Bevezetés a programozáshoz I.

1. zárthelyi – PÉLDA

MEGOLDÁS

1. *$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,* **[12 pont]**
$P \subseteq A\times B$, $P = \{(1,b), (1,c), (2,a), (2,e), (4,a), (5,d), (6, c), (6,f)\}$,
$Q \subseteq B\times A$, $Q = \{(a,2), (b,2), (b,4), (b,7), (d,5), (e,1), (f,2), (g,6)\}$.

a) $Q\circ P = \{(1,2), (1,4), (1,7), (2,2), (2,1), (4,2), (5,5), (6,2)\}$ **(1)**
$\mathcal{D}_{Q\circ P} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ **(0,5)**

b) $Q\odot P = \{(2,2), (2,1), (4,2), (5,5)\}$ **(1)**
$\mathcal{R}_{Q\odot P} = \{1, 2, 5\}$ **(0,5)**

c) $P\circ Q = \{(a,a), (a,e), (b,a), (b,e), (d,d), (e,b), (e,c), (f,a), (f,e), (g,c), (g,f)\}$ **(1)**
$P\odot Q = \{(a,a), (a,e), (d,d), (e,b), (e,c), (f,a), (f,e), (g,c), (g,f)\} = P\circ Q \setminus \{(b,a), (b,e)\}$ **(1)**

d) $Q(\{a, b, c\}) =\{2, 4, 7\}$ **(1)**
$P(\{a \in A \mid a > 2 \text{ és } 2|a\}) = \{a, c, f\}$ **(1)**

e) $Q^{(-1)}(\{1, 4, 6, 7\}) = \{b, e, g\}$ **(1)**
$P^{(-1)}(\{a, b, e\}) = \{1, 2, 4\}$ **(1)**

f) $P^{-1}(\{a, b, e\}) = \{2, 4\}$ **(1)**
$(Q\circ P)^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \{2, 4, 6\}$ **(1)**

g) *Determinisztikus-e P és Q?* **(1)**
P nem determinisztikus, mert pl. $P(1) = \{2, 4\}$ kételemű halmaz, tehát $|P(1)| \geq 1$.
Q nem determinisztikus, mert pl. $Q(b) = \{2, 4, 7\}$ háromelemű halmaz, tehát $|Q(b)| \geq 1$.

2. *$P = \{(x,y) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N} \mid x \text{ nem prím és } y|x\}$, $R = \{(x,y) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N} \mid y = x \text{ vagy } y = 2x\}$, $F_1 := R\circ P$, $F_2 := R\odot P$.* **[12 pont]**

a) $F_1 = R\circ P = \{(x,z) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N} \mid \exists\, y \in \mathbf{N} : (x,y) \in P \text{ és } (y,z) \in R\} =$ **(5)**
$\{(x,z) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N} \mid \exists\, y \in \mathbf{N} : (x \text{ nem prím és } y|x) \text{ és } (z = y \vee z = 2y)\} =$
$\{(x,z) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N} \mid x \text{ nem prím és } (z|x \text{ vagy } {}^{z}/_{2}|x)\}$

Mivel $\mathcal{D}_R = \mathbf{N}$, ezért $\forall x \in \mathbf{N} : P(x) \subseteq \mathcal{D}_R$. Így $F_2 = R\odot P = R\circ P = F_1$.

<u>Megjegyzés:</u> $F_1 = F_2 = \{(x,z) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N} \mid x \text{ nem prím és } (z|x \text{ vagy } (2|z \text{ és } {}^{z}/_{2}|x))\}$ pontosabb lenne.

b) *Legyen $S \subseteq \mathbf{N}\times\mathbf{N}^{**}$, $S = \{(1, \langle 1\rangle)\} \cup \{(a, \langle a, a-1, \ldots, 2\rangle) \mid a \text{ páratlan és } a > 1\}$* **(7)**
$\cup \{(a, \langle a, {}^{a}/_{2}, {}^{a}/_{2}-1, \ldots, 1\rangle) \mid a \text{ páros}\}$.
Megoldja-e az S program az F_1 feladatot?

Igen, mivel a megoldás két feltétele teljesül:

1. $\mathcal{D}_{F_1} \subseteq \mathcal{D}_{p(S)}$, ugyanis:
   $\forall x \in \mathbf{N} : S(x) \subseteq \mathbf{N}^*$ (a program minden ponthoz csak véges sorozatot rendel), ezért $\mathcal{D}_{p(S)} = \mathbf{N}$;
   $\mathcal{D}_{F_1} = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ nem prím}\} \subseteq \mathbf{N} = \mathcal{D}_{p(S)}$.
2. $\forall a \in \mathcal{D}_{F_1} : p(S)(a) \subseteq F_1(a)$, ugyanis:
   Az *a)* részben kapott eredmények alapján $\forall a \in \mathcal{D}_{F_1}$ –re $\{1, 2\} \cup \{a, 2a\} \subseteq F_1(a)$, hiszen $1|a$ és $a|a$.
   - $a = 1$ esetén: $p(S)(a) = \{1\} \subseteq \{1, 2\} = F_1(a)$.
   - $a \in \mathcal{D}_{F_1}$ és páros esetén: $p(S)(a) = \{1\} \subseteq \{1, 2, a, 2a\} \subseteq F_1(a)$.
   - $a \in \mathcal{D}_{F_1}$ és $a > 1$ páratlan esetén: $p(S)(a) = \{2\} \subseteq \{1, 2, a, 2a\} \subseteq F_1(a)$.

