Hálózattervezés Alapjai
2007

6: Általános Hálózat Tervezés – Spanner Gráfok

Buy-at-Bulk Hálózattervezési Problémák

- Emlékeztető: A buy-at-bulk hálózattervezési probléma egy kábeltipussal (ND1K)
- **Adott:**
  - V: csomópontok n elemű halmaza, a csomópontok 1-től n-ig számozva vannak
  - $R=(r_{ij})$: Forgalomigény-mátrix
    - $r_{ij} \in \mathrm{R}_{\geq 0}$: forgalom egy időegység alatt i -től j-be.
  - F: Egy link installálásának fix alapköltsége (kapacitás-független költség).
  - $A=(a_{ij})$: Költség-mátrix
    - $a_{ij} \in \mathrm{R}_{\geq 0}$: Egy egységnyi kapacitású link installálásának a költsége i és j között.
    - A szimmetrikus és érvényes rá a háromszög-egyenlőtlenség.
- **Feladat:** határozzunk meg minden r_{ij} forgalom-igényhez, $0<i\leq j\leq n$, egy P_{ij} utat, úgy hogy

$$\Sigma_{e=\{i,j\}\in E'}(F + \lceil q(e) \rceil a_{ij}) \text{ minimális,}$$

ahol

  - $E' = E(\cup_{0<i\leq j\leq n} P_{ij})$: az installált linkek halmaza,
  - $q(e) = \Sigma_{e\in P_{ij}} r_{ij}$: az igények összege, melyek útvonala az e linket tartalmazza

Buy-at-Bulk Hálózattervezési Problémák

Emlékeztető:

Lemma 1: Legyen *OPT* az ND1K probléma optimális megoldásának a költsége. A következő alsó korlátok érvényesek *OPT*-ra:

(1) $OPT \geq F \bullet (n-1) + MST$,
ahol *MST* egy minimális feszítőfa költsége az *n* csomópont által meghatározott teljes gráfban, melyben az (i,j) él súlya a_{ij}, $i,j \in V$, $i \neq j$.

(2) $OPT \geq \mathrm{F} \bullet (n-1) + \Sigma_{1 \leq i<j \leq n}\, r_{ij} a_{ij}$

Hálózattervezés – Spanner gráfok [Mansour, Peleg 94]

- **Cél:** Egy olyan hálózatot konstruálni,
  - amelyben minden *i*,*j* csomópontpárra az út *i*-től *j*-jez nem sokkal hosszabb, mint a_{ij} és
  - könnyű: a hálózat súlya nem sokkal nagyobb, mint a minimális feszítőfáé

- Legyen $G=(V,E)$ egy összefüggő irányítatlan gráf $c: E \rightarrow R^+$ élsúlyokkal. Jelölje $d_G(u,v)$ egy legrövidebb út hosszát *u*-tól *v*-hez *G*-ben (*c* súlyoknak megfelelően).
  - Egy *H* részgráfot *G*-ben *G* feszítő részgráfjának nevezünk, ha *H* tartalmazza *G* minden csomópontját, azaz $H \subseteq G$ és $V(H) = V(G)$.
  - Jelölje $stretch(H) := \max_{u,v \in V}(d_H(u,v) / d_G(u,v))$ a *H* strech-faktorát ($d_H(u,v)$ egy legrövidebb út hosszát *u*-tól *v*-hez *H*-ban).
  - Ha egy adott t>1 -re $stretch(H) \leq t$ érvényes, akkor azt mondjuk, hogy *H* egy *t*-spanner *G*-ben.

Greedy-Spanner

Algoritmus: Greedy-Spanner [Althöfer et al. 93]

Input: Egy összefüggő irányítatlan G=(V,E) gráf $c : E \rightarrow \mathrm{R}^+$ élsúlyokkal és egy stretch-faktor $t > 1$.

Output: Egy t-spanner H=(V,E') G-ben.

1. Rendezzük az éleket $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, úgy hogy $c(e_1) \leq c(e_2) \leq \ldots \leq c(e_m)$;
2. $E' := \emptyset$; $H := (V, E')$;
3. **for** $i = 1$ **to** m **do**
   - // Legyen $e_i = \{u,v\}$
   - **if** $d_H(u,v) > t\, c(\{u,v\})$ **then**
     - $E' := E' \cup \{e_i\}$; $H := (V, E')$;
   - **fi**;

   od;
4. **return** H=(V,E');

Greedy-Spanner

Tétel 1: A Greedy-Spanner algoritmus kiszámítja G-nek egy H részgráfját, melyre érvényes:

- H egy t-spanner G-ben.
- H legfeljebb $n \lceil n^{2/(t-1)} \rceil$ élet tartalmaz.
- Minden δ-ra, $0 < \delta < \min(1, t-1)$, érvényes

$$c(H) \leq (5 + 32t / \delta^2) \cdot n^{(2+\delta)/(t-1-\delta)} \cdot MST,$$

ahol $c(H) = \Sigma_{e \in E'} c(e)$ a H gráf súlya, MST pedig G egy minimális feszítőfájának a súlya.
(Bizonyítás következik)

Greedy-Spanner – Hálózattervezés

t = log n és δ=1/2 (z.B.) a következőt kapjuk:

Következmény 1: A Greedy-Spanner algoritmus t = log n paraméterrel kiszámít egy t-spannert H-t G-ben, melyben az élek száma $O(n)$ és $c(H) = O(\log n) \cdot MST$.

