

Hálózattervezés Alapjai 2007

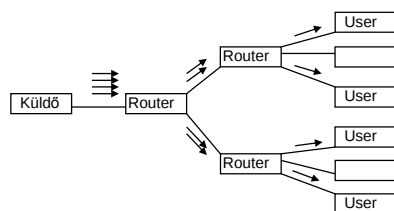
2: Multicasting – Steiner Fák

Multicasting

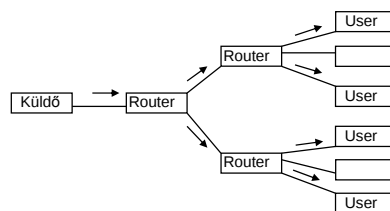
- Az adatok egy küldőtől egyidejűleg több fogadóhoz kerülnek átvitelre
- Felhasználási területek:
 - Real time Streaming, Video-On-Demand
 - Telefon-, Videokonferencia (all-to-all multicast)
 - ...
- Multicasting támogatása:
 - Ethernet (csoomag típus 0800)
 - IP (A D osztály címei Multicast céljára vannak lefoglalva)
 - Egy multicast-csoport (group) minden tagja ugyanazt a D osztálybeli címet használja

Multicasting

- Naív megoldás: Multicast-via-Unicast:
 - A küldő egy külön másolatot küld az adatokról minden fogadónak.
 - Nagyon inefficiens: A küldött csomagok számával nagyobb, mint ami szükséges lenne (különösen rossz all-to-all multicast esetén).
- Egy multicast-fa felepítése segítségével:
 - Minden linken csak egyszer továbbítódik egy csomag.
 - A routerek döntenek el, hogy egy csomagot több linken is továbbítanak-e.



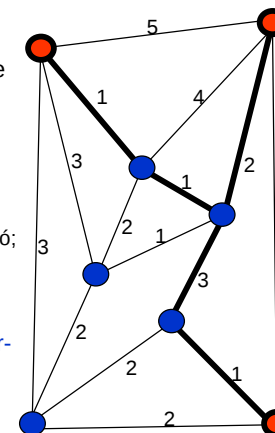
Naív megoldás



Multicast-fa

Multicasting

- Hogy néz ki egy optimális multicast-fa?
 - A hálózat terhelése minimális legyen.
 - Feltesszük: minden egyes linken az átvitel költsége független az iránytól.
- Steiner Probléma:
 - Adott: Egy összefüggő irányítatlan gráf $G=(V,E)$, élsúlyok $c: E \rightarrow \mathbb{R}^+$, terminal-csomópontok halmaza $N \subseteq V$.
(N : a multicast-csoport tagjai: a küldő és minden fogadó; $c(e)$: a költség, ami akkor lép fel, ha az e linken adatot viszünk át. P.l.: 1/sávszélesség)
 - $T=(V',E')$ egy **Steiner-fa** G -ben, ha T egy részfája G -nek és $N \subseteq V'$. A $V' \setminus N$ belüli csomópontokat **Steiner-csomópont**oknak nevezzük.
 - Amit keresünk: Egy T Steiner-fa G -ben, melynek a súlya $c(T) := \sum_{e \in E'} c(e)$ minimális.



Steiner-fák

- Speciális eset: $N=V$
 - Egy Steiner-fa feszítőfája G -nek.
 - Egy minimális Steiner-fa minimális feszítőfája G -nek.
 - Ekkor a Steiner probléma hatékonyan megoldható (Prim algoritmus).
- Speciális eset: $|N|=2$
 - Egy Steiner-fa egy út a két terminál-csomópont között.
 - Egy minimális Steiner-fa egy kegrövidebb út.
 - Ekkor a Steiner probléma hatékonyan megoldható (Dijkstra algoritmus).
- Általános esetben a Steiner probléma NP -nehéz.
 - Még akkor is, ha minden él súlya 1.
 - PTAS (polynomial time approximation scheme) sem létezik a Steiner problémához, ha $P \neq NP$.
 - Egy PTAS egy olyan algoritmus, ami minden konstans $\epsilon > 0$ -hoz az optimális megoldás egy $(1+\epsilon)$ -approximációját n -ben polinomiális idő alatt kiszámítja, azaz a kiszámított megoldás költsége az optimális megoldás költségének legfeljebb $(1+\epsilon)$ -szorososa.

