiterjesztettje  $B$ -re. Igaz-e, hogy
- ha  $F = pr_A(F'')$ , akkor  $F''$  az  $F$  kiterjesztettje?
  - $F' = pr_A^{(-1)}(F)$  ? ill.  $F' = pr_A^{-1}(F)$  ?
- 4.6. Legyen  $F \subseteq A \times A, F' \subseteq B \times B, F'' \subseteq C \times C, F''' \subseteq D \times D$ , ahol  $B = A \times A_1, C = A \times A_2, D = A \times A_1 \times A_2$ , és legyen  $F', F'', F'''$  az  $F$  kiterjesztése rendre  $B$ -re,  $C$ -re,  $D$ -re. Igaz-e, hogy  $F'''$  az  $F''$  kiterjesztése  $D$ -re? Adja meg az  $F'$  és az  $F''$  közötti kapcsolatot a projekció és a kiterjesztés fogalmának segítségével!
- 4.7.  $B$  és  $C$  altere  $A$ -nak.  $F \subseteq A \times A, F_1 \subseteq B \times B, F_2 \subseteq C \times C. F_1$  az  $F$  projekciója  $B$ -re.  $F$  az  $F_2$  kiterjesztése  $A$ -ra. Igaz-e, hogy az  $F_1$  feladat  $A$ -ra való kiterjesztettjének  $C$ -re vett projekciója megegyezik  $F_2$ -vel?

## 6. Programkonstrukciók

6.1.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .  $[\pi_1] = \{1, 2, 3, 4\}$ .  $[\pi_2] = \{1, 3, 4, 5\}$ .

$$S_1 = \left\{ \begin{array}{llll} 1 \rightarrow 14 & 1 \rightarrow 12 \dots & 2 \rightarrow 2132 & 3 \rightarrow 36 \\ 4 \rightarrow 463 & 4 \rightarrow 451 & 5 \rightarrow 563 & 6 \rightarrow 612 \end{array} \right\},$$

$$S_2 = \left\{ \begin{array}{llll} 1 \rightarrow 134 & 1 \rightarrow 121 & 2 \rightarrow 2132 \dots & 3 \rightarrow 36 \\ 4 \rightarrow 463 & 4 \rightarrow 451 \dots & 5 \rightarrow 5632 & 6 \rightarrow 61 \dots \end{array} \right\}.$$

Adja meg az  $(S_1; S_2)$ ,  $IF(\pi_1 : S_1, \pi_2 : S_2)$ ,  $DO(\pi_1, S_1)$  programokat és a programfüggvényeiket!

6.2. Legyen  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $[\pi_1] = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $[\pi_2] = \{2, 3, 4\}$ ,  $[\pi_3] = \{1, 4, 6\}$  és

$$S_1 = \left\{ \begin{array}{lll} 1 \rightarrow 12 \dots & 2 \rightarrow 23 & 3 \rightarrow 3456 \\ 4 \rightarrow 463 & 5 \rightarrow 53 & 6 \rightarrow 62 \end{array} \right\},$$

$$S_2 = \left\{ \begin{array}{lll} 1 \rightarrow 12 & 2 \rightarrow 24 & 3 \rightarrow 3 \dots \\ 4 \rightarrow 43 & 5 \rightarrow 5 & 6 \rightarrow 61 \end{array} \right\},$$

$$S_3 = \left\{ \begin{array}{lll} 1 \rightarrow 12 & 2 \rightarrow 2 \dots & 3 \rightarrow 31 \\ 4 \rightarrow 432 & 5 \rightarrow 5 \dots & 6 \rightarrow 63 \dots \end{array} \right\}.$$

Mi lesz  $IF(\pi_1 : S_1, \pi_2 : S_2, \pi_3 : S_3)$ ,  $\mathcal{D}_p(IF)$ ,  $p(IF)$ ?

6.3. Legyen  $S_1$  és  $S_2$  egy-egy program az  $A$  állapottéren. Igaz-e, hogy  $S_2 \circ \tau \circ S_1$  megegyezik  $(S_1; S_2)$ -vel?

6.4.  $S = (S_1; S_2)$ . Igaz-e, hogy

- $\mathcal{D}_p(S) = [lf(S_1, \mathcal{P}(\mathcal{D}_p(S_2)))]$ ?
- tetszőleges  $R$  utófeltételre:  $lf((S_1; S_2), R) = lf(S_1, lf(S_2, R))$ ?

