Hálózattervezés Alapjai
2006

3: Access Hálózat Tervezés – Könnyű Közelítően
Legrövidebb-Utak-Fája

Hálózattervezési Problémák

- A hálózattervezés különböző problémák sorozatát foglalja magába
- A cél általánosan:
  - Egy alacsony költségű hálózat megtervezése, amely adott forgalomigényeket kielégít.
  - A topológia és a routing meghatározása
    - Azon csomópontpárok meghatározása, melyeket egymással egy linkkel össze kell kötni.
    - A linkek kapacitásának megatározása.
    - Minden forgalomkövetelményhez az útvonal meghatározása, melyet a routing hozzárendel.

Buy-at-Bulk Hálózattervezési Problémák

- A buy-at-bulk hálózattervezési probléma egy kábeltipussal (ND1K):
- Adott:
  - V: csomópontok n elemű halmaza, a csomópontok 1-től n-ig számozva vannak
  - $R=(r_{ij})$: Forgalomigény-mátrix
    - $r_{ij} \in \mathrm{R}_{\geq 0}$: forgalom egy időegység alatt i -től j-be. Ez valamilyen alap-egységben adott (pl. 2Mbps).
  - F: Egy link installálásának fix alapköltsége.
    Kapacitás-független, minden linknél azonos.
  - $A=(a_{ij})$: Költség-mátrix
    - $a_{ij} \in \mathrm{R}_{\geq 0}$: Egy egységnyi kapacitású link installálásának a költsége i és j között.
    - A szimmetrikus és érvényes rá a háromszög-egyenlőtlenség:
      $\forall\, i,j,k$: $a_{ij} \leq a_{ik} + a_{kj}$
- Feladat: határozzunk meg minden r_{ij} forgalom-igényhez, $0<i\leq j\leq n$, egy P_{ij} utat, úgy hogy

$$\Sigma_{e=\{i,j\}\in E'}(F + \lceil q(e) \rceil\, a_{ij}) \text{ minimális,}$$

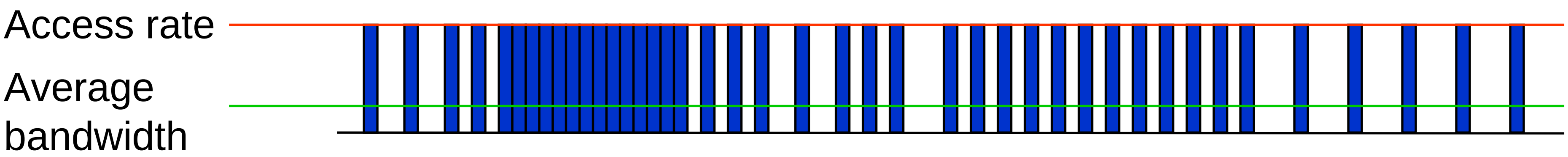
ahol
  - $E' = E(\cup_{0<i\leq j\leq n} P_{ij})$: az installált linkek halmaza,
  - $q(e) = \Sigma_{e\in P_{ij}}\, r_{ij}$: az igények összege, melyek útvonala az e linket tartalmazza

Buy-at-Bulk Hálózattervezési Problémák

Megjegyzés: Az előző fólián definiált probléma egy leegyszerűsítése a gyakorlatban fellépő hálózattervezesi problémának

- Egy link kapacitás-függő költsége gyakran nem lineárisan függ a kapacitástól
- További korlátozások lehetségesek, pl.:
  - Hálózat átmérője
  - Csomópontok foka
- Egy link kapacitásának meghatározásánál gyakran van szerepük sztochasztikus faktoroknak is (különösen Access hálózatok esetén)

Packet level (TCP):



Buy-at-Bulk Hálózattervezési Problémák

Lemma 1: Legyen *OPT* az ND1K probléma optimális megoldásának a költsége. A következő alsó korlátok érvényesek *OPT*-ra:

(1) $OPT \geq F \bullet (n-1) + MST$,
ahol *MST* egy minimális feszítőfa költsége az *n* csomópont által meghatározott teljes gráfban, melyben az (i,j) él súlya a_{ij}, $i,j \in V$, $i \neq j$.

