

Hálózattervezés Alapjai

2006

4: Általános Hálózat Tervezés – Spanner Gráfok

Buy-at-Bulk Hálózattervezési Problémák

- Emlékeztető: A **buy-at-bulk** hálózattervezési probléma egy kábeltypussal (ND1K)
- Adott:
 - V : csomópontok n elemű halmaza, a csomópontok 1-től n -ig számozva vannak
 - $R=(r_{ij})$: Forgalomigény-mátrix
 - $r_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$: forgalom egy időegység alatt i -től j -be.
 - F : Egy link installálásának fix alapköltsége (kapacitás-független költség).
 - $A=(a_{ij})$: Költség-mátrix
 - $a_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$: Egy egységnyi kapacitású link installálásának a költsége i és j között.
 - A szimmetrikus és érvényes rá a háromszög-egyenlőtlenség.
- Feladat: határozzunk meg minden r_{ij} forgalom-igényhez, $0 < i \leq j \leq n$, egy P_{ij} utat, úgy hogy
$$\sum_{e=\{i,j\} \in E'} (F + \lceil q(e) \rceil a_{ij})$$
 minimális,
ahol
 - $E' = E(\cup_{0 < i \leq j \leq n} P_{ij})$: az installált linkek halmaza,
 - $q(e) = \sum_{e \in P_{ij}} r_{ij}$: az igények összege, melyek útvonala az e linket tartalmazza

Buy-at-Bulk Hálózattervezési Problémák

Emlékeztető:

Lemma 1: Legyen OPT az ND1K probléma optimális megoldásának a költsége. A következő alsó korlátok érvényesek OPT -ra:

(1) $OPT \geq F \cdot (n-1) + MST,$

ahol MST egy minimális feszítőfa költsége az n csomópont által meghatározott teljes gráfban, melyben az (i,j) él súlya a_{ij} , $i,j \in V$, $i \neq j$.

(2) $OPT \geq F \cdot (n-1) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} r_{ij} a_{ij}$

Hálózattervezés – Spanner gráfok [Mansour, Peleg 94]

- Cél: Egy olyan hálózatot konstruálni,
 - amelyben minden i, j csomópontpárra az út i -től j -hez nem sokkal hosszabb, mint a_{ij} és
 - könnyű: a hálózat súlya nem sokkal nagyobb, mint a minimális feszítőfáé
- Legyen $G=(V,E)$ egy összefüggő irányítatlan gráf $c: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ élsúlyokkal. Jelölje $d_G(u,v)$ egy legrövidebb út hosszát u -tól v -hez G -ben (c súlyoknak megfelelően).
 - Egy H részgráfot G -ben G **feszítő részgráfjának** nevezünk, ha H tartalmazza G minden csomópontját, azaz $H \subseteq G$ és $V(H) = V(G)$.
 - Jelölje $stretch(H) := \max_{u,v \in V} (d_H(u,v) / d_G(u,v))$ a H **stretch-faktorát** ($d_H(u,v)$ egy legrövidebb út hosszát u -tól v -hez H -ban).
 - Ha egy adott $t > 1$ -re $stretch(H) \leq t$ érvényes, akkor azt mondjuk, hogy H egy **t -spanner** G -ben.

Greedy-Spanner

Algoritmus: Greedy-Spanner [Althöfer et al. 93]

Input: Egy összefüggő irányítatlan $G=(V,E)$ gráf $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ élsúlyokkal és egy stretch-faktor $t > 1$.

Output: Egy t -spanner $H=(V,E')$ G -ben.

1. Rendezzük az éleket $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, úgy hogy $c(e_1) \leq c(e_2) \leq \dots \leq c(e_m)$;
2. $E' := \emptyset$; $H := (V, E')$;
3. for $i = 1$ to m do
 // Legyen $e_i = \{u, v\}$
 if $d_H(u, v) > t c(\{u, v\})$ then
 $E' := E' \cup \{e_i\}$; $H := (V, E')$;
 fi;
 od;
4. return $H=(V, E')$;

Greedy-Spanner

Tétel 1: A Greedy-Spanner algoritmus kiszámítja G -nek egy H részgráfját, melyre érvényes:

- H egy t -spanner G -ben.
- H legfeljebb $n \lceil n^{2/(t-1)} \rceil$ élét tartalmaz.
- Minden δ -ra, $0 < \delta < \min(1, t-1)$, érvényes

$$c(H) \leq (5 + 32t / \delta^2) \cdot n^{(2+\delta)/(t-1-\delta)} \cdot MST,$$

ahol $c(H) = \sum_{e \in E} c(e)$ a H gráf súlya, MST pedig G egy minimális feszítőfájának a súlya.
(Bizonyítás következik)

Greedy-Spanner – Hálózattervezés

$t = \log n$ és $\delta=1/2$ (z.B.) a következőt kapjuk:

Következmény 1: A Greedy-Spanner algoritmus $t = \log n$ paraméterrel kiszámít egy t -spannert H -t G -ben, melyben az élek száma $O(n)$ és $c(H) = O(\log n) \cdot MST$.