6.5. Van-e olyan program, amely felírható szekvenciaként is, elágazásként is, és felírható ciklusként is?

6.6. Igaz-e, hogy minden program felírható szekvenciaként is, elágazásként is, és felírható ciklusként is?

6.7.  $IF = (\pi_1 : S_1, \dots, \pi_n : S_n)$ . Igaz-e, hogy  $\mathcal{D}_p(IF) = \bigcup_{k=1}^n ([\pi_k] \cap \mathcal{D}_p(S_k))$ ?

6.8. Legyen  $S_1, S_2, \dots, S_n$  program  $A$ -n!  $IF = (\pi_1 : S_1, \dots, \pi_n : S_n)$ .  $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$ . Keressünk olyan  $\pi_k$  feltételeket és  $S_k$  programokat, hogy  $\mathcal{D}_p(IF) = A$  és  $\mathcal{D}_p(S) = \emptyset$ !

6.9.  $IF = (\pi_1 : S_1, \dots, \pi_n : S_n)$ .  $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$ . Igaz-e, hogy  $p(IF)$  része  $p(S)$ -nek?

6.10. Igaz-e? Ha  $IF = (\pi_1 : S_1, \pi_2 : S_2)$ , akkor  $\mathcal{D}_p(IF) = ([\pi_1] \cap [\pi_2] \cap \mathcal{D}_p(S_1) \cap \mathcal{D}_p(S_2)) \cup (\mathcal{D}_p(S_1) \cap ([\pi_1] \setminus [\pi_2])) \cup (\mathcal{D}_p(S_2) \cap ([\pi_2] \setminus [\pi_1]))$ ?

6.11.  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ .

$IF$	
$i = 1$	$i \leq 2$
$i := 2i$	$SKIP$

Milyen sorozatokat rendel  $S_1, S_2, IF$  az állapottér egyes pontjaihoz?

6.12.  $S = (S_1; S_2)$ .  $S_1$  megoldja  $F_1$ -et, és  $S_2$  megoldja  $F_2$ -t. Megoldja-e  $S$  az

a)  $F = F_2 \circ F_1$  feladatot?

b)  $F = F_2 \odot F_1$  feladatot?

6.13.  $S = (S_1; S_2)$ .  $S$  megoldása az  $(F_2 \odot F_1)$  feladatnak.

Megoldja-e  $S_1$  az  $F_1$ -et, illetve  $S_2$  az  $F_2$ -t?

6.14.  $IF = (\pi_1 : S_1, \dots, \pi_n : S_n)$ .  $F \subseteq A \times A$  feladat.  $\forall k \in [1..n] : S_k$  megoldja az  $F|_{\lceil \pi_k \rceil}$  feladatot.

a)  $IF$  megoldja-e az  $F$  feladatot?

b)  $IF$  megoldja-e az  $F$  feladatot, ha  $\pi_1 \vee \pi_2 \vee \dots \vee \pi_n = \text{igaz}$ ?

c)  $IF$  megoldja-e az  $F$  feladatot, ha  $\mathcal{D}_F \subseteq \lceil \pi_1 \vee \pi_2 \vee \dots \vee \pi_n \rceil$ ?

6.15.  $IF = (\pi_1 : S_1, \dots, \pi_n : S_n)$ .  $F \subseteq A \times A$  feladat.  $IF$  megoldja az  $F$  feladatot. Igaz-e, hogy  $\forall k \in [1..n] : S_k$  megoldja az  $F|_{\lceil \pi_k \rceil}$  feladatot?

6.16.  $IF = (\pi_1 : S_1, \dots, \pi_n : S_n)$ .  $F_1, \dots, F_k \subseteq A \times A$  feladat.  $\forall k \in [1..n] : S_k$  megoldja az  $F_k$  feladatot. Megoldja-e  $IF$  az  $F = F_1 \cup \dots \cup F_n$  feladatot?

6.17.  $IF = (\pi_1 : S_1, \dots, \pi_n : S_n)$ .  $F \subseteq A \times A$  feladat.  $IF$  megoldja az  $F$  feladatot, és  $\lceil \pi_1 \rceil \cup \dots \cup \lceil \pi_n \rceil \subseteq \mathcal{D}_F$ . Igaz-e, hogy  $\forall k \in [1..n] : S_k$  megoldja az  $F|_{\lceil \pi_k \rceil}$  feladatot?

