

Hálózattervezés Aljai 2007

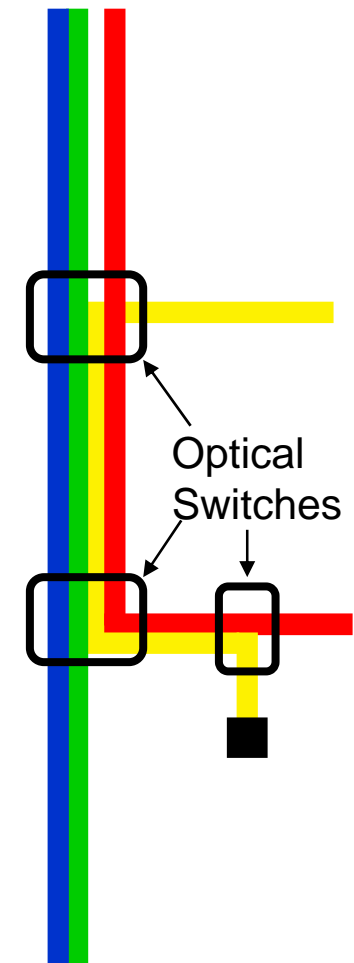
7: Hullámhossz Hozzárendelés Optikai WDM Hálózatokban

Optikai kommunikációs hálózatok

- Az adatok laser által üvegekábelben kerülnek átvitelre.
- Előnyei:
 - Nagyon magas átviteli ráta, több terrabit/s (10^{12} b/s), 25-30THz.
 - Nagyon alacsony bit-hiba.
- Probléma a routingnál: Elektronikus komponensek nem tudnak a THz-tartományban dolgozni.
- **Hullámhossz-Multiplexálás** (wavelength division multiplexing, **WDM**):
 - Az üvegekábel sáv szélességét csatornákra osztjuk különböző hullámhosszokkal.
 - Különböző kommunikációs kapcsolatok adatai különböző hullámhosszú laserrel egyszerre átvihetők ugyanazon az üvegekábelben.
 - Egy hullámhosszon az adatok tipikusan 2.4Gbps vagy 10Gbps átviteli rátával kerülnek átvitelre.

Optikai kommunikációs hálózatok - WDM

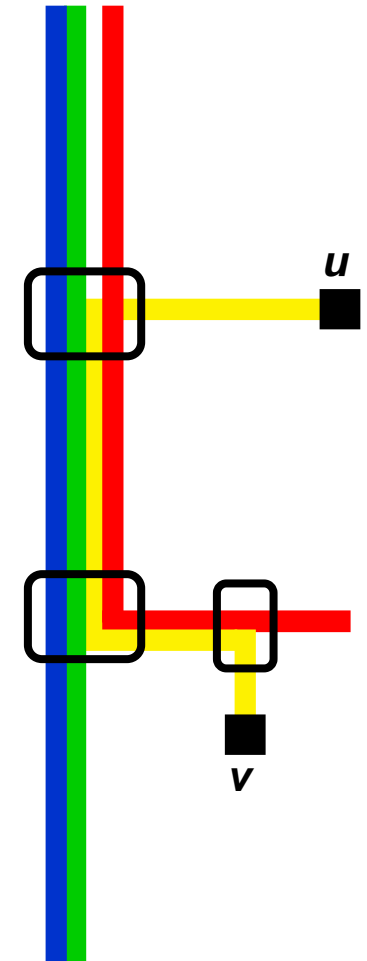
- **Add-Drop-Multiplexer (ADM)** segítségével az egyes hullámhosszok bevihetők és kinyerhetők az optikai hálózatból.
 - A hálózat elektronikus komponenseinek akkor csak az egyes hullámhosszok bitrátáját kell tudni feldolgozni, ami már megvalósítható.
- Szabadon konfigurálható **optikai switch**ek a bemenő szignálokat a hullámhosszuktól függően tetszőleges kimenő linkekre tudják irányítani anélkül, hogy a szignálokat át kellene alakítani elektronikus szignálokká.
 - Így a szignálok továbbítása késleltetésmentes.
- Egy szignál hullámhossza nem változtatható meg a ma rendelkezésre álló optikai switch-ekkel.



Optikai kommunikációs hálózatok - WDM

Hullámhossz routing: Egy kapcsolat u és v csomópont között következőképp létesíthető:

- egy úton u -tól v -hez le kell foglalni ehhez a kapcsolathoz egy hullámhosszt,
- minden switcht ezen az úton úgy kell konfigurálni, hogy ezen a hullámhosszon érkező adatok az út következő linkjén továbbítódjanak.
- Az adatok útja a hálózatban a kapcsolatok létesítése (switchek konfigurálása) után csak a hullámhossztól függ.
- Független az adatok fajtájától és a felhasznált protokolloktól.



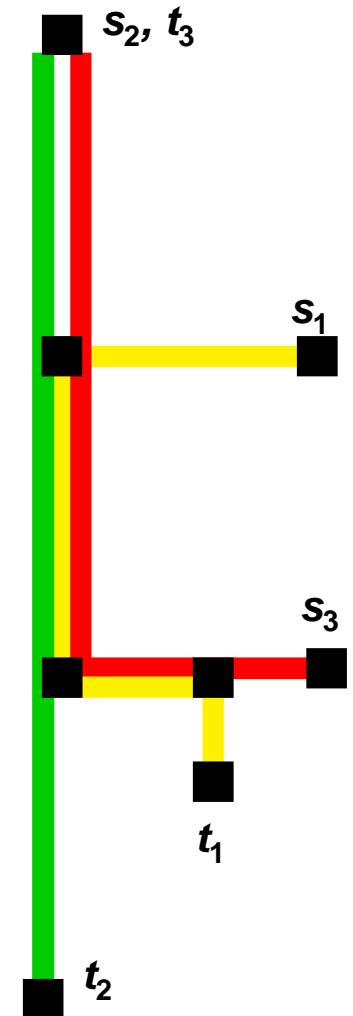
Optikai kommunikációs hálózatok - WDM

Probléma definíció:

