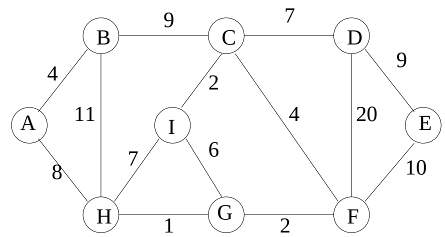
Hálózattervezés Alapjai
gyakorló feladatok 1.

Lukovszki Tamás



1. Ábra

1. feladat: Az 1. ábrán látható $G = (V, E)$ gráfban legyen a terminálok halmaza $N := \{A, C, E, I\}$.

1. Adja meg távolság gráfot N-hez.
2. Adja meg a Steiner-fa éleit, melyet az előadáson bemutatott algoritmus (Takhahashi, Matsuyama) kiszámít.
3. Adja meg a clustereket, melyeket a távolság-heurisztika Mehlhorn változata meghatároz.
4. Adja meg a Steiner-fát, melyet a Mehlhorn algoritmusa kiszámít.
5. Talál-e az iterált 1-heurisztika jobb megoldást?

2. feladat: Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf $c : E \to \mathbb{R}^+$ élsúlyokkal. Legyen $N \subseteq V$ a terminálok halmaza. Tegyük fel, hogy a Steiner probléma egy optimális megoldásának a Steiner-csomópontjainak a halmaza S^* ismert. Hogyan használható fel S^* egy optimális Steiner fa megtalálásához.

3. feladat: Egy $G = (V, E)$ gráfra és $N \subseteq V$ terminálok halmazára jelölje $b(N)$ egy minimális Steiner-fában a minimális levelek számát. Mutassa meg, hogy a távolság heurisztika approximációs rátája $\left(2 - \frac{2}{b(N)}\right)$-re javítható.

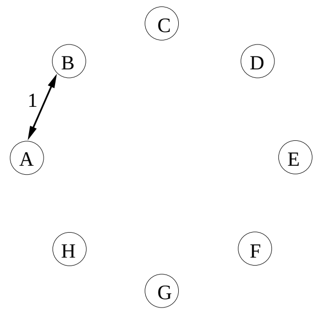
4. feladat: Legyen N pontok halmaza az Euklideszi síkon, $|N| = n$. Minden $p, q \in N$ pontpárra legyen a (p, q) él súlya $||p, q||_2$ az Euklideszi távolság p és q között. Az Euklideszi Steiner probléma, egy olyan T^* fa meghatározása, amely (i) N minden pontját csomópontként tartalmazza és (ii) az ilyen fák közül minimális súlyú. T^* azon csomópotjait, melyek nincsenek benne N-ben, Steiner-csomópontoknak nevezzük.

1. Legyen x egy Steiner-csomópont T^*-ben. Miért nem lehet az x-hez incidens élek száma T^*-ben se egy se kettő?
2. Mutassa meg, hogy a Steiner-csomópontok száma T^*-ben legfeljebb $|N| - 2$.

3. Legyen $MST(N)$ az Euklideszi minimális feszítőfa N-hez. Legyen $c(MST(N))$ a minimális feszítőfa $MST(N)$ súlya és legyen $c(T^*)$ a minimális Steiner-fa T^* súlya. Mutassa meg, hogy $c(MST(N)) \leq (2 - \frac{2}{|N|})c(T^*)$.

5. feladat Adjon egy példát egy olyan $G = (V, E)$ súlyozott gráfra, melyben a legrövidebb út hossza egy s csomóponttól egy v csomóponthoz $\Omega(|V|)$-szer kisebb mint a legrövidebb út hossza a minimális feszítőfában s-től v-hez.

6. feladat Adjon meg egy olyan $G = (V, E)$ súlyozott gráfot s kezdő csomóponttal, melyben a legrövidebb utak fájának a súlya tetszőlegesen nagyobb lehet, mint a minimális feszítőfa súlya.



2. Ábra

7. feladat Mely sorrendben találja meg az előadáson bemutatott (α, β)-LAST algoritmus egy $(2, 3)$-LAST éleit az 2. ábrán látható $G = (V, E)$ gráfban, ha a kezdő csomópont A? G csomópontjai egy szabályos, egységnyi oldalhosszú nyolcszög csúcsaiban helyezkednek el és a költségmátrixban a_{ij} az Euklideszi távolság i és j csomópont között, $i, j \in V$?

8. feladat Mely sorrendben találja meg az előadáson bemutatott Greedy-Spanner algoritmus egy 2-spanner éleit az 2. ábrán látható gráfban?

9. feladat Legyen $G = (V, E)$, $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ egy irányítatlan gráf $c : E \to \mathbb{R}^+$ élsúlyokkal. Tegyük fel, hogy az élek súly szerint növekvő sorrendben rendezve vannak: $c(e_1) \leq c(e_2) \leq ... \leq c(e_m)$. Legyen T egy minimális feszítőfa G-ben, amit Kruskal algoritmusa számít ki és legyen H az a t-spanner, amelyet a Greedy-Spanner algoritmus számít ki, ha mindkét algoritmus az éleket ebben a sorrendben dolgozza fel. Mutassa meg, hogy $E(T) \subseteq E(H)$.