(2) $OPT \geq F \bullet (n-1) + \Sigma_{1 \leq i < j \leq n} \, r_{ij} a_{ij}$

Biz.:

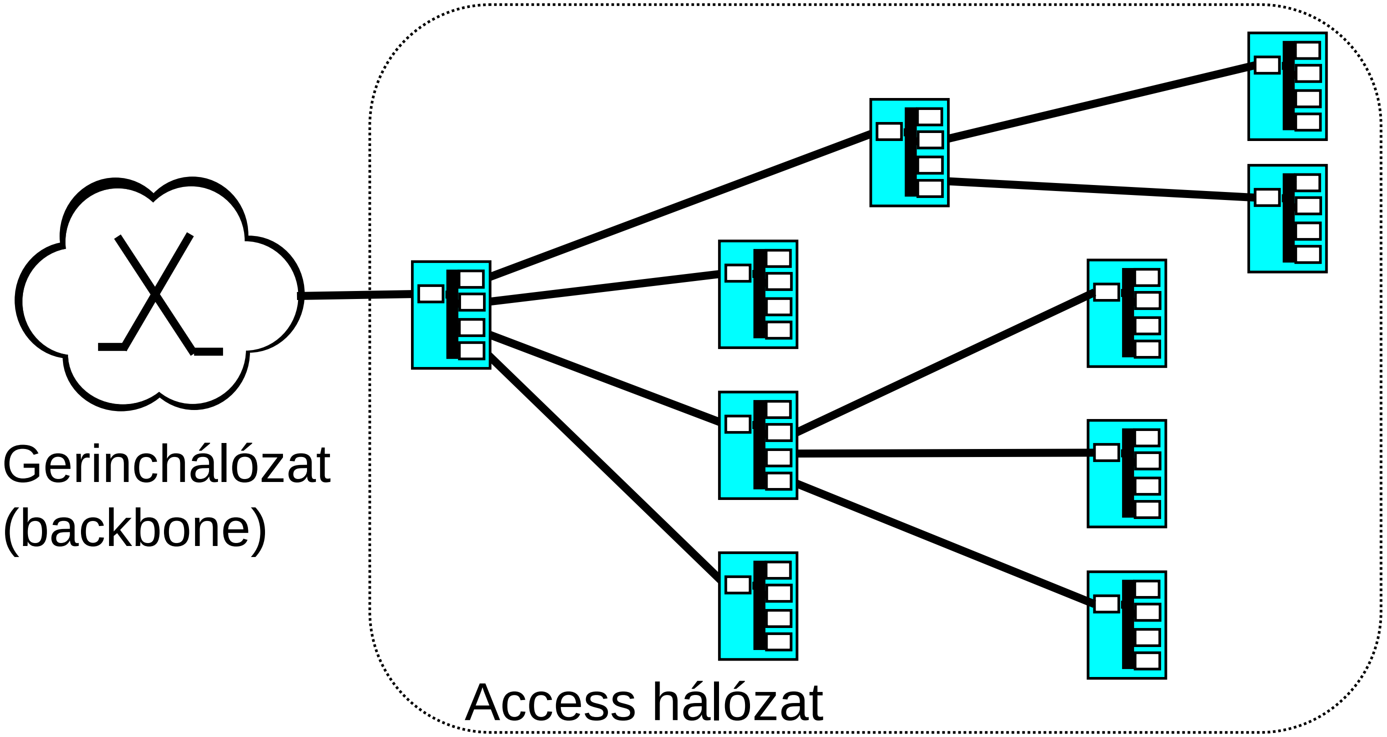
(1) A hálózatnak összefügőnek kell lenni, és tartalmaznia kell egy feszítőfát, melyben minden él kapacitása legalább 1. A kapacitás-független költsége *n*-1 élnek $F \bullet (n-1)$ és a kapacitás-függő legalább *MST.*

(2) A hálózat legalább *n*-1 élet tartalmaz: a kapacitás-független költség így $\geq F \bullet (n-1)$. Minden r_{ij} igény legalább $r_{ij} a_{ij}$ kapacitásfüggő költséget okoz, mivel a háromszög-egyenlőtlenség miatt nincs olyan út *i* és *j* között, ami rövidebb mint a_{ij}.