- Egy kapcsolat berendezéséhez egy útvonalon egy le kell foglalni hullámhosszt.
- A hullámhossz hozzárendelésnek **konfliktusmentesnek** kell lenni, azaz két kapcsolathoz, melyek útvonalai egy közös linket tartalmaznak, különböző hullámhosszt kell rendelni.
- A felhasznált hullámhosszok száma korlátos. A hálózat költsége annál nagyobb, minél több hullámhosszt támogat. (Ma legfeljebb kb. 80 hullámhosszal állnak rendszerek kommerciálisan rendelkezésre.)
- A **routing és útszinezés** probléma (routing and path coloring **RPC**):
Adott a kívánt kapcsolatok halmaza.
Rendeljünk útvonalat és hullámhosszt konfliktusmentesen a kívánt kapcsolatokhoz, úgy hogy a felhasznált hullámhosszok száma minimális legyen.
Ha az utak egyértelműek (pl. fában, vagy gyűrűben) vagy előre adottak, akkor **útszinezésről** beszélünk.

Optikai kommunikációs hálózatok - WDM

- A hálózatot egy szimmetrikusan irányított gráf $G=(V,E)$ modellezi, azaz $(u,v) \in E \Leftrightarrow (v,u) \in E$.
- Egy kívánt kapcsolat r a küldő $s_r \in V$ és a fogadó $t_r \in V$ által adott.
- Az r kapcsolat berendezéséhez meg kell határozni G -ben egy $P(r)$ utat s_r -től t_r -hez és az úthoz hozzá kell rendelni egy $w(r)$ színt.
- Az utak és színek hozzárendelése **konfliktusmentes**, ha minden $e \in E$ élhez és minden w színhez legfeljebb egy kapcsolat létezik, melynek útja e -t tartalmazza és a w szín van hozzárendelve.



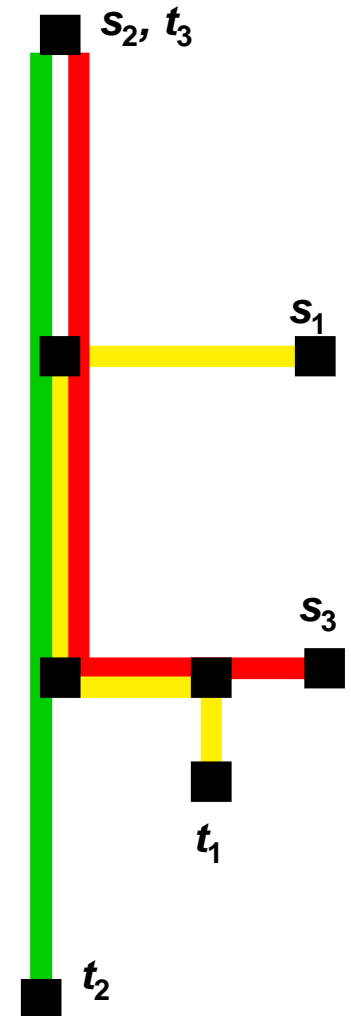
Optikai kommunikációs hálózatok - WDM

Probléma: Routing and Path Coloring (RPC):

- Adott: Egy szimmetrikusan irányított gráf $G=(V,E)$, a kívánt kapcsolatok halmaza R , ahol egy kapcsolat $r=(s_r, t_r)$, $s_r, t_r \in V$ formában van adva.
- Megoldás: Minden $r \in R$ kapcsolathoz egy $P(r)$ út és egy $w(r)$ szín hozzárendelése, úgy hogy a hozzárendelés konfliktusmentes.
- Cél: minimalizáljuk a felhasznált színek számát.

Probléma: Path Coloring (PC):

- Adott: Egy szimmetrikusan irányított gráf $G=(V,E)$, irányított utak halmaza P a G gráfban.
- Megoldás: Minden $p \in P$ úthoz egy szín $w(p)$ hozzárendelése, úgy hogy a színek hozzárendelése konfliktusmentes.
- Cél: minimalizáljuk a felhasznált színek számát.



Optikai kommunikációs hálózatok - WDM

Ha a rendelkezésre álló színek egy hálózatban nem elegendőek ahhoz, hogy minden kapcsolatot konfliktusmentesen létrehozzunk, a következő probléma adódik.

Probléma: Maximum Routing and Path Coloring (MaxRPC)

- Adott: Egy szimmetrikusan irányított gráf $G=(V,E)$, a kívánt kapcsolatok halmaza R , ahol egy kapcsolat $r=(s_r, t_r)$, $s_r, t_r \in V$ formában van adva, a rendelkezésre álló színek száma W .
- Megoldás: A kívánt kapcsolatok egy részhalmaza $R' \subseteq R$ és minden $r \in R'$ kapcsolathoz egy út $P(r)$ és egy $w(r) \in \{1, 2, \dots, W\}$ szín hozzárendelése, úgy hogy a hozzárendelés konfliktusmentes
- Cél: maximalizáljuk $|R'|$ -t.

Probléma: Maximum Path Coloring (MaxPC):
mint MaxRPC, csak az utak előre adottak.

Optikai kommunikációs hálózatok - WDM

A MaxRPC probléma speciális esete, amikor $W=1$, egy nagyon alapvető optimalizálási problémához vezet: ekkor éldiszjunkt utak maximális halmazát kell meghatározni (maximum edge disjoint paths **MEDP**).