Biz.:

élek száma:

$$|E(H)| = n \lceil n^{2 / (\log n - 1)} \rceil = n \lceil 2^{2 \log n / (\log n - 1)} \rceil = O(n)$$

költség :

$$c(H) \le (5 + 32 \log n / \delta^2) \cdot n^{(2+\delta)/(\log n - 1 - \delta)} \cdot MST$$
$$= O(\log n) \cdot 2^{\log n (2+\delta)/(\log n - 1 - \delta)} \cdot MST = O(\log n)\, MST. \qquad \square$$

Greedy-Spanner – Hálózattervezés

Algoritmus: ND1K [Mansour, Peleg 94]

Input: V halmaz n csomópontal, igény mátrix $R=(r_{ij})$,
fix költség F, költségmátrix $A = (a_{ij})$

Output: P_{ij} út minden $1 \leq i < j \leq n$, amelyre $r_{ij} > 0$.

1. Kiszámítunk a Greedy-Spanner algoritmussal egy (log n)-spannert H-t a teljes gráfban, melynek csomóponthalmaza V és élsúlyai a_{ij} által adottak
2. P_{ij} := egy legrövidebb út i-től j-hez H-ban, minden $1 \leq i < j \leq n$.

Greedy-Spanner - Hálózattervezés

Tétel 2: Az ND1K algoritmus polinomiális idő alatt kiszámítja az ND1K probléma egy megoldást, mely megoldásnak a költsége legfeljebb $O(\log n) \cdot OPT$, ahol OPT egy optimális megoldás költségeit jelöli.

Biz.: Legyen C a kiszámított megoldás költsége és E' a megoldás éleinek halmaza.

$$C = F \cdot |E'| + \Sigma_{e=\{i,j\} \in E'} \lceil q(e) \rceil \cdot a_{ij} .$$

C-t két részre bontjuk C_1 és C_2 (azaz $C = C_1 + C_2$):

$$C_1 = \Sigma_{e=\{i,j\} \in E'} q(e) \cdot a_{ij}$$

$$C_2 = F \cdot |E'| + \Sigma_{e=\{i,j\} \in E'} \Delta(e) \cdot a_{ij} ,$$

ahol $\Delta(e) = \lceil q(e) \rceil - q(e)$ a kapacitás, amit az e linknél megfizetünk, de nem használunk.

Greedy-Spanner - Hálózattervezés

Teljesül:

$$C_1 = \Sigma_{1\le i<j\le n}\, r_{ij} \cdot d_H(i,j),$$

ahol $d_H(i,j)$ egy legrövidebb út hossza H-ban az A mátrixban adott élsúlyoknak megfelelően, amelyet az r_{ij} igényhez rendelünk.

Mivel H egy (log n)-spanner, teljesül hogy $C_1 \le (\log n)\ \Sigma_{1\le i<j\le n}\, r_{ij} \cdot a_{ij}$.
Lemma 1(2) szerint $OPT \ge \mathrm{F} \cdot (n-1) + \Sigma_{1\le i<j\le n}\, r_{ij} a_{ij}$. Ebből következik, hogy:

$$C_1 \le (\log n) \cdot OPT.$$

Mivel $\Delta(e) < 1$ minen $e \in E'$ élre:

$$C_2 \le F \cdot |E'| + \Sigma_{e=\{i,j\}\in E'}\, a_{ij} \ .$$

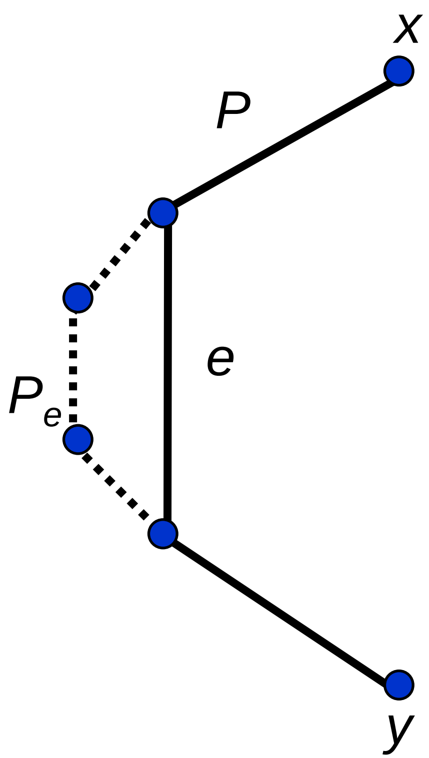
Következmény 1 szerint $|E'| = O(n)$. Így $F \cdot |E'| \le \kappa \cdot F \cdot (n-1)$ egy κ konstansra.
Ezenkívül, Következmény 1 alpján teljesül $\Sigma_{e=\{i,j\}\in E'}\, a_{ij} \le O(\log n) \cdot MST$.
Lemma 1(1) szerint: $F \cdot (n-1) + MST \le OPT$. Ezért

$$C_2 \le O(\log n) \cdot OPT.$$

Azt kapjuk, hogy $C = C_1 + C_2 = O(\log n) \cdot OPT$. □

Greedy-Spanner – A Stretch-faktor elemzése

Lemma 2: A Greedy-Spanner algoritmus által kiszámított $H = (V,E')$ gráf egy t-spanner $G=(V,E)$-ben.