□

Access Hálózattervezés

- A végfelhasználók egy access hálózaton keresztül csatlakoznak a gerinchálózathoz
- Az access hálózat u.n. koncentrátor csomópontokból áll



Access Hálózattervezés

- Access hálózattervezés egy kábeltipussal (AND1K)
- Minden forgalomigény egy kitüntetett csomópontot, mondjuk az 1-es csomópont, és egy másik csomópontot köt össze
- Az 1-es csomópontot forrásnak nevezzük
- Adott:
  - V: csomópontok n elemű halmaza, a csomópontok 1-től n-ig vannak számozva
  - Igények $r_{1i} > 0$, $2 \le i \le n$
  - F: Egy link installálásának fix alapköltsége
  - $A=(a_{ij})$: Költség mátrix: szimmetrikus és teljesíti a háromszög egyenlőtlenséget
- Feladat: határozzunk meg egy P_{1i} utat minden r_{1i} igényhez, $2 \le i \le n$, úgy hogy

  $\Sigma_{e=\{i,j\}\in E'}(F + \lceil q(e) \rceil a_{ij})$ minimális,

  ahol
  - $E' = E(\cup_{2\le i\le n} P_{1i})$: az installált linkek halmaza,
  - $q(e) = \Sigma_{e\in P_{1i}} r_{1i}$: az igények összege, melyek útvonala az e linket tartalmazza

Approximációs Algoritmus Access Hálózattervezéshez

[Khuller, Raghavachari, Young 95]

- Bemutatunk egy approximaciós algoritmust a AND1K problémához
- Alapja: Egy könnyű közelítően legrövidebb utak fájának (light approximate shortest path tree LAST) kiszámítása
- Egy (α,β)-LAST T egy $G=(V,E)$ gráfhoz $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ élsúlyokkal és s kezdő csomóponttal egy feszítőfája G-nek, amely
  1. approximálja G-nek egy legrövidebb utak fáját s kezdő csomóponttal, azaz minden $v \in V$ csomópontra teljesül
     $$d_T(s,v) \leq \alpha\, d_G(s,v),$$
     ahol
     - $d_T(s,v)$ az út hossza s-től v-hez T-ben
     - $d_G(s,v)$ egy legrövidebb út hossza s-től v-hez G-ben
  2. könnyű: $c(T) \leq \beta\, c(T_M)$, ahol T_M egy minimális feszítőfája G-nek.

Access Hálózattervezés - LAST

<u>Lemma 2</u>: Legyen G az n csomópontú teljes gráf a_{ij} élsúlyokkal.
Legyen T egy (α,β)-LAST G-hez az 1-es kezdő csomóponttal.
Legyen P_{1i} az út az 1-es csomóponttól i-hez T-ben.
Akkor T hálózat költsége a fenti routinggal $\leq(\alpha+\beta)OPT$.

<u>Biz.</u>: Legyen $E'=E(T)$ a T hálózat éleinek halmaza.
Minden $e\in E'$ él legalább egy P_{1i} úton előfordul.
A T hálózat költsége, amely a routingból adódik:

$$C = F\bullet(n\text{-}1) + \Sigma_{e=\{i,j\}\in E'}\lceil q(e)\rceil\, a_{ij}.$$

Minden $e\in E'$ élhez legyen $\Delta(e) := \lceil q(e)\rceil - q(e)$.
$\Delta(e)$ az a kapacitás az e élen, amit megfizetünk, de nincs rá szükség.
Ekkor $C=C_1+C_2$, ahol

$$C_1 = \Sigma_{e=\{i,j\}\in E'}\, q(e)\, a_{ij} \text{ und}$$
$$C_2 = F\bullet(n\text{-}1) + \Sigma_{e=\{i,j\}\in E'}\,\Delta(e)\, a_{ij}$$

Access Hálózattervezés - LAST

Egy r_{1i} igény $r_{1i}\, d_T(1,i)$ költséget ad C_1-hez.
Mivel T egy (α,β)-LAST, $r_{1i}\, d_T(1,i) \leq r_{1i}\, \alpha\, d_G(1,i)$.
Mivel az élsúlyokra érvényes a háromszög-egyenlőtlenség, $d_G(1,i) = a_{1i}$.
Ezért

$$C_1 = \Sigma_{2\leq i\leq n}\, r_{1i}\, d_T(1,i) \leq \alpha\, \Sigma_{2\leq i\leq n}\, r_{1i}\, a_{1i}\ .$$

Így Lemma 1 (2) miatt $C_1 \leq \alpha\, OPT$.