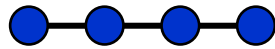
Amikor az utak előre adottak (a MaxPC probléma speciális esete, amikor $W=1$), akkor a **MEDPwPP** (maximum edge disjoint paths with pre-specified paths) problémához jutunk.

Probléma: Maximum Edge Disjoint Paths (MEDP)

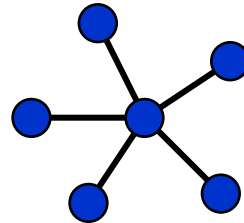
- Adott: Egy szimmetrikusan irányított gráf $G=(V,E)$, a kívánt kapcsolatok halmaza R , ahol egy kapcsolat $r=(s_r, t_r)$, $s_r, t_r \in V$ formában van adva.
- Megoldás: $R' \subseteq R$ és $P(r)$ utak éldiszjunkt hozzárendelése minden $r \in R'$ kapcsolathoz.
- Cél: maximalizáljuk $|R'|$ -t.

Ismert eredmények áttekintése

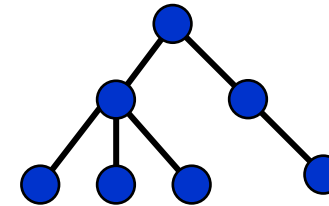
Néhány topológia, amit vizsgálunk:



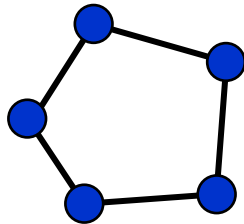
Lánc



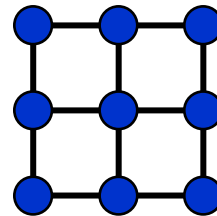
Csillag



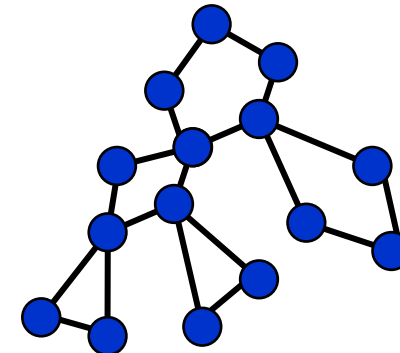
Fa



Gyűrű



2D-Rács



Gyűrűkből álló fa
(tree of rings ToR)

Gyűrűkből álló fa (ToR):

1. Egy gyűrű egy ToR
2. Ha B_1 és B_2 ToR, akkor az a gráf B egy ToR, amely azáltal áll elő, hogy B_1 egy u csomópontját B_2 egy v csomópontjával összeolvasztjuk.

Ismert eredmények áttekintése

Eredmények a RPC és a PC probléma komplexitásáról:

- PC láncon: polinomiális
- PC csillagban: polinomiális
- PC fán: *NP*-nehéz, $5/3$ -Approx. [EJK+99]
- PC gyűrűn: *NP*-nehéz, $3/2$ -Approx. [Kar80]
- RPC gyűrűn: *NP*-nehéz, 2-Approx. [WW98]
- RPC 2D-rácson: *NP*-nehéz, $(\log \log n)^{O(1)}$ -Approx. [Rab96]
- RPC ToR-n: *NP*-nehéz, $10/3$ -Approx. [WW98]

Ismert eredmények áttekintése

Eredmények a MEDP és a MEDPwPP probléma komplexitásáról:

- MEDP láncon: polinomiális
- MEDP csillagban: polinomiális
- MEDP fán: *NP*-nehéz, 5/3-Approx. [EJ98]
- MEDP gyűrűn: polinomiális
- MEDPwPP gyűrűn: polinomiális
- MEDP 2D-rácson: *NP*-nehéz, $O(1)$ -Approx. [KT95]
- MEDP általános gráfban: *NP*-nehéz, $O(m^{1/2})$ -Approx. [Kle96]

Ismert eredmények áttekintése

Eredmények a MaxRPC és a MaxPC probléma komplexitásáról:

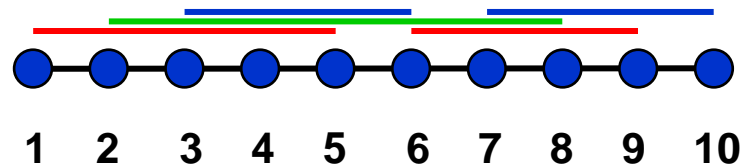
- MaxPC láncon: polinomiális
- MaxPC csillagban: polinomiális
- MaxPC fán: *NP*-nehéz, 2.22-Approx.
- MaxPC gyűrűn: *NP*-nehéz, $e/(e-1) \approx 1.58$ -Approx.
- MaxRPC gyűrűn: *NP*-nehéz, $e/(e-1) \approx 1.58$ -Approx.
- MaxRPC 2D-rácson: *NP*-nehéz, $O(1)$ -Approx.
- MaxRPC általános gráfban: *NP*-nehéz, $O(m^{1/2})$ -Approx.

Algoritmusok útszinezéshez

Jelölések:

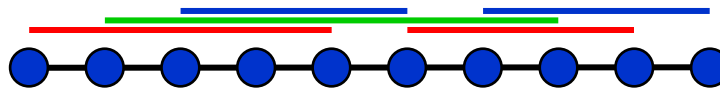
- Legyen P az utak egy adott halmaza és $e \in E$ egy él a hálózatban.
Az e él terhelése $L(e)$ azon P beli utak száma, melyek az e élt tartalmazzák.
- Legyen $L_{\max} = \max_{e \in E} L(e)$ a maximális élterhelés. L_{\max} nyilvánvalóan egy alsó korlát az úthalmaz optimális szinezéshez felhasznált szinek számára.