Biz.: Minden $e=\{u,v\}\in E'$ élre teljesül $d_H(u,v) = c(e) = d_G(u,v)$. Tekintsünk egy $e=\{u,v\}$ élet, úgy hogy $e\in E \setminus E'$.

Amikor az algoritmus e-t feldolgozza, H-nak már tartalmaznia kellett egy P_e utat u-tól v-hez, melynek hossza legfeljebb $t \cdot c(e)$.

Legyen x és y két tetszőleges csomópont V-ben és legyen P egy legrövidebb út x-től y-hoz G-ben.

P minden e élét tudjuk helyettesíteni egy H beli P_e úttal, melynek hossza legfeljebb $t \cdot c(e)$. Ezért
$d_H(x,y) \le \Sigma_{e\in P}\Sigma_{e'\in P_e} c(e') \le \Sigma_{e\in P} t\cdot c(e) = t \cdot d_G(x,y)$.
Így tehát $stretch(H) \le t$. □

Greedy-Spanner – Az élek számának elemzése

Szükségünk van a következő két lemmára.

Lemma 3: Legyen *H* egy irányítatlan gráf *n* csomóponttal és *m* éllel, melyben minden kör legalább *r* élt tartalmaz. Akkor

$$m \leq n \cdot \left\lceil n^{\frac{2}{r-2}} \right\rceil \leq 2 \cdot n^{1+\frac{2}{r-2}}.$$

Lemma 4: *H*-ban minden kör több mint $t+1$ élt tartalmaz.

Biz.: (Lemma 3): Ha $m \leq 2n$, akkor az állítás nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy $m > 2n$. Legyen $k = \lfloor m/n \rfloor + 1$. Ekkor $k \geq 3$.

Amíg *H* tartalmaz egy *u* csomópontot, melynek foka $<k$, töröljük *u*-t az összes incidens éllel *H*-ból.

Vegyük észre, hogy így nem tudtuk *H* minden csomópontját törölni, mivel n-1 csomópont törlésével legfeljebb $(n-1)(k-1) < m$ élet törlünk, ami ellentmondás lenne.

Legyen *H´* az a gráf, ami megmarad. *H´* minden csomópontjának a foka $\geq k$.

Greedy-Spanner – Az élek számának elemzése

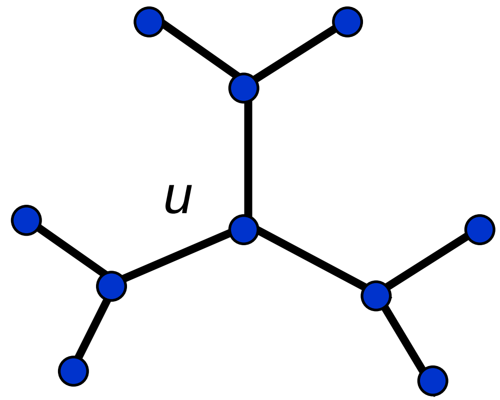
1.eset: r páratlan, $r = 2d+1$.

Legyen u egy tetszőleges csomópont H'-ban.

Tekintsük az összes csomópontot H'-ban, amely u-ból legfeljebb d élen keresztül érhető el.

Ezen csomópontok egy fát képeznek H'-ban, mivel H-ban minden kör, és így H'-ben is, legalább $r=2d+1$ élet tartalmaz.

Mivel H'-ben minden csomópont foka $\geq k$, a csomópontok száma ebben fában legalább



$$1 + k\sum_{i=1}^{d}(k-1)^{i-1} = 1 + k\,\frac{(k-1)^{d}-1}{k-2} = 1 + k\,\frac{(k-1)^{\frac{r-1}{2}}-1}{k-2}.$$

$r=5$, $k=3$

Greedy-Spanner – Az élek számának elemzése

2. eset: r páros, $r = 2d$.

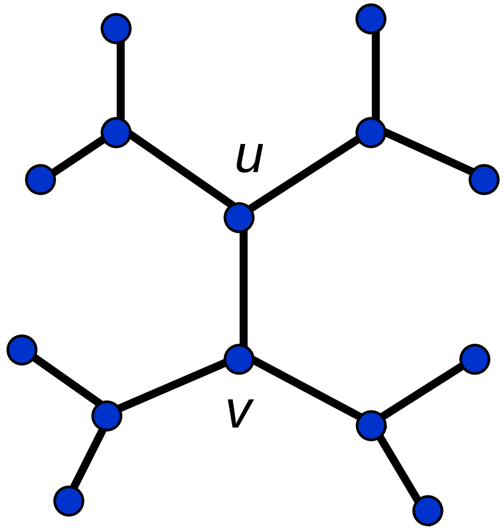
Legyen $\{u,v\}$ egy tetszőleges él H'-ban.