Biz.:

élek száma:

$$|E(H)| = n \lceil n^{2/(\log n - 1)} \rceil = n \lceil 2^{2 \log n / (\log n - 1)} \rceil = O(n)$$

költség :

$$\begin{aligned} c(H) &\leq (5 + 32 \log n / \delta^2) \cdot n^{(2+\delta)/(\log n - 1 - \delta)} \cdot MST \\ &= O(\log n) \cdot 2^{\log n (2+\delta)/(\log n - 1 - \delta)} \cdot MST = O(\log n) MST. \end{aligned}$$

□

Greedy-Spanner – Hálózattervezés

Algoritmus: ND1K [Mansour, Peleg 94]

Input: V halmaz n csomópontal, igény mátrix $R=(r_{ij})$,
fix költség F , költségmátrix $A = (a_{ij})$

Output: P_{ij} út minden $1 \leq i < j \leq n$, amelyre $r_{ij} > 0$.

1. Kiszámítunk a Greedy-Spanner algoritmussal egy $(\log n)$ -spannert H -t a teljes gráfban, melynek csomóponthalmaza V és élsúlyai a_{ij} által adottak
2. $P_{ij} :=$ egy legrövidebb út i -től j -hez H -ban, minden $1 \leq i < j \leq n$.

Greedy-Spanner - Hálózattervezés

Tétel 2: Az ND1K algoritmus polinomiális idő alatt kiszámítja az ND1K probléma egy megoldást, mely megoldásnak a költsége legfeljebb $O(\log n) \cdot OPT$, ahol OPT egy optimális megoldás költségeit jelöli.

Biz.: Legyen C a kiszámított megoldás költsége és E' a megoldás éleinek halmaza.

$$C = F \cdot |E'| + \sum_{e=\{i,j\} \in E'} \lceil q(e) \rceil \cdot a_{ij}.$$

C -t két részre bontjuk C_1 és C_2 (azaz $C = C_1 + C_2$):

$$C_1 = \sum_{e=\{i,j\} \in E'} q(e) \cdot a_{ij}$$

$$C_2 = F \cdot |E'| + \sum_{e=\{i,j\} \in E'} \Delta(e) \cdot a_{ij},$$

ahol $\Delta(e) = \lceil q(e) \rceil - q(e)$ a kapacitás, amit az e linknél megfizetünk, de nem használunk.

Greedy-Spanner - Hálózattervezés

Teljesül:

$$C_1 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} r_{ij} \cdot d_H(i, j),$$

ahol $d_H(i, j)$ egy legrövidebb út hossza H -ban az A mátrixban adott élsúlyoknak megfelelően, amelyet az r_{ij} igényhez rendelünk.

Mivel H egy $(\log n)$ -spanner, teljesül hogy $C_1 \leq (\log n) \sum_{1 \leq i < j \leq n} r_{ij} \cdot a_{ij}$.

Lemma 1(2) szerint $OPT \geq F \cdot (n-1) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} r_{ij} a_{ij}$. Ebből következik, hogy:

$$C_1 \leq (\log n) \cdot OPT.$$

Mivel $\Delta(e) < 1$ minden $e \in E'$ élre:

$$C_2 \leq F \cdot |E'| + \sum_{e=\{i,j\} \in E'} a_{ij}.$$

Következmény 1 szerint $|E'| = O(n)$. Így $F \cdot |E'| \leq \kappa \cdot F \cdot (n-1)$ egy κ konstansra.

Ezenkívül, Következmény 1 alapján teljesül $\sum_{e=\{i,j\} \in E'} a_{ij} \leq O(\log n) \cdot MST$.

Lemma 1(1) szerint: $F \cdot (n-1) + MST \leq OPT$. Ezért

$$C_2 \leq O(\log n) \cdot OPT.$$

Azt kapjuk, hogy $C = C_1 + C_2 = O(\log n) \cdot OPT$. □

Greedy-Spanner – A Stretch-faktor elemzése

Lemma 2: A Greedy-Spanner algoritmus által kiszámított $H=(V,E')$ gráf egy t -spanner $G=(V,E)$ -ben.

Biz.: Minden $e=\{u,v\}\in E'$ élre teljesül $d_H(u,v) = c(e) = d_G(u,v)$.
Tekintsünk egy $e=\{u,v\}$ élet, úgy hogy $e\in E \setminus E'$.

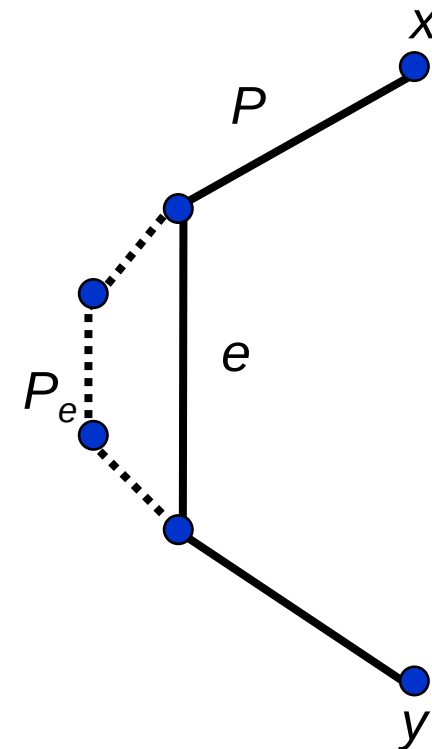
Amikor az algoritmus e -t feldolgozza, H -nak már tartalmaznia kellett egy P_e utat u -tól v -hez, melynek hossza legfeljebb $t \cdot c(e)$.