6.18.  $IF = (\pi_1 : S_1, \dots, \pi_n : S_n)$ .  $F_1, \dots, F_n \subseteq A \times A$  feladat.  $\forall k \in [1..n] : \mathcal{D}_{F_k} \subseteq \lceil \pi_k \rceil$ , és  $S_k$  megoldja az  $F_k$  feladatot.  $F = F_1 \cup \dots \cup F_n$ . Megoldja-e  $IF$  az  $F$  feladatot?

6.19. Igaz-e, hogy  $IF_1 = (\pi_1 : S_1, \pi_2 : S_2)$  és  $IF_2 = (\pi_1 : S_1, \pi_1 \wedge \pi_2 : S_1 \cup S_2, \pi_2 : S_2)$

a) egyenlő?

b) ekvivalens?

6.20. Legyen  $IF_{34} = (\pi_3 : S_3, \pi_4 : S_4)$ ,  $IF_1 = (\pi_1 : S_1, \pi_2 : IF_{34})$ ,  $IF_2 = (\pi_1 : S_1, \pi_2 \wedge \pi_3 : S_3, \pi_2 \wedge \pi_4 : S_4)$ ! Igaz-e, hogy  $IF_1$  és  $IF_2$

a) egyenlő?

b) ekvivalens?

6.21.  $F \subseteq A \times A$  feladat.  $S_0$  program  $A$ -n.  $S_0$  megoldja  $F$ -et. Megoldja-e a  $DO(\pi, S_0)$  program az  $F$  feladat  $\pi$ -re vonatkozó lezártját?

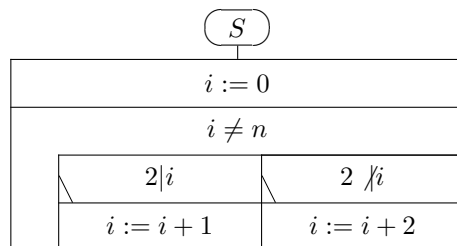
6.22. Legyen  $DO = (\pi, S)$ ! Igaz-e, hogy

a)  $p(DO) \subseteq p(S)$ ?

b)  $p(S) \subseteq p(DO)$ ?

6.23.  $A = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$   
 $\quad \quad \quad i \quad \quad n$

$S = ((i := 0; DO(i \neq n, IF(2|i : i := i + 1, 2 \nmid i : i := i + 2))))$



Milyen sorozatokat rendel  $S$  a (2, 4), illetve a (3, 7) ponthoz?

## 7. Levezetési szabályok

**7.1.** Tegyük fel, hogy teljesül a ciklus levezetési szabályának mind az öt feltétele, és  $Q$  igazsághalmaza nem üres. Lehet-e üres a

- a)  $[P \wedge R]$  halmaz?
- b)  $[P \wedge \neg \pi \wedge R]$  halmaz?

**7.2.** Tegyük fel, hogy teljesül a ciklus levezetési szabályának mind az öt feltétele, és  $(Q \wedge \pi)$  igazsághalmaza nem üres. Lehet-e üres az  $lf(S_0, P)$  és  $lf(DO, R)$  igazsághalmazának metszete?

**7.3.** Tegyük fel, hogy teljesül a ciklus levezetési szabályának mind az öt feltétele. Legyen  $g = p(S_0)|_{\lceil \pi \rceil}$  és  $q \in \lceil P \rceil \cap \lceil \pi \rceil$ . Igaz-e, hogy

- a)  $\forall k \in \mathbb{N}_0 : g^k(q) \subseteq \lceil P \rceil$ ?
- b)  $b \in g^k(q) \cap \lceil \pi \rceil \cap \lceil P \rceil \Rightarrow t(b) \leq t(q) - k$ ?
- c)  $g|_{\pi} = p(S_0)|_{\pi}$ ?
- d)  $\exists k \in \mathbb{N}_0 : k \leq t(q)$  és  $g^k(q) \subseteq \lceil \neg \pi \rceil$ ?

**7.4.** Legyen  $S = (S_1; S_2)$  és  $Q, Q'$  és  $R$  olyan állítások, amelyekre  $Q \Rightarrow lf(S, R), Q' \Rightarrow lf(S_2, R), Q \Rightarrow lf(S_1, Q')$ .