3. *Legyen $R \subseteq A\times B$, $P, Q \subseteq B$. Milyen összefüggés áll fenn* **[12 pont]**

a) *az $R^{-1}(P \cap Q)$ és az $R^{-1}(P) \cap R^{-1}(Q)$, valamint*
b) *az $R^{-1}(P \cup Q)$ és az $R^{-1}(P) \cup R^{-1}(Q)$ halmazok között?*

a) $R^{-1}(P\cap Q) = \{a \in \mathcal{D}_R \mid R(a) \subseteq P\cap Q\} = \{a \in \mathcal{D}_R \mid R(a) \subseteq P \text{ és } R(a) \subseteq Q\} =$ **(5)**
$= \{a \in \mathcal{D}_R \mid R(a) \subseteq P\} \cap \{a \in \mathcal{D}_R \mid R(a) \subseteq Q\} = R^{-1}(P) \cap R^{-1}(Q)$

Tehát a két halmaz megegyezik.

b) $R^{-1}(P \cup Q) = \{a \in \mathcal{D}_R \mid R(a) \subseteq P \cup Q\}$ **(7)**

$R^{-1}(P) \cup R^{-1}(Q) = \{a \in \mathcal{D}_R \mid R(a) \subseteq P\} \cup \{a \in \mathcal{D}_R \mid R(a) \subseteq Q\} = \{a \in \mathcal{D}_R \mid R(a) \subseteq P \text{ vagy } R(a) \subseteq Q\}$

Mivel $R(a) \subseteq P$ vagy $R(a) \subseteq Q$ esetén $R(a) \subseteq P \cup Q$ teljesül, $R^{-1}(P) \cup R^{-1}(Q)$ halmazban csak olyan pontok lehetnek, amelyek benne vannak $R^{-1}(P \cup Q)$-ban is. Vagyis: $R^{-1}(P) \cup R^{-1}(Q) \subseteq R^{-1}(P \cup Q)$.

De a fordított irányú tartalmazás általában nem áll fenn, pl. $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,4)\}$, $P = \{1,2\}$, $Q = \{2,3\}$ esetén: $R^{-1}(P \cup Q) = R^{-1}(\{1,2,3\}) = \{1\}$, míg $R^{-1}(P) \cup R^{-1}(Q) = R^{-1}(\{1,2\}) \cup R^{-1}(\{2,3\}) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

4. $P \subseteq \mathbf{N_0} \times \mathbf{N_0}$, **[12 pont]**

$$P(a) = \begin{cases} \{a-4\}, & \text{ha } a > 2 \text{ és } a \text{ páros;} \\ \{2^{k+1} \mid k \in \mathbf{N}\}, & \text{ha } a = 1; \\ \{b \in \mathbf{N} \mid b < 1000 \text{ és } 2 \mid b\}, & \text{ha } a = 3; \\ \{a-1\}, & \text{ha } a > 4 \text{ és } a \text{ páratlan.} \end{cases}$$

$\pi : \mathbf{N_0} \to \mathbf{L}, \lceil \pi \rceil = \{x \in \mathbf{N_0} \mid x < 4 \text{ vagy } 6 \mid x\}$

a) $\mathcal{D}_{P|\pi} = \lceil \pi \rceil$, **(3)**

$$(P|\pi)(a) = \begin{cases} \{a-4\}, & \text{ha } a > 0 \text{ és } 6 \mid a; \\ \{2^{k+1} \mid k \in \mathbf{N}\}, & \text{ha } a = 1; \\ \{b \in \mathbf{N} \mid b < 1000 \text{ és } 2 \mid b\}, & \text{ha } a = 3; \\ \{a\}, & \text{ha } a = 0 \text{ vagy } a = 2. \end{cases}$$

b) $\mathcal{D}_P = \mathbf{N_0} \setminus \{0, 2\}$, tehát 0-ba vagy 2-be szeretnénk kijutni. **(5)**

0-ból és 2-ből eleve kint vagyunk; a 2-nél nagyobb párosakból négyesével lefelé lépkedve eljutunk 0-ba vagy 2-be; 1-ből egy lépésben elmehetünk az összes kettőnél nagyobb kettő-hatványba (tehát néggyel osztható számokba), azokból pedig négyesével lefelé lépkedve eljutunk a nullába; 3-ból pedig 1000-nél kisebb páros számokba juthatunk, amelyekből négyesével lefelé lépkedve eljutunk 0-ba vagy 2-be. Tehát a lezárt a teljes $\mathbf{N_0}$-on értelmezve van. Ellenben a korlátos lezárt nincs értelmezve az 1-ben (a 3-ban igen).