Legyen x és y két tetszőleges csomópont V -ben és legyen P egy legrövidebb út x -től y -hoz G -ben.

P minden e élét tudjuk helyettesíteni egy H belüli P_e úttal, melynek hossza legfeljebb $t \cdot c(e)$. Ezért

$$d_H(x,y) \leq \sum_{e\in P} \sum_{e'\in P_e} c(e') \leq \sum_{e\in P} t \cdot c(e) = t \cdot d_G(x,y).$$

Így tehát $\text{stretch}(H) \leq t$. $\square$



Greedy-Spanner – Az élek számának elemzése

Szükségünk van a következő két lemmára.

Lemma 3: Legyen H egy irányítatlan gráf n csomóponttal és m éllel, melyben minden kör legalább r élt tartalmaz. Akkor

$$m \leq n \cdot \left\lceil n^{\frac{2}{r-2}} \right\rceil \leq 2 \cdot n^{1+\frac{2}{r-2}}.$$

Lemma 4: H -ban minden kör több mint $t+1$ élt tartalmaz.

Biz. (Lemma 3): Ha $m \leq 2n$, akkor az állítás nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy $m > 2n$. Legyen $k = \lfloor m/n \rfloor + 1$. Ekkor $k \geq 3$.

Amíg H tartalmaz egy u csomópontot, melynek foka $< k$, töröljük u -t az összes incidens éllel H -ból.

Vegyük észre, hogy így nem tudtuk H minden csomópontját törölni, mivel $n-1$ csomópont törlésével legfeljebb $(n-1)(k-1) < m$ élet törölünk, ami ellentmondás lenne.

Legyen H' az a gráf, ami megmarad. H' minden csomópontjának a foka $\geq k$.

Greedy-Spanner – Az élek számának elemzése

1.eset: r páratlan, $r = 2d+1$.

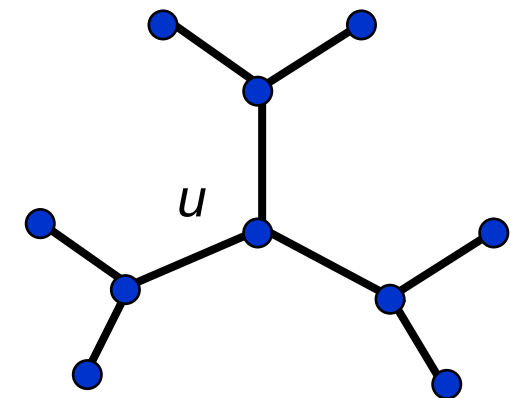
Legyen u egy tetszőleges csomópont H' -ban.

Tekintsük az összes csomópontot H' -ban, amely u -ból legfeljebb d élen keresztül érhető el.

Ezen csomópontok egy fát képeznek H' -ban, mivel H -ban minden kör, és így H' -ben is, legalább $r=2d+1$ élet tartalmaz.

Mivel H' -ben minden csomópont foka $\geq k$, a csomópontok száma ebben fában legalább

$$1 + k \sum_{i=1}^d (k-1)^{i-1} = 1 + k \frac{(k-1)^d - 1}{k-2} = 1 + k \frac{(k-1)^{\frac{r-1}{2}} - 1}{k-2}.$$



$r=5, k=3$

Greedy-Spanner – Az élek számának elemzése

2. eset: r páros, $r = 2d$.

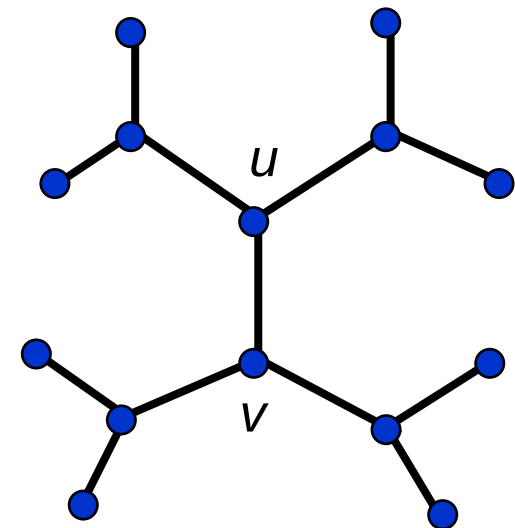
Legyen $\{u, v\}$ egy tetszőleges él H' -ban.

Tekintsük az összes csomópontot H' -ban, amely u -ból vagy v -ből legfeljebb d élen keresztül érhető el.

Ezen csomópontok egy fát képeznek H' -ban, mivel H -ban minden kör, és így H' -ben is, legalább $r=2d$ élet tartalmaz.