Mivel $\Delta(e) \leq 1$ minden $e\in E'$ élre és T egy (α,β)-LAST, érvényes hogy

$$C_2 \leq F\bullet(n\text{-}1) + \Sigma_{e=\{i,j\}\in E'}\, a_{ij} \leq F\bullet(n\text{-}1) + \beta MST.$$

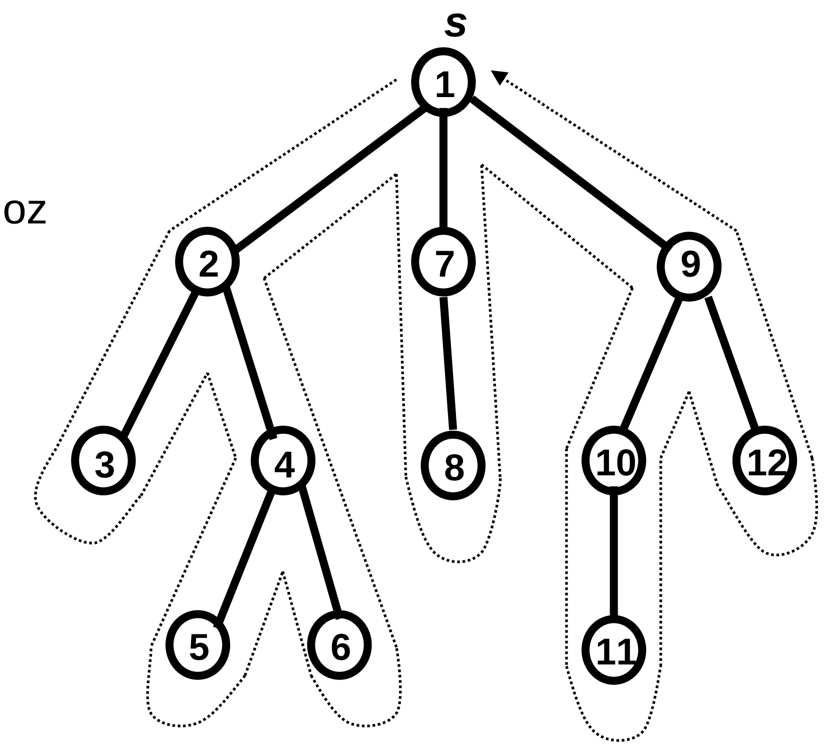
Így Lemma 1 (1) miatt $C_2 \leq \beta\, OPT$, és ezért
$C \leq (\alpha+\beta)OPT$. □

Egy (α,β)-LAST kiszámítása

- Cél: Egy algoritmus, amely kiszámít egy (α,β)-LAST-ot lehetőleg kicsi α és β értékekkel.
- Egy LAST kiszámításához szükség lesz egy minimális feszítőfa csomópontjainak preorder számozására.

Algoritmus Preorder_számozás
Input: Baum $T=(V,E)$
Output: preorder szám $num[v]$ minden $v \in V$ csomóponthoz

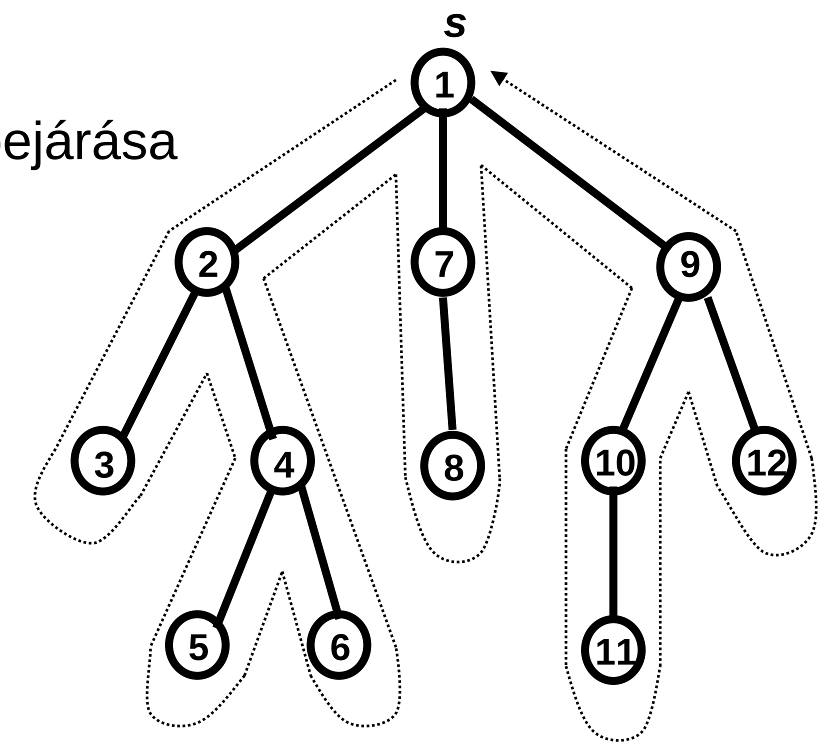
procedure *preorder*(node *v*)
begin
num[*v*]:=*i*; *i*:=*i*+1;
    for all child *w* of *v* do
        preorder(*w*);
    od;
end;
i:=1;
preorder(*s*);