$\mathcal{D}_{\overline{P}} = \mathbf{N_0}$, $\mathcal{D}_{\overline{\overline{P}}} = \mathbf{N_0} \setminus \{1\}$,

$$\overline{P}(a) = \begin{cases} \{0\}, & \text{ha } a = 4k \ (k \in \mathrm{N}_0) \\ \{2\}, & \text{ha } a = 4k+2 \ (k \in \mathrm{N}_0); \\ \{0\}, & \text{ha } a = 1; \\ \{0, 2\}, & \text{ha } a = 3. \end{cases}$$

$\forall\, a \in \mathcal{D}_{\overline{\overline{P}}} : \overline{\overline{P}}(a) = \overline{P}(a).$

c) *Adjuk meg a P reláció π feltételre vonatkozó lezártjának és korlátos lezártjának értelmezési tartományát.* **(4)**

$\mathcal{D}_{P|\pi} = \lceil \pi \rceil$ halmazból kell kijutnunk, tehát háromnál nagyobb, hattal nem osztható számokba.

Ezekből a számokból biztosan kijutunk, így csak a $\lceil \pi \rceil$-beli számokat kell megvizsgálnunk. 0-ból és 2-ből biztosan nem jutunk ki. 1-ből elmehetünk az összes kettőnél nagyobb kettő-hatványba, vagyis végtelen sok lehetőségünk van, de mindegyik háromnál nagyobb, hattal nem osztható szám, így minden esetben kijutunk! 3-ból elmehetünk (többek között) a 2-be, amelyből nem jutunk ki, így 3-ból sem. A hattal osztható pozitív egészekből néggyel kisebb számba lépünk, így a 6-nál nagyobb, hattal osztható számokból kijutunk egy lépéssel, a 6-ból viszont a 2-be lépünk, amelyből nem jutunk ki.

Tehát a feltételes lezárt értelmezési tartománya: $\mathbf{N_0} \setminus \{0, 2, 3, 6\}$. A korlátos lezárt pedig megegyezik a lezárttal, ugyanis a $P|\pi$ reláció csak az 1-hez rendel végtelen sok különböző értéket, de mindegyikből egy lépésben kijutunk, így ilyenkor is adható korlát a lépések számára.

Megjegyzés: *Zárthelyiben hasonló feladatnál nem szükséges ilyen részletes szöveges magyarázatot adni, elsősorban a helyes végeredmény a fontos.*

5. *Legyen S_1, $S_2 \subseteq A\times A^{**}$ program és $F \subseteq A\times A$ olyan, hogy $S := (S_1 \cup S_2)$ megoldja az F feladatot.* **[12 pont]**
Igaz-e, hogy ekkor S_1 és S_2 is megoldja az F-et?

Könnyen belátható, hogy két program uniójának programfüggvényére teljesül az alábbi két állítás:

i. $\mathcal{D}_{p(S_1\cup S_2)} = \mathcal{D}_{p(S_1)} \cap \mathcal{D}_{p(S_2)}$
Ugyanis $\mathcal{D}_{p(S_1\cup S_2)} = \{a \in A \mid (S_1\cup S_2)(a) \subseteq A^*\} = \{a \in A \mid S_1(a) \subseteq A^* \text{ és } S_2(a) \subseteq A^*\} = \mathcal{D}_{p(S_1)} \cap \mathcal{D}_{p(S_2)}$

ii. $\forall a \in \mathcal{D}_{p(S_1\cup S_2)} : p(S_1\cup S_2)(a) = p(S_1)(a) \cup p(S_2)(a)$

$S_1\cup S_2$ megoldja F-et, ezért (1) $\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_{p(S_1\cup S_2)}$ és (2) $\forall a \in \mathcal{D}_F : p(S_1\cup S_2)(a) \subseteq F(a)$ teljesül. Az (1)-ből kiindulva i. alapján azt kapjuk, hogy $\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_{p(S_1\cup S_2)} = \mathcal{D}_{p(S_1)} \cap \mathcal{D}_{p(S_2)}$, vagyis (3) $\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_{p(S_1)}$ és (4) $\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_{p(S_2)}$.
Most induljunk ki (2)-ből: $\forall a \in \mathcal{D}_F$ esetén (1) és ii. alapján kapjuk, hogy $p(S_1\cup S_2)(a) = p(S_1)(a) \cup p(S_2)(a) \subseteq F(a)$, vagyis (5) $p(S_1)(a) \subseteq F(a)$ és (6) $p(S_2)(a) \subseteq F(a)$.

Tehát azt kaptuk, hogy (3) és (5) feltételek alapján S_1, a (4) és (6) alapján pedig S_2 is megoldja az F feladatot.

Értékelés: Minden feladat helyes és teljes megoldása 12 pont, amely az egyes részfeladatok mellett feltüntetett részpontszámokból áll össze. Összesen 60 pont.
A dolgozat 20 ponttól *elégséges*, 30 ponttól *közepes*, 40 ponttól *jó*, 50 ponttól *jeles*.

Kovács Péter
kpeter@inf.elte.hu