Mivel H' -ben minden csomópont foka $\geq k$, a csomópontok száma ebben fában legalább

$$2 \sum_{i=1}^d (k-1)^{i-1} = 2 \frac{(k-1)^d - 1}{k-2} = 2 \frac{(k-1)^{\frac{r}{2}} - 1}{k-2}.$$



$r=6, k=3$

Greedy-Spanner – Az élek számának elemzése

Mindkét esetben teljesül tehát, hogy a csomópontok száma H' -ben, és így akkor H -ban is, nagyobb mint $(k-1)^{r/2 - 1}$. Ezért:

$$n > \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor^{\frac{r}{2}-1}$$

Átrendezve:

$$n^{\frac{2}{r-2}} > \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$$

Akkor teljesül:

$$\left\lceil n^{\frac{2}{r-2}} \right\rceil \geq \frac{m}{n}$$

Magszorozva n -nel megkapjuk Lemma 3 állítását:

$$m \leq n \cdot \left\lceil n^{\frac{2}{r-2}} \right\rceil \leq 2 \cdot n^{1+\frac{2}{r-2}}.$$

□

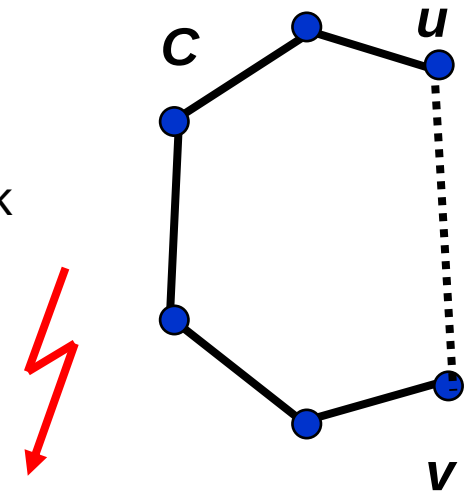
Greedy-Spanner – Az élek számának elemzése

Biz. (Lemma 4: H -ban minden kör több mint $t+1$ élt tartalmaz):
Tegyük fel, hogy H tartalmaz egy C kört legfeljebb $t+1$ éllel.

Legyen $\{u, v\}$ az utolsó él C -ben, amit az algoritmus H -hoz hozzáadott.

A C kör fennmaradó része legfeljebb t élt tartalmaz, melyek mindegyikének súlya legfeljebb $c(\{u, v\})$.

Így H tartalmazott $\{u, v\}$ hozzáadása előtt egy utat u -tól v -hez, melynek súlya $\leq t \cdot c(\{u, v\})$, ami ellentmondás.



Lemma 3 és Lemma 4 implikálja:

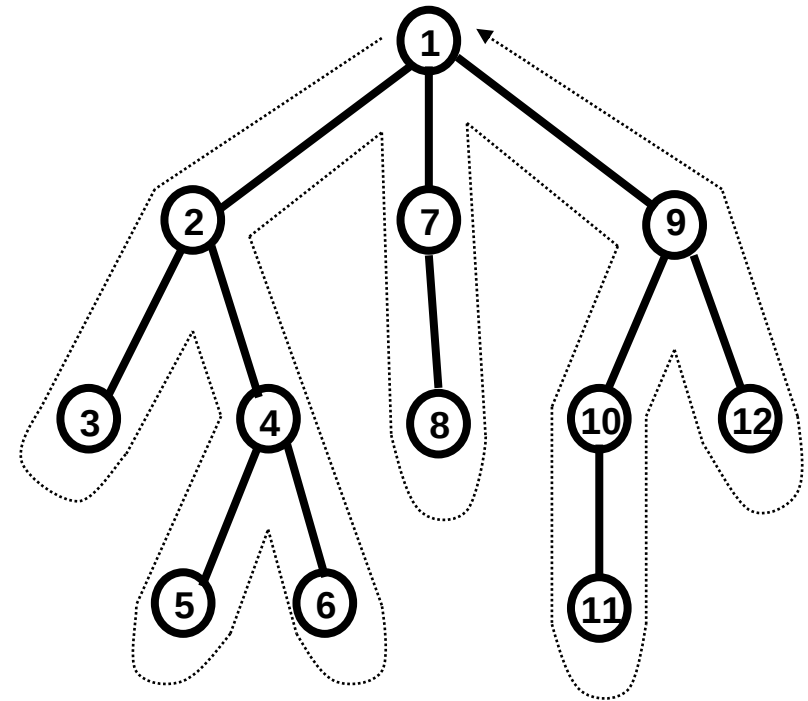
Lemma 5. H legfeljebb $n \cdot \left\lceil n^{\frac{2}{t-1}} \right\rceil$ élt tartalmaz. $\square$

Greedy-Spanner – A súly elemzése

Lemma 6. Legyen T egy minimális feszítőfa G -ben, amelyet Kruskal algoritmusával számítottunk ki. A Greedy-Spanner algoritmus által kiszámított t -spanner H tartalmazza T minden élét, azaz $E(T) \subseteq E'$.