Egy (α,β)-LAST kiszámítása

Lemma 3: Legyen T egy feszítőfája egy $G=(V,E)$ gráfnak $c : E \rightarrow R^+$ élsúlyokkal és legyen s a T gyökere. Legyen $z_0, z_1, \ldots, z_k$ tetszőleges k+1 csomópont T-ben preorder szám szerint növekvő sorrendben. Ekkor

$$\Sigma_{1 \le i \le k}\, d_T\,(z_{i-1}, z_i) \le 2c(T).$$



Biz.: Tekintsük a P utat, amelyet T preorder bejárása definiál. T minden éle pontosan kétszer fordul elő P-ben. Ezért

$$\Sigma_{e \in E(P)} c(e) = 2\, c(T).$$

P tartalmaz minden i-hez, $1 \le i \le k$, egy részútat z_{i-1} első előfordulásától z_i első előfordulásáig.

E részút hossza $\geq d_T\,(z_{i-1}, z_i)$.

Mivel ezek a részutak diszjunkt részutak P-ben, következik az állítás. □

Egy (α,β)-LAST kiszámítása

Algoritmus: (α,β)-LAST

Input: Egy összefüggő irányítatlan gráf $G=(V,E)$, kezdőcsomópont $s \in V$, élsúlyok $c : E \rightarrow R^+$ és α,β értékek $\alpha > 1$ és $\beta = 1 + 2 / (\alpha-1)$.

Output: (α,β)-LAST T.

1. Kiszámítunk egy T_M minimális feszítőfát G-ben;
   Kiszámítjuk a legrövidebb utat s-től minden más csomóponthoz G-ben;
2. Kiszámítjuk T_M csomópontjainak preorder számozását s gyökérrel;
3. $H := T_M$;
4. for all $v \in V$ preorder szám szerint növekvő sorrendben do
   Kiszámítunk egy lerövidebb utat P-t s-től v-hez H-ban;
   if $c(P) \geq \alpha\, d_G(s,v)$ then
   Legyen P_i a legrövidebb út s-től v-hez G-ben;
   Adjuk hozzá P' éleit H-hoz (azaz $E(H) := E(H) \cup E(P_i)$);
   fi;
   od;
5. Kiszámítunk H-ban s kezdőcsomóponttal egy legrövidebb utak fáját T-t;
6. return T;