Lehetséges-e, hogy  $\lceil Q \rceil \cap \lceil R \rceil = \emptyset$  és  $\lceil Q \rceil \cap \lceil Q' \rceil \neq \emptyset$  és  $\lceil Q' \rceil \cap \lceil R \rceil \neq \emptyset$ ? Indokolja, ha nem, és írjon rá példát, ha igen!

**7.5.**  $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$

$$B = \begin{array}{cc} x & y \\ \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0 & \\ x' & y' \end{array}$$

$$Q : (x = x' \wedge y = y')$$

$$R : (x = x' - y' \wedge y = 0)$$

$$S_0 = \{((x, y), < (x, y), (x - 1, y), (x - 1, y - 1) >) \mid x \in \mathbb{Z} \text{ és } y \in \mathbb{N}\} \cup \{((x, 0), < (x, 0) >) \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

$$DO = \{((x, y), < (x, y), (x - 1, y), (x - 1, y - 1), (x - 2, y - 1), (x - 2, y - 2), \dots, (x - y + 1, 1), (x - y, 1)(x - y, 0) >) \mid x \in \mathbb{Z} \text{ és } y \in \mathbb{N}_0\}.$$

Megjegyzés: Az  $(x, 0)$  párhoz 1 hosszúságú, az  $(x, 1)$  párhoz 3 hosszúságú, az  $(x, 2)$  párhoz 5 hosszúságú sorozatot rendel a program.

Tudjuk, hogy  $DO = (\pi, S_0)$  valamilyen  $\pi$ -re. Igaz-e, hogy található olyan  $P$  állítás és  $t : A \rightarrow \mathbb{Z}$  függvény, hogy a ciklus levezetési szabályának feltételei teljesülnek, és ha igen, adjon meg egy megfelelő  $\pi$ -t,  $P$ -t és  $t$ -t!

**7.6.**  $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$B = \begin{array}{cc} k & x & i & a & b \\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & & & & \\ a' & b' & & & \end{array}$$

$$S = (k := 5; (IF(a > b : x := a - b, a \leq b : x := b - a); i := i + 1))$$

$$Q : (a = a' \wedge b = b' \wedge i \in [0..1] \wedge |a - b| > 10)$$

$$R : (a = a' \wedge b = b' \wedge k \cdot i \leq x)$$

Bizonyítsuk be, hogy  $Q \Rightarrow lf(S, R)$ !

## 8. Elemi programok

**8.1.**  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\}, C = A \times B$ . Legyen  $S$  program  $A$ -n,  $S = \{1 \rightarrow \langle 1 \rangle, 2 \rightarrow \langle 2222 \dots \rangle, 3 \rightarrow \langle 31 \rangle\}$ .

Legyen  $S_1$  az  $S$  kiterjesztése  $C$ -re,  $M$  pedig olyan program  $C$ -n, hogy  $M$  ekvivalens  $S$ -sel  $A$ -n.

(a) Elemi program-e  $S$ ?

(b) Elemi program-e  $S_1$ , és biztosan elemi program-e  $M$ ?

**8.2.** Tekintsük az alábbi állapotteret:

$$A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
$$\begin{array}{cc} x & y \end{array}$$

Mi az  $(x, y) := F(x, y)$ ,  $F = (F_1, F_2)$ ,  $F_1(x, y) = y$ ,  $F_2(x, y) = x$ , azaz az  $F(p, q) = \{b \in A \mid x(b) = q \wedge y(b) = p\}$  értékadás  $R = (x < y)$  utófeltételhez tartozó leggyengébb előfeltétele?

**8.3.** Legyen  $A$  tetszőleges állapotter. Melyek azok a feladatok az  $A$ -n, amelyeknek megoldása a *SKIP* program?

**8.4.** Legyen  $A$  tetszőleges állapotter. Melyek azok a feladatok az  $A$ -n, amelyeknek megoldása az *ABORT* program?

## 10. A típus

**10.1.** Adjunk típusspecifikációt, reprezentációs függvényt, típust (ami megfelel a specifikációnak). A lehetséges értékek:  $[0..99999]$ . A műveletek: a következő és az előző 100000 szerinti maradékkal. Az elemi értékek a decimális számjegyek:  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Mutassa meg, hogy a típus megfelel a típusspecifikációnak!