Tekintsük az összes csomópontot H'-ban, amely u-ból vagy v-ből legfeljebb d élen keresztül érhető el.

Ezen csomópontok egy fát képeznek H'-ban, mivel H-ban minden kör, és így H'-ben is, legalább r=2d élet tartalmaz.

Mivel H'-ben minden csomópont foka ≥k, a csomópontok száma ebben fában legalább

$$2\sum_{i=1}^{d}(k-1)^{i-1} = 2\,\frac{(k-1)^{d}-1}{k-2} = 2\,\frac{(k-1)^{\frac{r}{2}}-1}{k-2}.$$



r=6, k=3

Greedy-Spanner – Az élek számának elemzése

Mindkét esetben teljesül tehát, hogy a csomópontok száma *H´*-ben, és így akkor *H*-ban is, nagyobb mint $(k\text{-}1)^{r/2\ -\ 1}$. Ezért:

$$n > \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor^{\frac{r}{2}-1}$$

Átrendezve:

$$n^{\frac{2}{r-2}} > \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$$

Akkor teljesül:

$$\left\lceil n^{\frac{2}{r-2}} \right\rceil \geq \frac{m}{n}$$

Megszorozva *n*-nel megkapjuk Lemma 3 állítását:

$$m \leq n \cdot \left\lceil n^{\frac{2}{r-2}} \right\rceil \leq 2 \cdot n^{1+\frac{2}{r-2}}.$$

□

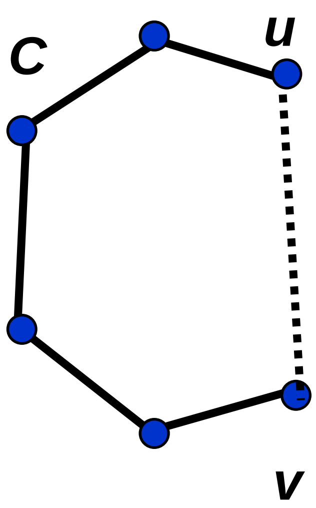
Greedy-Spanner – Az élek számának elemzése

Biz.: (Lemma 4: *H*-ban minden kör több mint *t*+1 élt tartalmaz):
Tegyük fel, hogy *H* tartalmaz egy *C* kört legfeljebb *t*+1 éllel.

Legyen {*u,v*} az utolsó él *C*-ben, amit az algoritmus *H*-hoz hozzáadott.

A *C* kör fennmaradó része legfeljebb *t* élt tartalmaz, melyek mindegyikének súlya legfeljebb *c*({*u,v*}).

Így *H* tartalmazott {*u,v*} hozzáadása előtt egy utat *u*-tól *v*-hez, melynek súlya ≤ $t \cdot c(\{u,v\})$, ami ellentmondás.



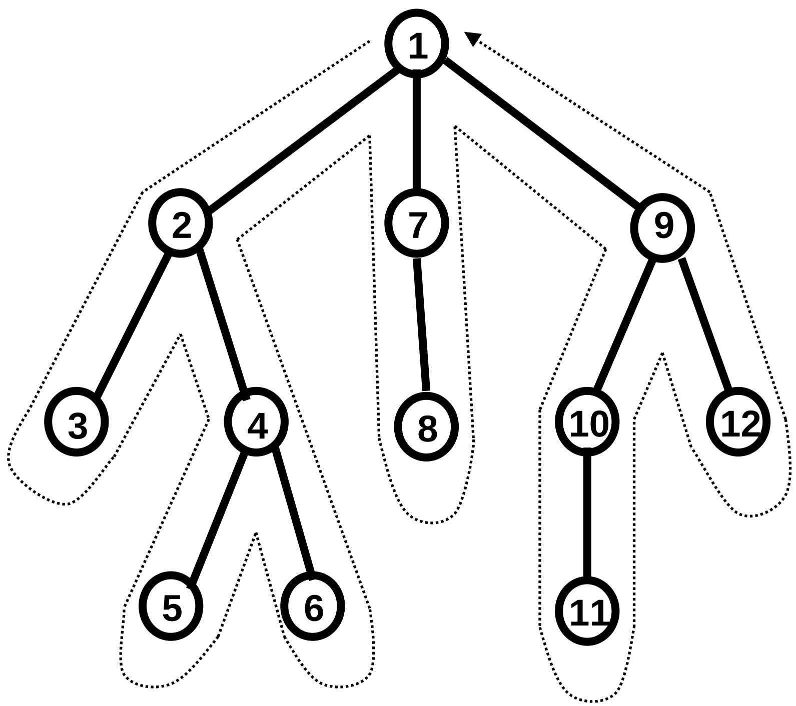
Lemma 3 és Lemma 4 implikálja:

Lemma 5. *H* legfeljebb $n \cdot \left\lceil n^{\frac{2}{t-1}} \right\rceil$ élt tartalmaz. □

Greedy-Spanner – A súly elemzése

Lemma 6. Legyen *T* egy minimális feszítőfa *G*-ben, amelyet Kruskal algoritmusával számítottunk ki. A Greedy-Spanner algoritmus által kiszámított *t*-spanner *H* tartalmazza *T* minden élét, azaz $E(T) \subseteq E'$.