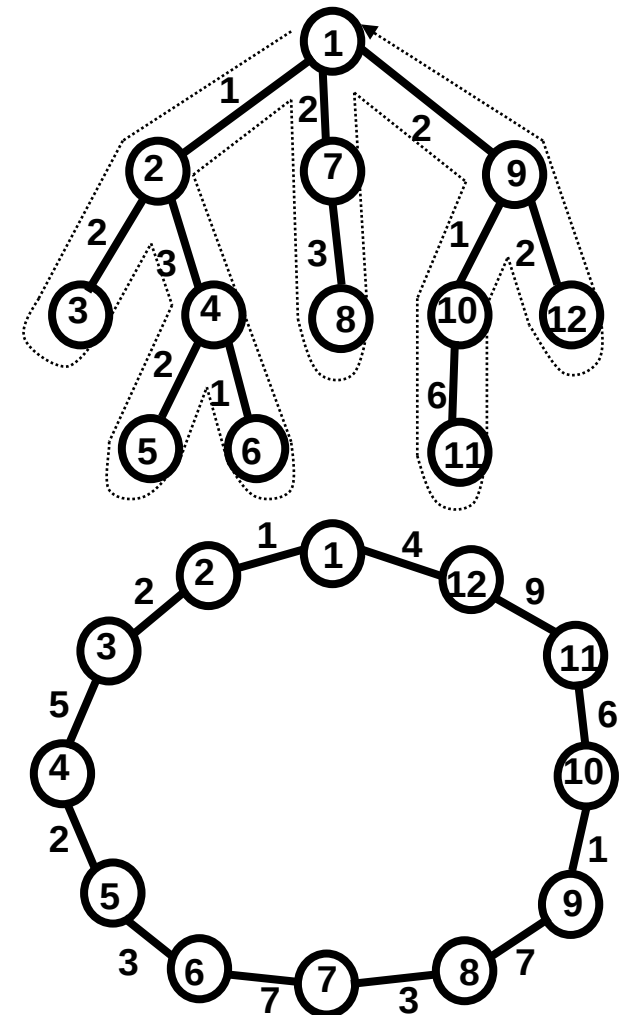
Biz.: Indukció az élek sorrendjén, amely sorrendben mindkét algoritmus feldolgozza azokat (gyakorlat). $\square$

H súlykorlátjának bizonyításához tekintsünk azt a P utat, amit T preorder bejárása definiál. Legyen L az élsúlyok összege P -ben.
 $L = 2c(T) = 2MST$.



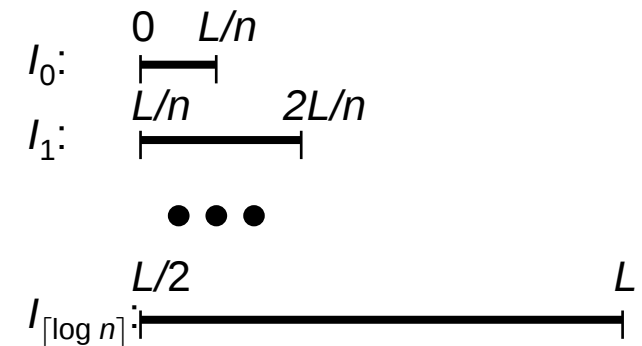
Greedy-Spanner – A súly elemzése

- Tekintsük P -t mint egy kört.
- Minden v csomópontot hozzárendeljük ahhoz a helyhez P -ben, ahol v először fordul elő.
- Legyen $u, v \in V$.
Legyen $d_P(u, v)$ a távolság u első előfordulása és v első előfordulása között P -n.
- Ekkor $d_P(u, v) \geq d_T(u, v)$.



Greedy-Spanner – A súly elemzése

- Definiáljunk $\lceil \log_2 n \rceil + 1$ fázist a Greedy-Spanner algoritmusban a feldolgozott élek súlya alapján következőképpen:
- Legyen $I_0 := [0, L/n]$,
 $I_j := (2^{j-1} \cdot L/n, 2^j \cdot L/n] : j = 1, \dots, \lceil \log_2 n \rceil$.
- A j -edik fázisban az algoritmus azokat az éleket dolgozza fel, melyek súlya az I_j intervallumba esik.
- Legyen $E_j := \{ e \in E' \setminus E(T) : c(e) \in I_j \}$ für $j = 0, \dots, \lceil \log_2 n \rceil$.



Lemma 7: $c(E_0) \leq 2 \cdot \lceil n^{2/(t-1)} \rceil \cdot MST \leq 4 \cdot n^{2/(t-1)} \cdot MST$.

Bew.: Lemma 5 szerint H legfeljebb $n \cdot \lceil n^{2/(t-1)} \rceil$ élet tartalmaz, így $|E_0| \leq n \cdot \lceil n^{2/(t-1)} \rceil$.