**10.2.**  $E = \{0, 1, 2\}, T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}, \mathbb{F} = \{F\}$ .

$$F = \{((a, b, c), (d, e, f)) \mid \exists k \in \mathbb{Z} : f + k \cdot 10 = a + b\}$$

Készítsen egy olyan típust, amely megfelel a specifikációnak!

**10.3.** Legyen  $\mathcal{T}_{s_1} = (H, I_{s_1}, \mathbb{F}_1), \mathcal{T}_{s_2} = (H, I_{s_2}, \mathbb{F}_2)$  két típusspecifikáció!

1. állítás: Minden  $\mathcal{T}$  típusra:  $\mathcal{T}$  megfelel  $\mathcal{T}_{s_1}$ -nek  $\Leftrightarrow \mathcal{T}$  megfelel  $\mathcal{T}_{s_2}$ -nek.

2. állítás:  $[I_{s_1}] = [I_{s_2}]$  és  $\mathbb{F}_1 = \mathbb{F}_2$ .

Ekvivalens-e a két állítás?

**10.4.** Adott a  $\mathcal{T}_s = (H, I_s, \mathbb{F})$  típusspecifikáció, továbbá adottak a  $\mathcal{T}_1 = (\varrho_1, I_1, \mathbb{S}_1), \mathcal{T}_2 = (\varrho_2, I_2, \mathbb{S}_2)$  típusok. Tegyük fel, hogy  $[I_1] = [I_2], \mathbb{S}_1 = \mathbb{S}_2$  és  $\varrho_1([I_1]) = \varrho_2([I_2])$ , és  $\forall \alpha \in E^* : \varrho_2(\alpha) \subseteq \varrho_1(\alpha)$ , valamint  $\mathcal{T}_1$  feleljen meg  $\mathcal{T}_s$ -nek!

Igaz-e, hogy  $\mathcal{T}_2$  is megfelel  $\mathcal{T}_s$ -nek?

**10.5.** Legyen  $\mathcal{T}_s = (H, I_s, \mathbb{F})$  egy típusspecifikáció,  $\mathcal{T}_1 = (\varrho_1, I_1, \mathbb{S}_1), \mathcal{T}_2 = (\varrho_2, I_2, \mathbb{S}_2)$ . Legyen  $[I_2] \subseteq [I_1], \mathbb{S}_1 = \mathbb{S}_2$  és  $\varrho_1([I_1]) = \varrho_2([I_2])$ , és  $\forall \alpha \in E^* : \varrho_2(\alpha) = \varrho_1(\alpha)$ , valamint  $\mathcal{T}_1$  feleljen meg  $\mathcal{T}_s$ -nek!

Igaz-e, hogy  $\mathcal{T}_2$  is megfelel  $\mathcal{T}_s$ -nek?

**10.6.** Legyen  $\mathcal{T}_S = (T, I_S, \mathbb{F})$  a következő típusspecifikáció:

$I_S = \text{Igaz}, T_2 = \mathbb{N}_0, \mathbb{F} = \{F_1, F_2\}$ .

$F_1$  specifikációja:

$$A = \begin{matrix} T \\ x \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} T \\ x' \end{matrix}$$

$$Q : (x = x')$$

$$R : (\exists z \in \mathbb{Z} : x'_2 = 8 \cdot z + x_2 \text{ és } 0 \leq x_2 < 8)$$

$F_2$  specifikációja:

$$A = \begin{matrix} T & \times & T & \times & \mathbb{L} \\ x & & y & & l \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} T & \times & T \\ x' & & y' \end{matrix}$$

$$Q : (x = x' \wedge y = y')$$

$$R : (l = (x' = y') \wedge x = x' \wedge y = y')$$

$$\mathcal{T} = (\varrho, I, \S), E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

$$\forall e \in E^* : \varrho(e) = \left\{ \left( \mathcal{T}, \sum_{i=1}^{|e|} (e_i \cdot 8^{|e|-i}) \right) \right\}$$

a)

$$I(e) = \begin{cases} igaz, & \text{ha } |e| \geq 1 \text{ és } (e_1 = 0 \Rightarrow |e| = 1); \\ hamis & \text{egyébként.} \end{cases}$$

b)