Útszinezés láncokon



- A láncot úgy képzeljük el, hogy csomópontjai balról jobbra növekvően meg vannak számozva.
- Az utak, amelyek balról jobbra mennek, teljesen függetlenek a másik irányba menő utaktól. Ezért az ellentétes irányba menő utakat egymástól függetlenül ugyanazokkal a színekel szinezhetjük.
- Az egy irányba menő utakat L_{\max} színnel a következőképpen szinezhetjük (ezt egymás után mindkét irányra alkalmazzuk):
 - Dolgozzuk fel az utakat bal oldali végpontjuk szerint növekvő sorrendben.
 - Amikor egy p utat feldolgozunk, rendeljük hozzá a legkisebb számú színt, amellyel nem lép fel konfliktust egyetlen már szinezett úttal sem.

Útszinezés láncokon



Tétel 1: A megadott algoritmus polinomiális idő alatt kiszámít a láncon az utakhoz egy optimális szinezést L_{\max} színnel.

Biz.: Az algoritmus nyilvánvalóan implementálható polinomiális időben.

Világos, hogy minden konfliktusmentes szinezéshez legalább L_{\max} szín szükséges.

Indukcióval megmutatjuk, hogy a leírt algoritmus L_{\max} színt használ.

Indukció kezdete: Kezetben (mielőtt az első utat megszinezünk) az állítás igaz.

Indukciós feltétel: az állítás igaz az első k útra.

Legyen P_k az első k út halmaza. Legyen p a $(k+1)$ -edik út.

Legyen (u,v) az első éle p -nek.

Mivel minden P_k beli út bal oldali végpontja nem jobbra van u -tól,

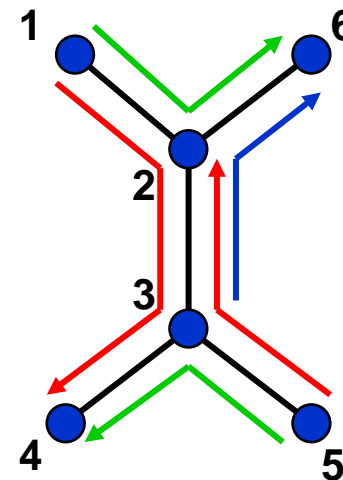
minden P_k beli út, ami p -től nem éldiszjunkt, tartalmazza az (u,v) élt is.

Mivel legfeljebb L_{\max} út tartalmazhatja (u,v) -t, legfeljebb $L_{\max}-1$ út lehet, ami már meg van szinezve és p beli élet is tartalmaz.

Ha p -hez a legkisebb számú színt rendeljük hozzá, akkor a hozzárendelt szín mindig az első L_{\max} szín között van. □

Útszinezés fákon

- Láncokkal ellentétben az útszinezési probléma fákon NP-nehéz. Nem mindig létezik egy szinezés L_{\max} színnel (l. kép: $L_{\max}=2$, legalább 3 szín szükséges).
- Tekintsük a következő algoritmust:
 - Kezdetben minden út szinezetlen.
 - Dolgozzuk fel a fa csomópontjait preorder számuk szerint növekvő sorrendben.
 - Amikor a v csomópontot dolgozzuk fel, tekintsünk minden szinezetlen utat, amely v -t érinti, tetszőleges sorrendben és rendeljük minden úthoz a legkisebb számú lehetséges színt, amivel nem keletkezik konfliktus.



Útszinezés fákon

Tétel 2: A megadott algoritmus polinomiális időben kiszámít a fán az utakhoz egy szinezést, amely legfeljebb $2L_{\max}-1$ szint használ. Mivel az optimális algoritmus legalább L_{\max} szint használ, ez egy 2-approximációs algoritmus.

Biz.: Az algoritmus nyilvánvalóan polinomiális időben fut és egy konfliktusmentes szinezést számít ki.

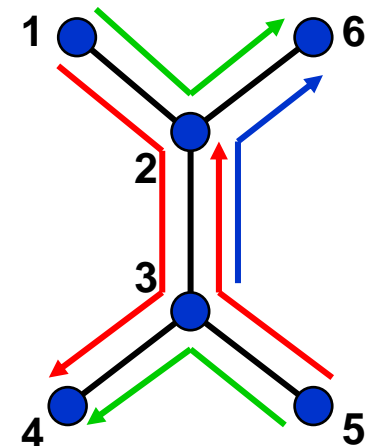
Indukcióval megmutatjuk, hogy az algoritmus legfeljebb $2L_{\max}-1$ szint használ fel.

Indukció kezdet: Kezdetben (mielőtt az első utat megszineztek) igaz az állítás.

Indukciós feltétel: Az állítás igaz az első k út megszinezése után.

Legyen P_k az első k út halmaza.

Legyen p a $(k+1)$ -edik út és legyen v az a csomópont, amelynél p -t feldolgozzuk.

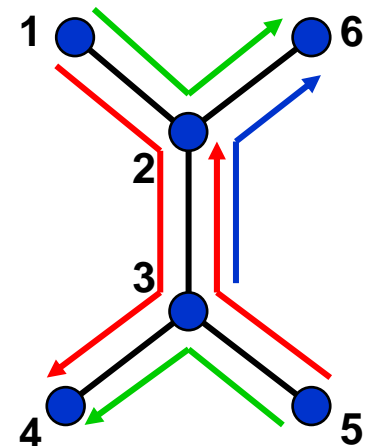


Útszinezés fákon

Mivel minden P_k beli út érint egy csomópontot, melynek preorder száma nem nagyobb mint v preorder száma, az összes P_k beli útnak, amely p -től nem éldiszjunkt, a v csomópontot érintenie kell és p -nek egy v -hez incidens élét tartalmaznia kell.