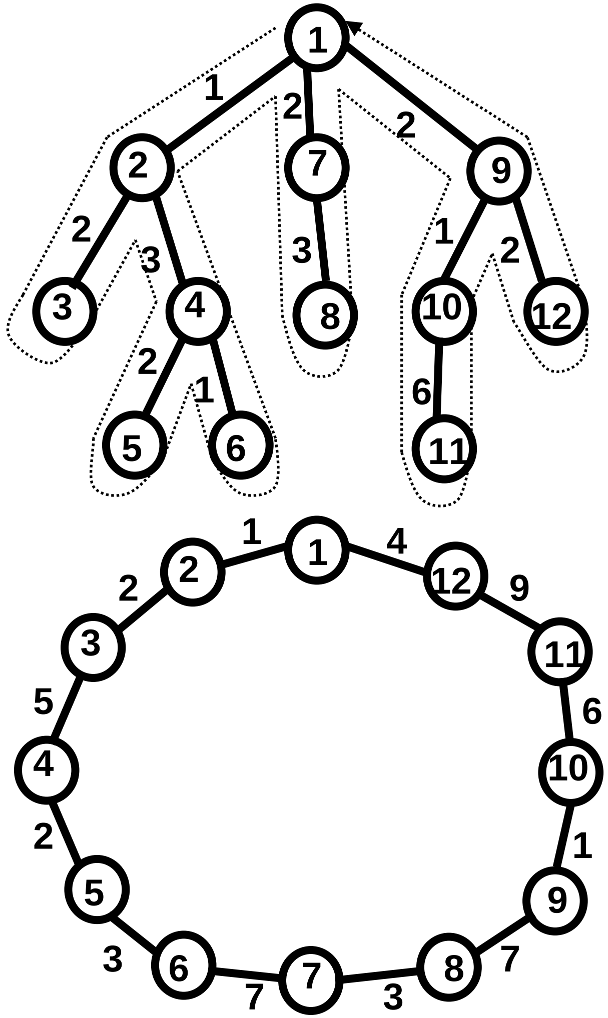
Biz.: Indukció az élek sorrendjén, amely sorrendben mindkét algoritmus feldolgozza azokat (gyakorlat). □



H súlykorlátjának bizonyításához tekintsünk azt a *P* utat, amit *T* preorder bejárása definiál. Legyen *L* az élsúlyok összege *P*-ben.
$L = 2c(T) = 2MST$.

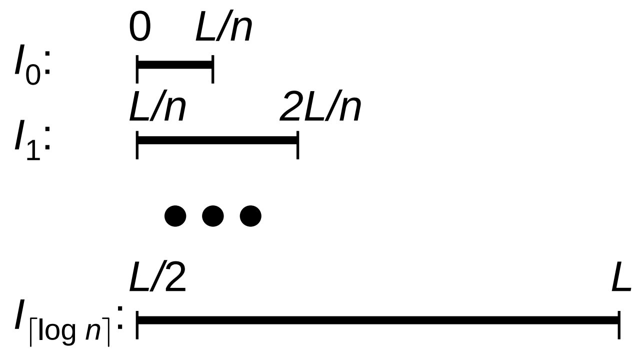
Greedy-Spanner – A súly elemzése

- Tekintsük P-t mint egy kört.
- Minden v csomópontot hozzárendeljük ahhoz a helyhez P-ben, ahol v először fordul elő.
- Legyen $u,v \in V$.
  Legyen $d_P(u,v)$ a távolság u első előfordulása és v első előfordulása között P-n.
- Ekkor $d_P(u,v) \geq d_T(u,v)$.



Greedy-Spanner – A súly elemzése

- Definiáljunk $\lceil \log_2 n \rceil + 1$ fázist a Greedy-Spanner algoritmusban a feldolgozott élek súlya alapján következőképpen:
- Legyen $I_0 := [0, L/n]$,
  $I_j := (2^{j-1} \cdot L/n,\ 2^j \cdot L/n] : j = 1,\ldots, \lceil \log_2 n \rceil$.
- A j-edik fázisban az algoritmus azokat az éleket dolgozza fel, melyek súlya az I_j intervallumba esik.
- Legyen $E_j := \{ e \in E' \setminus E(T) : c(e) \in I_j \}$ für $j = 0,\ldots, \lceil \log_2 n \rceil$.