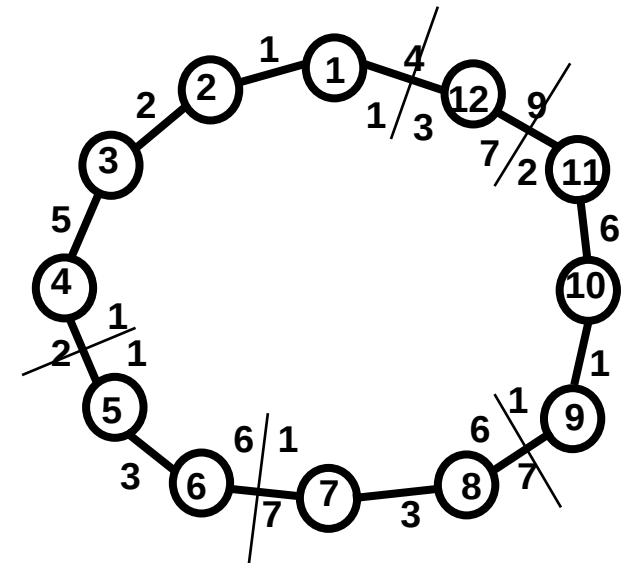
E_0 minden élének súlya legfeljebb $L/n = 2 \cdot MST/n$.

Így tehát: $c(E_0) \leq n \cdot \lceil n^{2/(t-1)} \rceil \cdot 2 \cdot MST/n = 2 \cdot \lceil n^{2/(t-1)} \rceil \cdot MST$

□

Greedy-Spanner – A súly elemzése

- Ahhoz, hogy egy felső korlátot kapjunk $c(E_j)$ -re, $j > 0$, definiáljuk $a := 2^{j-1} \cdot L/n$. Ekkor $I_j = (a, 2a]$.
- Legyen adott egy δ , $0 < \delta < \min(1, t-1)$.
- Felosztjuk P -t $2L/(\delta a)$ diszjunkt $\delta a/2$ hosszú intervallumra. (A kezdőpont tetszőleges.)
- A csomópontok egy intervallumon belül egy **clustert** képeznek.
- Legyen n_j azon clusterek száma, melyek legalább egy csomópontot tartalmaznak. Nyilvánvalóan teljesül $n_j \leq 2L/(\delta a)$.
- Egy $\{u, v\}$ élt **intercluster-élnak** nevezünk, ha u és v különböző clusterben van.



pl.: felosztás 5 darab 10
hosszú intervallumra

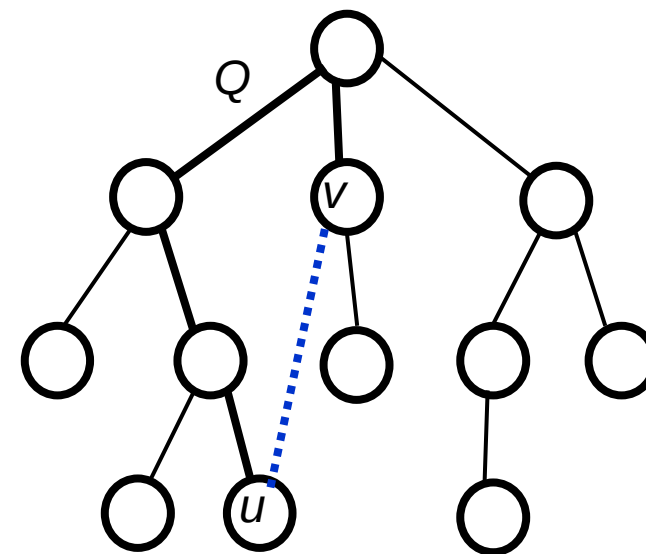
Greedy-Spanner – A súly elemzése

Lemma 8: Minden $\{u, v\} \in E_j$ él egy inter-cluster él.

Biz.: E_j definíciója szerint $\{u, v\} \notin E(T)$.

Legyen Q az az út, ami u -t és v -t T -ben összeköti.

- Q minden e élének súlya legfeljebb $c(\{u, v\})$, különben T nem lenne minimális feszítőfa.
- Ezért Kruskal algoritmus és a Greedy-Spanner algoritmus Q minden élét $\{u, v\}$ előtt dolgozza fel.
- Lemma 6 szerint $E(T) \subseteq E'$.
Ezért H már tartalmazza Q -t, amikor a Greedy-Spanner algoritmus $\{u, v\}$ -t feldolgozza.
- Mivel $\{u, v\} \in E'$, teljesül, hogy $c(Q) > t \cdot c(\{u, v\})$.
- Mivel $\delta < t-1$ és így $t > \delta+1$, teljesül
 $d_p(u, v) \geq d_T(u, v) = c(Q) > t \cdot c(\{u, v\}) > (1+\delta)c(\{u, v\}) > (1+\delta)a$.
- Mivel a távolság két csomópont között egy clusteren belül legfeljebb $\delta a/2$,
 u és v különböző clusterben kell hogy legyen.



□

Greedy-Spanner – A súly elemzése

Lemma 9: Ha A és B két különböző cluster, akkor legfeljebb egy él van E_j -ben A és B között.