Egy (α,β)-LAST kiszámítása

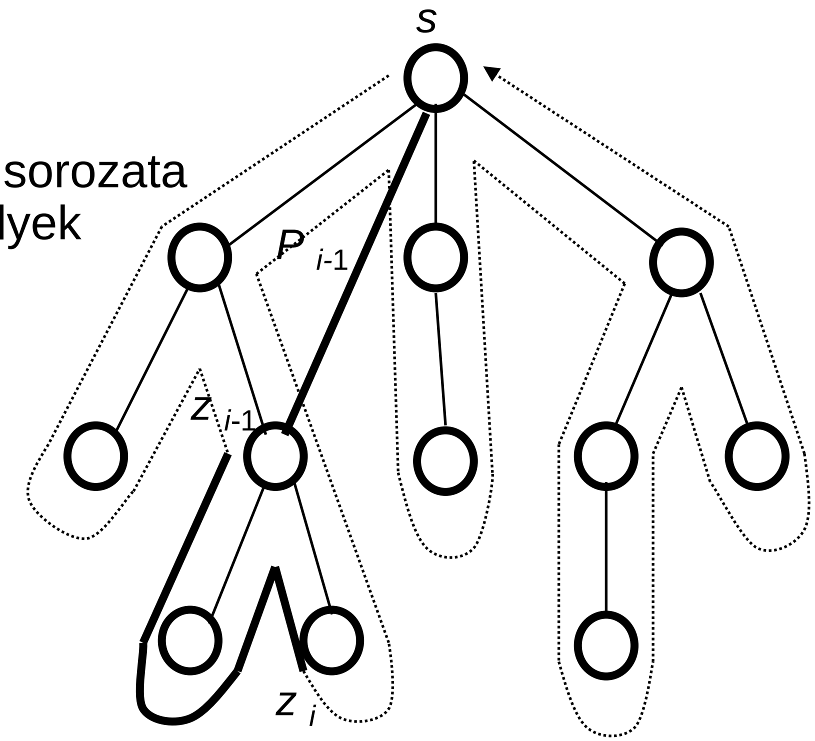
Lemma 4: Legyen $\alpha > 1$ és $\beta = 1 + 2 / (\alpha-1)$.
A H gráfra az (α,β)-LAST algoritmusban érvényes:

(1) minden $v \in V$ csomópontra, egy legrövidebb út költsége s-től v-hez H-ban $\leq \alpha\, d_G(s,v)$, és

(2) H összköltsége $c(H) \leq \beta\, c(T_M)$.

Bew.: A 4. lépés biztosítja, hogy (1) teljesül.
(2): Legyen $z_0=s$ és $z_1,\ldots,z_k$ azon csomópontok sorozata preorder szám szerint növekvő sorrendben, melyek a 4. lépésben P_i (egy legrövidebb út s-től z_i-hez G-ben) hozzáadását okozták H-hoz.
Amikor z_i (i=1,…,k) a 4. lépésben feldolgozásra kerül, H tartalmazza azt az utat, ami következőképp áll össze:

- P_{i-1}, egy legrövidebb út s-től z_{i-1}-hez G-ben kiegészítve
- T_M preorder bejárása által definiált út részútjával z_{i-1}-től z_i-hez.



Egy (α,β)-LAST kiszámítása

Ezen út költsége $d_G(s,z_{i-1}) + d_{T_M}(z_{i-1},z_i)$.

Mivel egy legrövidebb P út s-től z_i-hez H-ban legfeljebb ekkora költségű és

$c(P) > \alpha\, d_G(s,z_i)$ (4. lépés miatt), teljesül hogy

$d_G(s,z_{i-1}) + d_{T_M}(z_{i-1},z_i) > \alpha\, d_G(s,z_i)$, átrendezve:

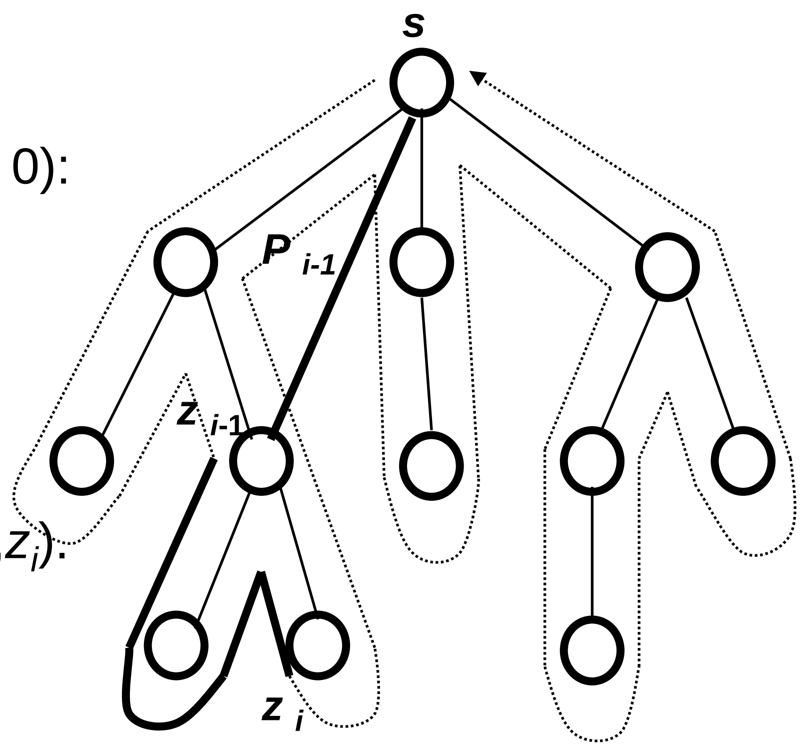
$\alpha\, d_G(s,z_i) - d_G(s,z_{i-1}) < d_{T_M}(z_{i-1},z_i)$.