Mivel p legfeljebb két v -hez incidens élét tartalmaz, legfeljebb $2(L_{\max}-1)$ szinezett út tartalmaz p beli élt. Ha p -hez mindig legkisebb számú szint rendeljük hozzá, akkor a hozzárendelt szín mindig az első $2L_{\max}-1$ szín között van. \square

Megjegyzés: A legjobb ismert polinomiális idejű algoritmus útszinezéshez fákon $\lceil 5/3 L_{\max} \rceil$ szintet használ [EJK+99].

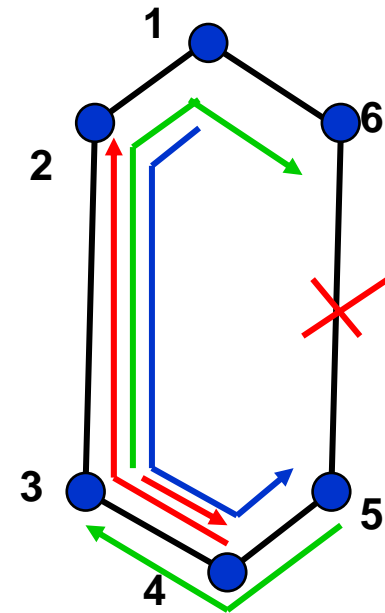


Útszinezés gyűrűkön

- Az RPC problémában gyűrűkön minden kívánt kapcsolathoz a két lehetséges út egyikét (az óramutató járásával megegyező, vagy ellentétes irányban) kell kiválasztani és ahhoz egy színt kell rendelni. A színek számának minimalizálása itt is *NP*-nehéz.

A következő algoritmus 2-approximációs rátát garantál:

- Válasszunk a gyűrűn tetszőlegesen két szomszédos csomópontot u -t és v -t és „vágjuk szét“ az (u,v) és a (v,u) élt. Ekkor egy láncot kapunk, melynek végpontjai u és v .
- Tekintsük a kívánt kapcsolatokat mint utakat a láncon és alkalmazzuk az optimális útszinező algoritmust a láncon.



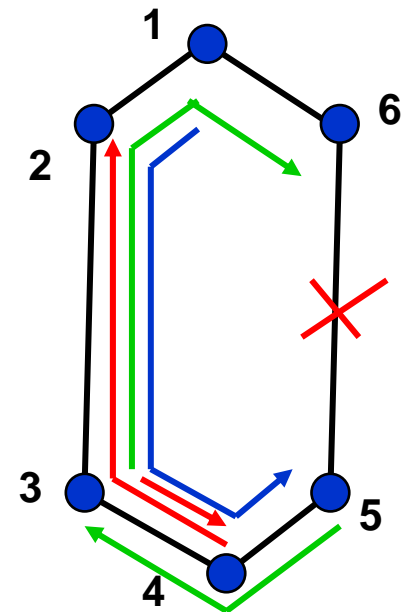
Útszinezés gyűrűkön

Tétel 3: A leírt algoritmus egy polinomiális idejű 2-approximációs algoritmus az RPC problémához gyűrűkön.

Biz.: Legyen S^* egy optimális megoldása az RPC problémának a gyűrűn, amely OPT szint használ fel, és legyen L^* a maximális életterhelés, amelyet az utak okoznak, amit S^* a kapcsolatokhoz rendel.

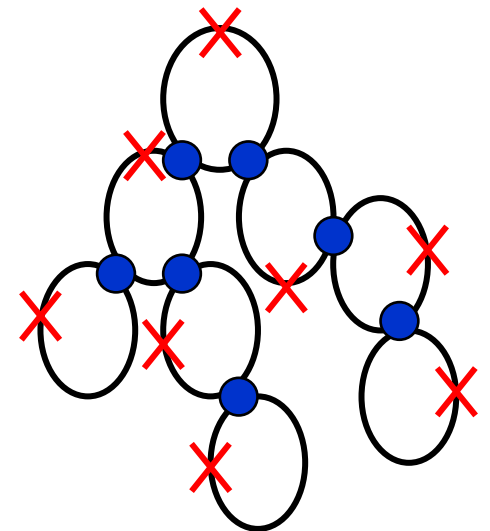
Legyen L a maximális életterhelés a leírt algoritmus A által kiszámított megoldásban. Megmutatjuk, hogy $L \leq 2L^*$.

Legyen e az az él, amelyet A a gyűrű szétvágásához választ. Tekintsük az S^* megoldást. Cseréljük ki S^* -ben minden utat, amely e -t tartalmazza, arra az útra, amely a két végpontot a másik irányban köti össze a gyűrűn és távolítsuk el e -t (és a szimmetrikus élt) a gyűrűből. Ebben a megoldásban a maximális életterhelés $\leq 2L^*$. Mivel e -t eltávolítottuk, egy útszinezési probléma megoldását kaptuk egy láncon, ahol az utak, és így a maximális életterhelés, egyértelműek. Így $L \leq 2L^*$. Mivel $L^* \leq OPT$, következik hogy $L \leq 2OPT$. □



Útszinezés gyűrűkből álló fákon

- Az RPC probléma itt szintén *NP*-nehéz, mivel már egy gyűrűn is *NP*-nehéz.
- Az ötlet, hogy a gyűrűkben egy élet szétvágunk, itt is konstans approximációs rátához vezet:
 - Válasszunk minden gyűrűn a gyűrűkből álló fán két szomszédos csomópontot u -t és v -t és távolítsuk el az (u,v) és a (v,u) élt a gyűrűből. A megmaradó gráf egy fa.
 - Alkalmazzuk az útszinező algoritmust fákon, amely $\lceil 5/3 L_{\max} \rceil$ szint használ.



Útszinezés gyűrűkből álló fákon

Tétel 4: A leírt algoritmus egy polinomiális idejű $(10/3)$ -approximációs algoritmus az RPC problémához gyűrűkből álló fákon.