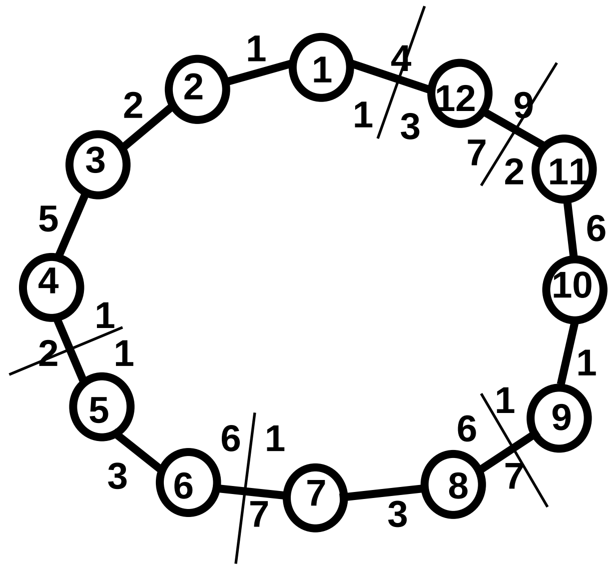


Lemma 7: $c(E_0) \leq 2 \cdot \lceil n^{2/(t-1)} \rceil \cdot MST \leq 4 \cdot n^{2/(t-1)} \cdot MST$.

Biz.: Lemma 5 szerint H legfeljebb $n \cdot \lceil n^{2/(t-1)} \rceil$ élet tartalmaz,
így $|E_0| \leq n \cdot \lceil n^{2/(t-1)} \rceil$.
E_0 minden élének súlya legfeljebb $L/n = 2 \cdot MST/n$.
Így tehát: $c(E_0) \leq n \cdot \lceil n^{2/(t-1)} \rceil \cdot 2 \cdot MST/n = 2 \cdot \lceil n^{2/(t-1)} \rceil \cdot MST$ □

Greedy-Spanner – A súly elemzése

- Ahhoz, hogy egy felső korlátot kapjunk $c(E_j)$-re, $j > 0$, definiáljuk $a := 2^{j-1} \cdot L/n$. Ekkor $I_j = (a, 2a]$.
- Legyen adott egy δ, $0 < \delta < \min(1, t\text{-}1)$.
- Felosztjuk P-t $2L/(\delta a)$ diszjunkt $\delta a/2$ hosszú intervallumra. (A kezdőpont tetszőleges.)
- A csomópontok egy intervallumon belül egy clustert képeznek.
- Legyen n_j azon clusterek száma, melyek legalább egy csomópontot tartalmaznak.
  Nyilvánvalóan teljesül $n_j \leq 2L/(\delta a)$.
- Egy $\{u,v\}$ élt intercluster-élnek nevezünk, ha u és v különböző clusterben van.

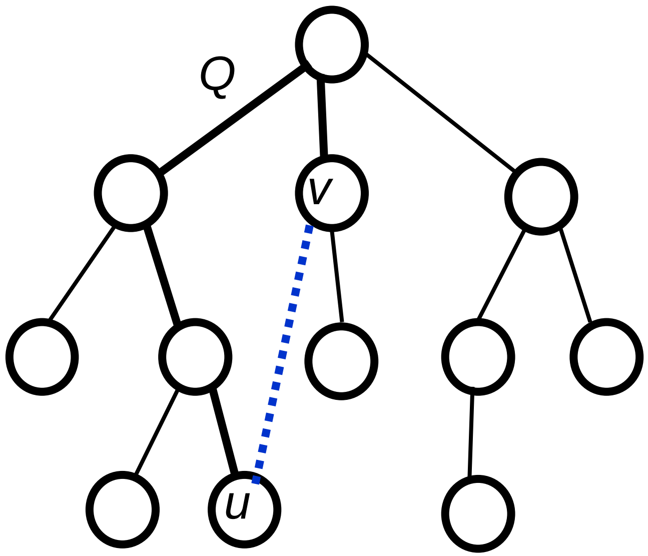


pl.: felosztás 5 darab 10 hosszú intervallumra

Greedy-Spanner – A súly elemzése

Lemma 8: Minden $\{u,v\} \in E_j$ él egy inter-cluster él.

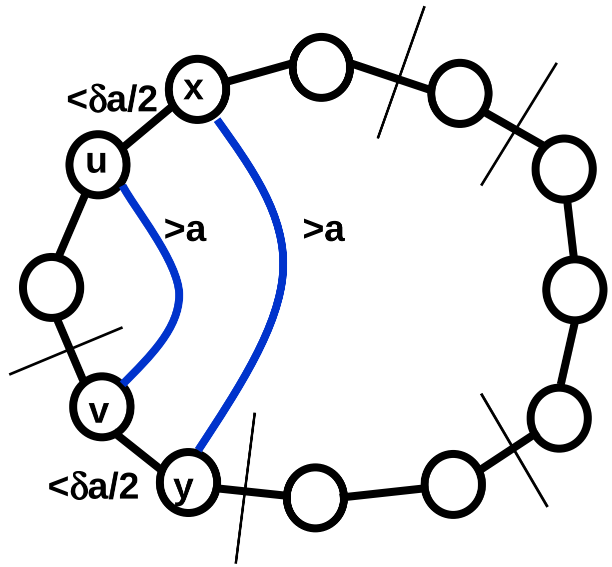
Biz.: E_j definíciója szerint $\{u,v\} \notin E(T)$.
Legyen Q az az út, ami u-t és v-t T-ben összeköti.