Összeadva minden i-re, i=1,…,k (mivel $d_G(s,z_0) = 0$):

$$\begin{array}{ll}
\alpha\, d_G(s,z_1) - d_G(s,z_0) & < d_{T_M}(z_0,z_1) \\
\alpha\, d_G(s,z_2) - d_G(s,z_1) & < d_{T_M}(z_1,z_2) \\
\ldots & \\
\alpha\, d_G(s,z_k) - d_G(s,z_{k-1}) & < d_{T_M}(z_{k-1},z_k) \\
\hline
\alpha\, d_G(s,z_k) + \Sigma_{1\le i<k}(\alpha-1)\, d_G(s,z_i) & < \Sigma_{1\le i\le k} d_{T_M}(z_{i-1},z_i).
\end{array}$$

Így

$$\Sigma_{1\le i\le k}(\alpha-1)\, d_G(s,z_i) < \Sigma_{1\le i\le k} d_{T_M}(z_{i-1},z_i)$$



Egy (α,β)-LAST kiszámítása

Lemma 3 miatt $\Sigma_{1\le i\le k}\, d_{T_M}(z_{i-1},z_i) \le 2c(T_M)$.
Így

$$\Sigma_{1\le i\le k} d_G(s,z_i) < (1 / (\alpha-1))\ \Sigma_{1\le i\le k} d_{T_M}(z_{i-1},z_i) \le 2c(T_M) / (\alpha-1).$$

Mivel

$$c(H) \le c(T_M) + \Sigma_{1\le i\le k} d_G(s,z_i) \le (1 + 2 / (\alpha-1))\, c(T_M),$$

a bizonyítás teljes □

<u>Satz 1</u>: Legyen $\alpha > 1$ és $\beta = 1 + 2 / (\alpha-1)$. A ($\alpha$,$\beta$)-LAST algoritmus polinomiális idő alatt kiszámít egy (α,β)-LAST-ot *G*-ben, azaz egy *T* feszítőfát, amelyre

- $\forall\, v\in V : d_T(s,v) \le \alpha\, d_G(s,v)$ és
- $c(T) \le \beta\, c(T_M)$. □

Access Hálózatervezés

Megjegyzés: Az ANDK1K access hálózattervezés problémában
$(\alpha+\beta) = (\alpha + 1 + 2 / (\alpha-1))$ értéket kell minimalizálni ahhoz, hogy a legjobb approximációs rátát garantáljuk.
A minimum $\alpha = \beta = 1+\sqrt{2}$.
Ekkor az approximációs ráta $(\alpha+\beta) = (2+2\sqrt{2}) \approx 4,82$.

Algorithmus: AND1K

Input: csomópontok n elemű halmaza V, (csomópont 1 a forrás);
forgalomigények r_{1i}, $2 \le i \le n$; fix költség F, költség mátrix $A = (a_{ij})$

Output: Utak P_{1i} , $2 \le i \le n$.

1. Kiszámítunk egy $(1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$-LAST-ot T-t az 1-es kezdőcsomóponttal a teljes gráfban, melynek csomóponthalmaza V és az élsúlyok a_{ij}
2. P_{1i} := az út 1-től i-hez T-ben, $2 \le i \le n$.

Access Hálózattervezés

Tétel 2: Az AND1K algoritmus kiszámítja polinomiális idő alatt az AND1K probléma egy megoldását, melynek költsége legfeljebb $(2+2\sqrt{2})$ *OPT*. □

Irodalom

- S. Khuller, B. Raghavachari, and N. Young: **Balancing minimum spanning and shorthest path trees**. *Algorithmica*, Vol. 14, 305-322, 1995.
- F. Salman, J. Cheriyan, R. Ravi, amd S. Subramanian: **Buy-at-bulk network design: approximating the single-sink edge installation problem.** *Proc. ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA´97)*, 1997.