Biz.: Legyen S^* egy optimális megoldása az RPC problémának OPT színnel és legyen L^* a maximális életterhelés, amit az utak okoznak, amit S^* a kapcsolatokhoz rendel.

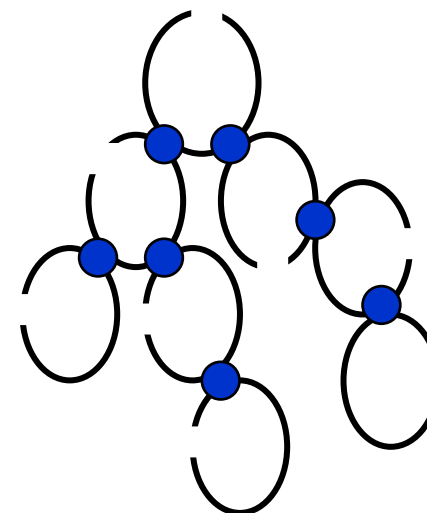
Legyen L a maximális életterhelés a leírt algoritmus által kiszámított megoldásban.

Mint a Tétel 3 bizonyításában, könnyű megmutatni, hogy $L \leq 2L^*$.

Mivel $L^* \leq OPT$, következik hogy $L \leq 2OPT$.

Az algoritmus $(5/3)$ $L \leq (10/3) OPT$ szint használ az utak szinezéséhez a fán.

□



Redukció MaxRPC-ről MEDP-re [AAR+96]

- A MaxPC (MaxRPC) problémára kapunk egy approximációs algoritmust, ha van egy r -approximációs algoritmusunk a MEDPwPP (MEDP) problémára.
- Ezt a MaxPC és a MEDPwPP problémára mutatjuk meg. A MaxRPC-re és a MEDP-re ugyanúgy működik az ötlet.
- Legyen A_1 egy r -approximációs algoritmus a MEDPwPP problémához, azaz minden adott irányított utak P halmazához egy szimmetrikusan irányított G gráfban az $A_1(G, P)$ algoritmus kiszámítja éldiszjunkt utak $P' \subseteq P$ olyan halmazát, melyre $|P'| \leq z^*/r$, ahol z^* az éldiszjunkt utak száma a MEDPwPP egy optimális megoldásában.

Redukció MaxRPC-ről MEDP-re

Algoritmus A (Approximáció a MaxPC problémához)

Input: Gráf G , úthalmaz P , szinek száma W .

Output: Diszjunkt részhalmazok P_1, P_2, \dots, P_W von P , ahol minden P_i éldiszjunkt utakból áll.

- begin
- for $i = 1$ to W do
- $P_i := A_1(G, P)$;
- $P := P \setminus P_i$;
- od;
- end;

Redukció MaxRPC-ről MEDP-re

Tétel 5: Ha A_1 egy r -approximációs algoritmus a MEDPwPP problémához, akkor az A egy r' -approximációs algoritmus a MaxPC problémához, ahol

$$r' = \frac{1}{1 - e^{-1/r}} \leq r + 1.$$

Biz.: Legyen $a_i = |P_i|$, $i=1,2,\dots,W$. Az A által kiszámított megoldás $a_1+a_2+\dots+a_W$ útból áll. Legyen O^* az utak halmaza a MaxPC egy optimális megoldásában és legyen $OPT = |O^*|$. Mivel A_1 egy r -approximációs algoritmus a MEDPwPP problémához, minden $k = 1,2,\dots,W$ esetén teljesül:

$$a_k \geq \frac{OPT - (a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1})}{rW}. \quad (1)$$

Ugyanis ha A_1 k -adik alkalommal hajtódik végre, O^* -ból legfeljebb $a_1+a_2+\dots+a_{k-1}$ útat rendeltünk hozzá egy P_i halmazhoz. Így O^* -ban a fennmaradó utak száma legalább $OPT - (a_1+a_2+\dots+a_{k-1})$, amely utak W színnel színezhetők. Tehát ebben a pillanatban P tartalmaz $OPT - (a_1+a_2+\dots+a_{k-1}) / W$ éldiszjunkt utat.

Redukció MaxRPC-ről MEDP-re

Megmutatjuk, hogy minden $k = 1, 2, \dots, W$ esetén teljesül:

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_k \geq \mathbf{OPT} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{rW} \right)^k \right). \quad (2)$$

(2)-ből következik Tétel 2 állítása $k=W$ -vel, mivel $(1-1/n)^n$ növekvő n -nel alulról e^{-1} -hez konvergál:

$$\sum_{i=1}^W \mathbf{a}_i \geq \mathbf{OPT} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{rW} \right)^W \right) = \mathbf{OPT} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{rW} \right)^{rW/r} \right) \geq \mathbf{OPT} \cdot (1 - e^{-1/r}).$$

Mivel $e^x \geq 1+x$, következik hogy $e^{1/r} \geq 1+1/r$ és ezért $e^{-1/r} \leq r/(r+1)$. Így:

$$\frac{1}{1 - e^{-1/r}} \leq \frac{1}{1 - \frac{r}{r+1}} = r + 1.$$

Ez pontosan Tétel 5 állítása.