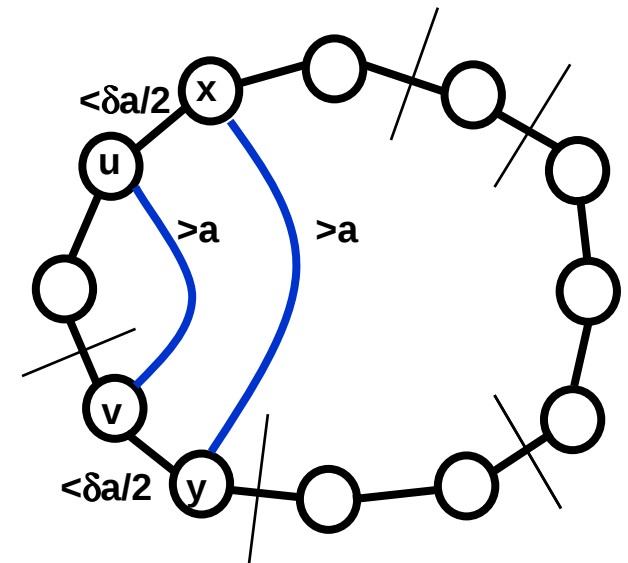
Biz.: Tegyük fel, hogy legalább két ilyen él van:

$\{u,v\}, \{x,y\} \in E_j$, $u,x \in A$ és $v,y \in B$ és az általánosság korlátozása nélkül $c(\{u,v\}) \leq c(\{x,y\})$.
Ekkor a Greedy-Spanner algoritmus $\{u,v\}$ -t $\{x,y\}$ előtt dolgozza fel.

Amikor $\{x,y\}$ feldolgozásra kerül, H már tartalmaz egy utat x -től y -hoz $\{u,v\}$ -n keresztül, úgy hogy

$$\begin{aligned} d_H(x,y) &\leq d_P(x,u) + c(\{u,v\}) + d_P(v,y) \\ &< \delta a/2 + c(\{x,y\}) + \delta a/2 \\ &= c(\{x,y\}) + \delta a \\ &< (1+\delta) c(\{x,y\}) \\ &< t c(\{x,y\}). \end{aligned}$$

Ezért a Greedy-Spanner algoritmus a $\{x,y\}$ élet nem veszi hozzá H -hoz.



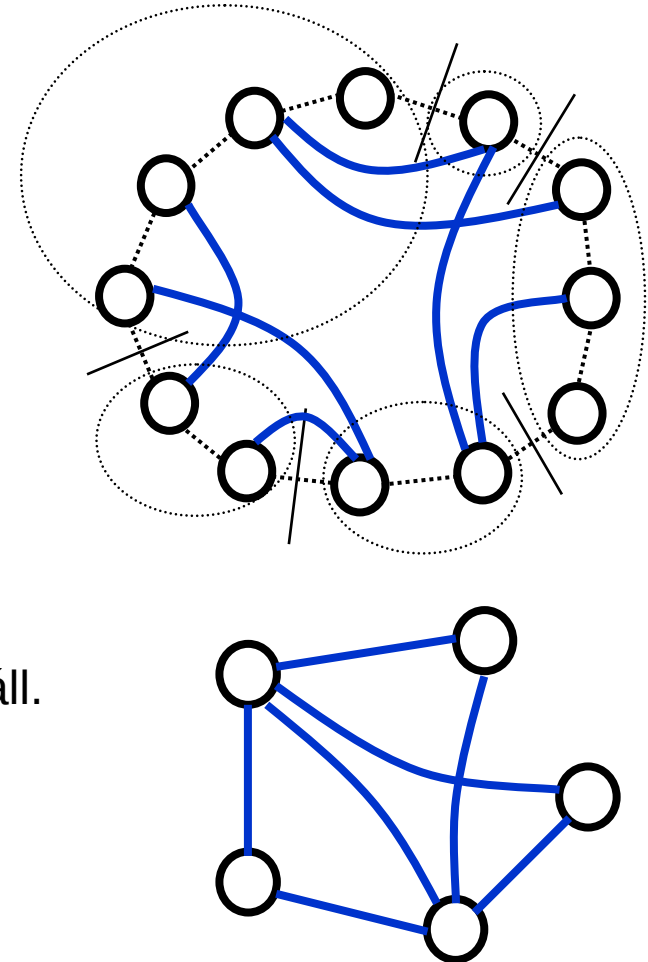
Greedy-Spanner – A súly elemzése

Lemma 10: $|E_j| \leq 2 \cdot n_j^{\min\left(2, 1 + \frac{2+\delta}{t-1-\delta}\right)}$.

Bew.: Lemma 8 szerint E_j csak inter-cluster éleket tartalmaz és Lemma 9 szerint minden cluster pár között legfeljebb egy E_j belső él van. Ezért $|E_j| \leq n_j^2$.

- Legyen M az a gráf, amely úgy áll elő, hogy $H_j=(V,E_j)$ -ban minden clusterben a csomópontokat egyetlen csomóponttá olvasztjuk össze.
- Legyen C egy tetszőleges kör M -ben, amely r élből áll. Megmutatjuk, hogy $r \geq (t+1) / (1+\delta/2)$. Akkor Lemma 3 szerint:

$$|E_j| \leq 2 \cdot n_j^{1 + \frac{2}{r-2}} \leq 2 \cdot n_j^{1 + \frac{2+\delta}{t-1-\delta}}.$$



Greedy-Spanner – A súly elemzése

Meg kell mutatni: $r \geq (t+1) / (1+\delta/2)$.