- Q minden e élének súlya legfeljebb $c(\{u,v\})$, különben T nem lenne minimális feszítőfa.
- Ezért Kruskal algoritmusa és a Greedy-Spanner algoritmus Q minden élét $\{u,v\}$ előtt dolgozza fel.
- Lemma 6 szerint $E(T) \subseteq E'$.
  Ezért H már tartalmazza Q-t, amikor a Greedy-Spanner algoritmus $\{u,v\}$-t feldolgozza.
- Mivel $\{u,v\} \in E'$, teljesül, hogy $c(Q) > t \cdot c(\{u,v\})$.
- Mivel $\delta < t$-1 és így $t > \delta+1$, teljesül
  $d_P(u,v) \geq d_T(u,v) = c(Q) > t \cdot c(\{u,v\}) > (1+\delta)c(\{u,v\}) > (1+\delta)a$.
- Mivel a távolság két csomópont között egy clusteren belül legfeljebb $\delta a/2$, u és v különböző clusterben kell hogy legyen. □

Greedy-Spanner – A súly elemzése

Lemma 9: Ha A és B két különböző cluster, akkor legfeljebb egy él van E_j-ben A és B között.



Biz.: Tegyük fel, hogy legalábba két ilyen él van: $\{u,v\}, \{x,y\} \in E_j$, $u,x \in A$ és $v,y \in B$ és az általánosság korlátozása nélkül $c(\{u,v\}) \leq c(\{x,y\})$. Ekkor a Greedy-Spanner algoritmus $\{u,v\}$-t $\{x,y\}$ előtt dolgozza fel.

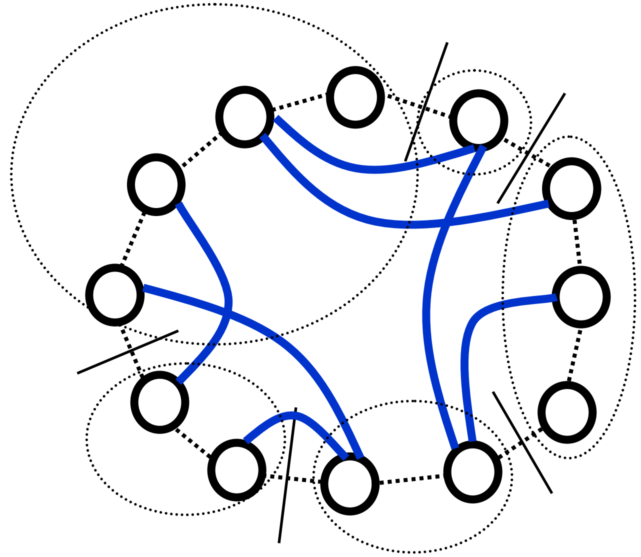
Amikor $\{x,y\}$ feldolgozásra kerül, H már tartalmaz egy utat x-től y-hoz $\{u,v\}$-n keresztül, úgy hogy

$$\begin{aligned} d_H(x,y) &\leq d_P(x,u) + c(\{u,v\}) + d_P(v,y) \\ &< \delta a/2 + c(\{x,y\}) + \delta a/2 \\ &= c(\{x,y\}) + \delta a \\ &< (1+\delta)\, c(\{x,y\}) \\ &< t\, c(\{x,y\}). \end{aligned}$$

Ezért a Greedy-Spanner algoritmus a $\{x,y\}$ élet nem veszi hozzá H-hoz.

Greedy-Spanner – A súly elemzése

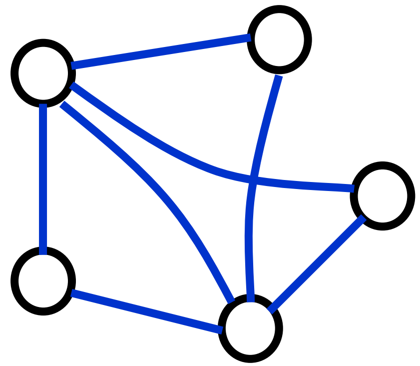
Lemma 10: $|E_j| \leq 2 \cdot n_j^{\min\left(2, 1+\frac{2+\delta}{t-1-\delta}\right)}$.



Biz.: Lemma 8 szerint E_j csak inter-cluster éleket tartalmaz és Lemma 9 szerint minden cluster pár között legfeljebb egy E_j beli él van. Ezért $|E_j| \leq n_j^2$.

- Legyen *M* az a gráf, amely úgy áll elő, hogy $H_j=(V,E_j)$-ban minden clusterben a csomópontokat egyetlen csomóponttá olvasztjuk össze.
- Legyen *C* egy tetszőleges kör *M*-ben, amely *r* élből áll. Megmutatjuk, hogy $r \geq (t+1) / (1+\delta/2)$.
  Akkor Lemma 3 szerint:

$$|E_j| \leq 2 \cdot n_j^{1+\frac{2}{r-2}} \leq 2 \cdot n_j^{1+\frac{2+\delta}{t-1-\delta}}.$$



Greedy-Spanner – A súly elemzése

Meg kell mutatni: $r \geq (t+1) / (1+\delta/2)$.