Redukció MaxRPC-ről MEDP-re

Tehát megmutatjuk (2)-t, azaz minden $k = 1, 2, \dots, W$:

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_k \geq \mathbf{OPT} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{rW}\right)^k\right).$$

Indukció k szerint: Ha $k = 1$, akkor (2) direkt (1)-ből következik. Legyen $k > 1$ és tegyük fel, hogy (2) igaz $(k-1)$ -re. Akkor

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \mathbf{a}_i &\geq \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{a}_i + \frac{\mathbf{OPT} - \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{a}_i}{rW} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{a}_i\right) \left(1 - \frac{1}{rW}\right) + \frac{\mathbf{OPT}}{rW} \\ &\geq \mathbf{OPT} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{rW}\right)^{k-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{rW}\right) + \frac{\mathbf{OPT}}{rW} \\ &= \mathbf{OPT} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{rW}\right)^k\right). \end{aligned}$$

Így a (2) egyenlőtlenség érvényes és azáltal Tétel 5 is. \square

A MEDP probléma

A Maximum Edge Disjoint Path (MEDP) probléma:

Adott: irányítatlan gráf $G(V,E)$, $|V|=n$, $|E|=m$; egy halmaz $T=\{(s_1,t_1),\dots,(s_k,t_k)\}$,
 $s_i,t_i \in V$, $1 \leq i \leq k$.

Megoldás: indexek halmaza $I \subseteq [1,\dots,k]$ és minden $i \in I$ indexhez egy P_i út s_i -től t_i -hez, úgy hogy minden $i,j \in I$, $i \neq j$ esetén $P_i \cap P_j = \emptyset$ (ahol az utakat élek halmazaként tekintjük)

Cél: minimalizáljuk $|I|$ -t.

A MEDP probléma

- NP-teljes
- Polinomialis idő alatt nem approximálható $O(\log^{1/3-\varepsilon} m)$ rátával semmilyen $\varepsilon > 0$ esetén (Andrews, Zhang [AZ05]).
- Bemutatunk egy algoritmust, ami $O(m^{1/2})$ approximációt garantál. (Kleinberg [Kle96])

Approximációs algoritmus a MEDP problémához

Algoritmus Greedy EDP

1. Legyen $G_0 := G$; $I := \emptyset$; $i := 0$;
2. **while** $\exists (s_j, t_j), j \in [1, \dots, k] \setminus I$, úgy hogy t_j elérhető s_j -ből G_i -ben **do**
3. Legyen (s_j, t_j) egy pár, $j \in [1, \dots, k] \setminus I$, amelyre a távolság s_j -től t_j -hez minimális G_i -ben;
4. Legyen P_j egy legrövidebb út s_j -től t_j -hez minimális G_i -ben;
5. Legyen $I := I \cup \{j\}$; $G_{i+1} := G_i \setminus P_j$; $i := i+1$;
6. **od**
7. **return** $(I, \{P_j : j \in I\})$

Tétel 6: A Greedy EDP algoritmus $O(m^{1/2})$ approximációs rátát garantál.

Approximációs algoritmus a MEDP problémához

Tétel 6: A Greedy EDP algoritmus $O(m^{1/2})$ approximációs rárat garantál.

Biz.: Legyen I az indexhalmaz, amivel a Greedy EDP algoritmus visszatér és $J \subseteq [1, \dots, k]$ az indexhalmaz, amivel egy optimális algoritmus OPT visszatér. Egy $i \in I$ indexhez legyen a Greedy EDP algoritmus által választott út P_i ; egy $j \in J$ indexhez az OPT által választott út P_j^* .

Tegyük fel az általánosság korlátozása nélkül, hogy a Greedy EDP algoritmus az $\{1, \dots, |I|\}$ indexeket választotta. Legyen $h_i = |P_i|$ a P_i út hossza. Mivel mindig minimális hosszú utat választottunk:

Tény 1: $h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_{|I|}$.

Azt mondjuk, hogy egy P út **rövid**, ha $|P| \leq m^{1/2}$, egyébként P **hosszú**.

Mivel minden P_j^* út éldiszjunkt és az élek száma összesen m :

Tény 2: A hosszú utak száma OPT megoldásban kevesebb mint $m^{1/2}$.

Tény 3: $|I| \geq 1$.

Approximációs algoritmus a MEDP problémához

Legyen $j \in J \setminus I$. Azt mondjuk, hogy egy rövid út P_j^* egy P_i út által **blokkolt**, ha $P_j^* \cap P_i \neq \emptyset$.

Állítás 1: Minden $j \in J \setminus I$ indexre, egy rövid út P_j^* egy rövid út P_i által blokkolt.

Biz. (állítás 1): Legyen P_j^* egy rövid út, $j \in J \setminus I$, és legyen P_i , $i \in I$, a legrövidebb út, ami blokkolja P_j^* -t. Ha $|P_j^*| < |P_i|$, akkor abban a pillanatban, amikor Greedy EDP kiválasztotta P_i -t, a gráf G_{i-1} még tartalmazta P_j^* -t is. Mivel azonban P_j^* rövidebb, ezért Greedy EDP P_j^* -t választotta volna, ami ellentmondás. Így $|P_i| \leq |P_j^*| \leq m^{1/2}$, tehát P_i rövid. \square

Approximációs algoritmus a MEDP problémához

(Biz. Tétel 6 folytatás:)

Legyen $I_{short} := \{ i \in I : |P_i| \leq m^{1/2} \}$, $I_{long} := I \setminus I_{short}$,
 $J_{short} := \{ j \in J : |P_j^*| \leq m^{1/2} \}$, $J_{long} := J \setminus J_{short}$.

Mivel $\forall i \in I_{short} : |P_i| \leq m^{1/2}$, az I_{short} -beli utak éleinek száma összesen $\leq |I_{short}|m^{1/2}$.