- Legyen $w_1, w_2, \dots, w_r$ a C kör r élének a súlya növekvő sorrendben. Amikor ezek közül az utolsó élt befűztük H -ba, már volt H -ban egy út a végpontjai között, melynek hossza legfeljebb

$$r \cdot \delta a / 2 + \sum_{1 \leq i < r} w_i.$$

- $r \cdot \delta a / 2$ egy felső korlát annak a legfeljebb r clusteren belüli részút hosszára,
- $\sum_{1 \leq i < r} w_i$ az inter-cluster élek összsúlya.
- Mivel a w_r súlyú élt hozzáadtuk H -hoz, teljesülni kell, hogy
$$t w_r < r \cdot \delta a / 2 + \sum_{1 \leq i < r} w_i \leq r \delta w_r / 2 + (r-1)w_r.$$

Ezért

$$t < r (\delta/2 + 1) - 1.$$

Átrendezés után:

$$r > (t+1) / (1+\delta/2).$$

□

Greedy-Spanner – A súly elemzése

Lemma 11: $c(E_j) \leq \frac{32}{\delta^2} \cdot n^{\frac{2+\delta}{t-1-\delta}} \cdot MST \cdot \left(\frac{t-1}{t}\right)^{j-1}.$

Biz.: Minden E_j beli él súlya $\leq 2a$, így Lemma 10 szerint:

$$\begin{aligned}
 c(E_j) &\leq 2a \cdot 2 \cdot n_j^{\min\left(2, 1+\frac{2+\delta}{t-1-\delta}\right)} \\
 &\leq 2 \cdot 2^{j-1} \frac{L}{n} \cdot 2 \cdot \left(\frac{2n}{\delta 2^{j-1}}\right)^{\min\left(2, 1+\frac{2+\delta}{t-1-\delta}\right)} \\
 &\leq 2 \cdot 2^{j-1} \frac{L}{n} \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{\delta}\right)^2 \cdot \left(\frac{n}{2^{j-1}}\right)^{1+\frac{2+\delta}{t-1-\delta}} \\
 &\leq 2 \cdot 2^{j-1} \frac{L}{n} \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{\delta}\right)^2 \cdot \frac{n}{2^{j-1}} \cdot \left(\frac{n}{2^{j-1}}\right)^{\frac{2+\delta}{t-1-\delta}}
 \end{aligned}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{aligned}
 &= \frac{16L}{\delta^2} \cdot \left(\frac{n}{2^{j-1}}\right)^{\frac{2+\delta}{t-1-\delta}} \\
 &= \frac{16L}{\delta^2} \cdot n^{\frac{2+\delta}{t-1-\delta}} \cdot \left(\frac{1}{2^{j-1}}\right)^{\frac{2+\delta}{t-1-\delta}} \\
 &\leq \frac{32}{\delta^2} \cdot MST \cdot n^{\frac{2+\delta}{t-1-\delta}} \cdot \left(\frac{1}{4^{\frac{1}{t-1}}}\right)^{j-1} \\
 &\leq \frac{32}{\delta^2} \cdot MST \cdot n^{\frac{2+\delta}{t-1-\delta}} \cdot \left(\frac{t-1}{t}\right)^{j-1}.
 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőtlenség teljesül, mert $4^{1/(t-1)} \geq e^{1/(t-1)} \geq 1 + 1/(t-1)$ minden $t > 1$ -re. $\square$

Greedy-Spanner – A súly elemzése

Lemma 12:
$$c(H) \leq \left(5 + \frac{32t}{\delta^2}\right) \cdot n^{\frac{2+\delta}{t-1-\delta}} \cdot MST.$$

Biz.: Mivel $E' = E(T) \cup E_0 \cup E_1 \cup \dots \cup E_{\lceil \log n \rceil}$,

$$\begin{aligned} c(H) &\leq MST + 4 \cdot n^{\frac{2}{t-1}} \cdot MST + \frac{32}{\delta^2} \cdot n^{\frac{2+\delta}{t-1-\delta}} \cdot MST \cdot \sum_{j=1}^{\lceil \log n \rceil} \left(\frac{t-1}{t}\right)^{j-1} \\ &\leq MST + 4 \cdot n^{\frac{2}{t-1}} \cdot MST + \frac{32}{\delta^2} \cdot n^{\frac{2+\delta}{t-1-\delta}} \cdot MST \cdot t \\ &\leq 5 \cdot n^{\frac{2}{t-1}} \cdot MST + \frac{32t}{\delta^2} \cdot n^{\frac{2+\delta}{t-1-\delta}} \cdot MST \\ &\leq \left(5 + \frac{32t}{\delta^2}\right) \cdot n^{\frac{2+\delta}{t-1-\delta}} \cdot MST. \end{aligned}$$

□

Irodalom

- I. Althöfer, G. Das, D. Dobkin, D. Joseph, and J. Soares: **On sparse spanners of weighted graphs**. *Discrete and Computational Geometry*, Vol. 9, 81-100, 1993.
- Y. Mansour and D. Peleg: **An approximation algorithm for minimum-cost network design**. *Technical report CS94-22, Weizman Institute, Israel*, 1994.
- B. Awerbuch and Y. Azar: **Buy-at-bulk network design approximation algorithms**. *Proc. IEEE Symp. Foundations of Computer Science (FOCS'97)*, 1997.