$$I(e) = \begin{cases} igaz, & \text{ha } |e| \geq 1; \\ hamis & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$S_1 \subseteq (E^*) \times (E^*)^{**}$$

$$\forall e \in E^* : S_1(e) = \left\{ \alpha \in (E^*)^* \mid \begin{array}{l} |\alpha| = |e| \text{ és} \\ \forall i \in [1..|\alpha|] : |\alpha_i| = |\alpha| - i + 1 \text{ és} \\ \forall i \in [2..|\alpha|] : \forall j \in [1..|\alpha_i|] : \alpha_{i_j} = \alpha_{i-1_{j+1}} \end{array} \right\}$$

$$S_2 \subseteq (E^* \times E^* \times \mathbb{L}) \times (E^* \times E^* \times \mathbb{L})^{**}$$

$$\forall e, d \in E^* : \forall l \in \mathbb{L} :$$

$$S_2(e, d, l) = \left\{ \beta \in (E^* \times E^* \times \mathbb{L}) \times (E^* \times E^* \times \mathbb{L})^{**} \mid \begin{array}{l} |\beta| = \min(|e|, |d|) + 1 \text{ és} \\ \forall i \in [2..|\beta|] : \beta_i = (ee, dd, ll) \text{ és} \\ ll = (\forall j \in [1..i-1] : ee_j = dd_j) \text{ és} \\ |ee| = i-1 \text{ és } |dd| = i-1 \text{ és} \\ \forall j \in [1..i-1] : (ee_{i-j} = e_{|e|-j+1} \text{ és } dd_{i-j} = d_{|d|-j+1}) \end{array} \right\}$$

Írja le szavakkal az  $F_1, F_2$  feladatot, a  $\varrho$  relációt és az  $S_1, S_2$  programfüggvényét! Megfelel-e a típus a specifikációnak az a), illetve a b) esetben?

- 10.7.** Adjunk típusspecifikációt, reprezentációs függvényt, absztrakt típust (ami megfelel a specifikációnak)! A típusértékek: a síkvektorok halmaza, a műveletek: két vektor összeadása, valamint annak eldöntése, hogy két vektor számszorosa-e egymásnak.
- 10.8.** Adjunk típusspecifikációt, reprezentációs függvényt, absztrakt típust (ami megfelel a specifikációnak)! A típusértékek: a térvektorok halmaza, a műveletek: két vektor kivonása, valamint egy vektornak egy számmal való szorzása.
- 10.9.** Adjunk típusspecifikációt, reprezentációs függvényt, absztrakt típust (ami megfelel a specifikációnak) a komplex számok típusára, ahol a műveletek két komplex szám összeadása és egy komplex szám képzetes részének meghatározása.
- 10.10.** Adjunk típusspecifikációt, reprezentációs függvényt, absztrakt típust (ami megfelel a specifikációnak) a komplex számok típusára, ahol a műveletek két komplex szám összeszorozása és egy komplex szám  $n$ -dik ( $n \in \mathbb{N}$ ) hatványának meghatározása.
- 10.11.** Adjunk típusspecifikációt, reprezentációs függvényt, absztrakt típust (ami megfelel a specifikációnak). A típusértékek a körlemezek halmaza, a műveletek: egy körlemez eltolása és annak eldöntése, hogy egy síkbeli pont rajta van-e a körlemezen.



- 10.12.** Adjunk típusspecifikációt, reprezentációs függvényt, absztrakt típust (ami megfelel a specifikációnak). A típusértékek: a gömbök halmaza, a műveletek: egy gömb eltolása és annak eldöntése, hogy egy térbeli pont benne van-e a gömbben.
- 10.13.** Adjunk típusspecifikációt, reprezentációs függvényt, absztrakt típust (ami megfelel a specifikációnak). A típusértékek: a négyzetek halmaza, a műveletek: egy négyzet eltolása, egy négyzet méretének megváltoztatása, egy négyzet területének kiszámítása és annak eldöntése, hogy egy síkbeli pont rajta van-e a négyzeten.
- 10.14.** Adjunk típusspecifikációt, reprezentációs függvényt, absztrakt típust (ami megfelel a specifikációnak). A típusértékek: a kockák halmaza, a műveletek: egy kocka eltolása, egy kocka méretének megváltoztatása, egy kocka térfogatának kiszámítása és annak eldöntése, hogy egy térbeli pont benne van-e a kockában.