Másrészt, minden $j \in J_{short} \setminus I$ indexre, P_j^* legalább egy I_{short} -beli él által blokkolt és minden él legfeljebb egy P_j^* utat blokkol, mivel az utak éldiszjunktak. Ezekből azt kapjuk, hogy:

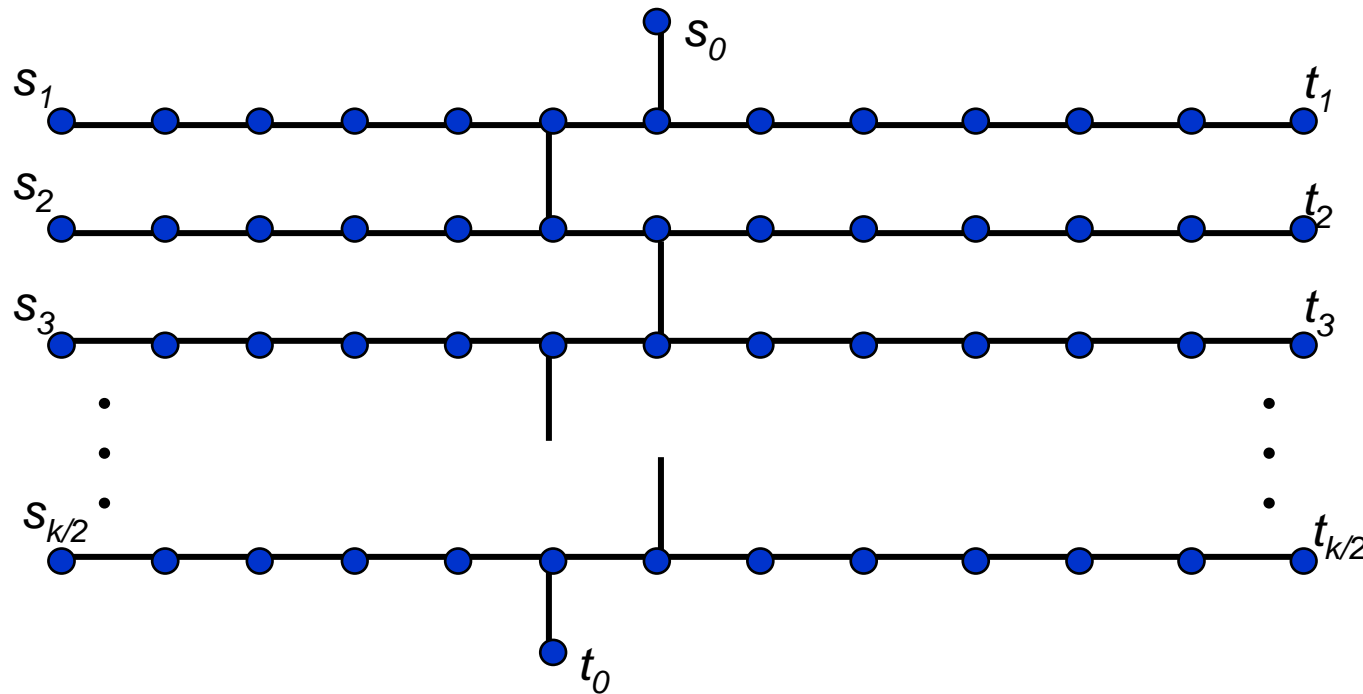
$$\begin{aligned} |J_{short} \setminus I| &\leq |I_{short}|m^{1/2} \leq |I|m^{1/2} \\ |J_{short}| &\leq |(J_{short} \setminus I) \cup I| \leq |I|m^{1/2} + |I| = (m^{1/2} + 1)|I| \\ |J_{long}| &\leq m^{1/2} \leq |I|m^{1/2} \\ |J| &= |J_{short}| + |J_{long}| \leq |I|(2m^{1/2} + 1). \end{aligned}$$

Tehát Greedy $O(m^{1/2})$ -approximációt garantál. □

Approximációs algoritmus a MEDP problémához

Tény 4: Van olyan input, amellyel a Greedy EDP algoritmus approximációs rátája valóban $\Omega(m^{1/2})$.

Példa, ahol a Greedy EDP approximációs rátája $k/2$.
 $k = m^{1/2}$ esetén az approximációs ráta $\Omega(m^{1/2})$.



Irodalom

- [AAF+96]: B. Awerbuch, Y. Azar, A. Fiat, S. Leonardi, and A. Rosen. **Online Competitive Algorithms for Call Admission in Optical Networks.** In *Proc. 4th ESA*, 431-444, 1996.
- [AZ05]: M. Andrews and L. Zhang. **Hardness of the undirected edge-disjoint paths problem.** In *Proc. 27th ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, 276-283, 2005.
- [EJ98]: T. Erlebach and K. Jansen. **Maximizing the Number of Connections in Optical Tree Networks.** In *Proc. 9th ISAAC*, 179-188, 1998.
- [EJK+99]: T. Erlebach, K. Jansen, C. Kaklamanis, M. Mihail, and P. Persiano. **Optimal Wavelength Routing on Directed Fiber Trees.** *Theoretical Computer Science*, Vol. 221, 119-137, 1999.
- [Kar80]: I. A. Karapetian. **On the Coloring of Circular Arc Graphs.** *Journal of the Armenian Academy of Sciences*, Vol. 70(5), 306-311, 1980. (Russian).
- [Kle96]: J. Kleinberg. **Approximation Algorithms for Disjoint Path Problems.** *PhD Thesis*, MIT, 1996.
- [KK99]: J. Kleinberg and A. Kumar. **Wavelength Conversion in Optical Networks.** In *Proc. 12th SODA*, 566-575, 1999.
- [KT95]: J. Kleinberg and É. Tardos. **Disjoint Paths in Densely Embedded Graphs.** In *Proc. 36th FOCS*, 52-61, 1995.
- [Rab96]: Y. Rabani. **Path Coloring on the Mesh.** In *Proc. 37th FOCS*, 400-409, 1996.
- [WW98]: G. Wilfong and P. Winkler. **Ring Routing and Wavelength Translation.** In *Proc. 9th SODA*, 333-341, 1998.