- Legyen $w_1, w_2, \ldots, w_r$ a C kör r élének a súlya növekvő sorrendben. Amikor ezek közül az utolsó élt befűztük H-ba, már volt H-ban egy út a végpontjai között, melynek hossza legfeljebb

$$r \cdot \delta a/2 + \Sigma_{1 \leq i < r} w_i.$$

  - $r \cdot \delta a/2$ egy felső korlát anakk a legfeljebb r clusteren belüli részút hosszára,
  - $\Sigma_{1 \leq i < r} w_i$ az inter-cluster élek összsúlya.

- Mivel a w_r súlyú élt hozzáadtuk H-hoz, teljesülni kell, hogy

$$t\, w_r < r \cdot \delta a/2 + \Sigma_{1 \leq i < r} w_i \leq r\, \delta\, w_r / 2 + (r-1) w_r .$$

  Ezért

$$t < r\,(\delta/2 + 1) - 1.$$

  Átrendezés után:

$$r > (t+1) / (1+\delta/2). \qquad \square$$

Greedy-Spanner – A súly elemzése

Lemma 11: $$c(E_j) \le \frac{32}{\delta^2} \cdot n^{\frac{2+\delta}{t-1-\delta}} \cdot MST \cdot \left(\frac{t-1}{t}\right)^{j-1}.$$

Biz.: Minden E_j beli él súlya $\le 2a$, így Lemma 10 szerint:

$$\begin{aligned}
c(E_j) &\le 2a \cdot 2 \cdot n_j^{\min\left(2,1+\frac{2+\delta}{t-1-\delta}\right)} \\
&\le 2 \cdot 2^{j-1}\frac{L}{n} \cdot 2 \cdot \left(\frac{2n}{\delta 2^{j-1}}\right)^{\min\left(2,1+\frac{2+\delta}{t-1-\delta}\right)} \\
&\le 2 \cdot 2^{j-1}\frac{L}{n} \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{\delta}\right)^2 \cdot \left(\frac{n}{2^{j-1}}\right)^{1+\frac{2+\delta}{t-1-\delta}} \\
&\le 2 \cdot 2^{j-1}\frac{L}{n} \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{\delta}\right)^2 \cdot \frac{n}{2^{j-1}} \cdot \left(\frac{n}{2^{j-1}}\right)^{\frac{2+\delta}{t-1-\delta}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{16L}{\delta^2} \cdot \left(\frac{n}{2^{j-1}}\right)^{\frac{2+\delta}{t-1-\delta}} \\
&= \frac{16L}{\delta^2} \cdot n^{\frac{2+\delta}{t-1-\delta}} \cdot \left(\frac{1}{2^{j-1}}\right)^{\frac{2+\delta}{t-1-\delta}} \\
&\le \frac{32}{\delta^2} \cdot MST \cdot n^{\frac{2+\delta}{t-1-\delta}} \cdot \left(\frac{1}{4^{\frac{1}{t-1}}}\right)^{j-1} \\
&\le \frac{32}{\delta^2} \cdot MST \cdot n^{\frac{2+\delta}{t-1-\delta}} \cdot \left(\frac{t-1}{t}\right)^{j-1}.
\end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőtlenség teljesül, mert $4^{1/(t-1)} \ge e^{1/(t-1)} \ge 1 + 1/(t-1)$ minden $t > 1$-re. □

Greedy-Spanner – A súly elemzése

Lemma 12: $$c(H) \leq \left(5 + \frac{32t}{\delta^2}\right) \cdot n^{\frac{2+\delta}{t-1-\delta}} \cdot MST.$$

Biz.: Mivel $E' = E(T) \cup E_0 \cup E_1 \cup \ldots \cup E_{\lceil \log n \rceil}$,

$$c(H) \leq MST + 4 \cdot n^{\frac{2}{t-1}} \cdot MST + \frac{32}{\delta^2} \cdot n^{\frac{2+\delta}{t-1-\delta}} \cdot MST \cdot \sum_{j=1}^{\lceil \log n \rceil} \left(\frac{t-1}{t}\right)^{j-1}$$

$$\leq MST + 4 \cdot n^{\frac{2}{t-1}} \cdot MST + \frac{32}{\delta^2} \cdot n^{\frac{2+\delta}{t-1-\delta}} \cdot MST \cdot t$$

$$\leq 5 \cdot n^{\frac{2}{t-1}} \cdot MST + \frac{32t}{\delta^2} \cdot n^{\frac{2+\delta}{t-1-\delta}} \cdot MST$$

$$\leq \left(5 + \frac{32t}{\delta^2}\right) \cdot n^{\frac{2+\delta}{t-1-\delta}} \cdot MST.$$

□

Irodalom

- I. Althöfer, G. Das, D. Dobkin, D. Joseph, and J. Soares: **On sparse spanners of weighted graphs**. *Discrete and Computational Geometry*, Vol. 9, 81-100, 1993.
- Y. Mansour and D. Peleg: **An approximation algorithm for minimum-cost network design.** *Technical report CS94-22, Weizman Institute, Israel*, 1994.
- B. Awerbuch and Y Azar: **Buy-at-bulk network design approximation algorithms.** *Proc. IEEE Symp. Foundations of Computer Science (FOCS´97),* 1997.