Approximációs algoritmusok

- Legyen P egy optimalizálási probléma.
Legyen $P(I)$ a probléma optimális megoldása egy adott I instanciára (inputra).
 - A Steiner probléma esetén:
 - $I = G, c, N$ [egy adott irányított gráf, élsúlyok, terminálok]
 - $P(I) = c(T)$ [a minimális Steiner fa súlya]

- A P probléma $g(n)$ relatív approximációs rátával (röviden $g(n)$ rátával) approximálható, ha létezik egy polinomiális idejű algoritmus A , úgy hogy minden n méretű I instanciára :

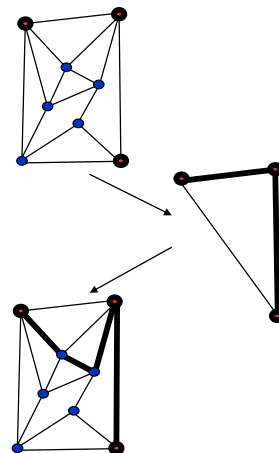
$$\max \left\{ \frac{P(I)}{A(I)}, \frac{A(I)}{P(I)} \right\} \leq g(n)$$

ahol $A(I)$ az A által kiszámított megoldás az I instanciára.

Egy ilyen A -t egy $g(n)$ -approximációs algoritmusnak nevezzük a P problémához, a megoldást pedig $g(n)$ -approximációnak.

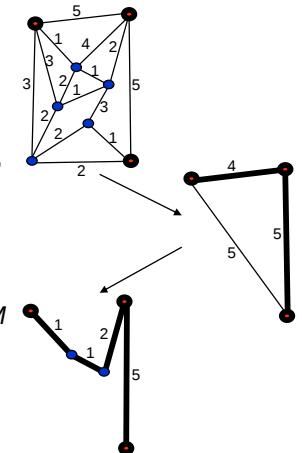
Steiner-fák – Távolság-Heurisztika [Takahashi, Matsuyama 1980]

- Egy algoritmus a Steiner probléma 2-approximációjához
- Alapötlet:
 1. Visszavezetjük a problémát egy minimális feszítőfa $M=(N,F)$ kiszámításának problémájára.
 2. Megmutatjuk, hogy a minimális feszítőfa M költsége $c(M)$ legfeljebb 2-szer nagyobb, mint egy minimális Steiner-fa T költsége $c(T)$.
 3. A minimális feszítőfából M -ből konstruálunk egy Steiner-fát T -t, úgy hogy $c(T) \leq c(M)$.



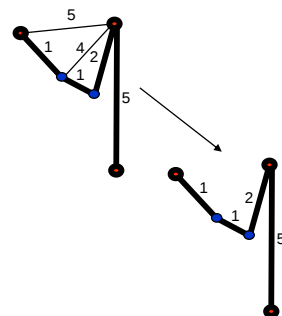
Steiner-fák – Távolság-Heurisztika

1. lépés: Kiszámítjuk a $G'=(N,F)$ Távolság-gráfot $G=(V,E)$ -hez:
 - Legyen minden $u,v \in N$ párhoz $d(u,v)$ egy legrövidebb út hossza u -tól v -hez G -ben.
 - A távolság-gráf $G'=(N,F)$ tartalmaz minden $u,v \in N, u \neq v$, párhoz egy $f=\{u,v\}$ élet, melynek súlya $c'(f) := d(u,v)$.
- 2 lépés: Kiszámítunk egy M minimális feszítőfát G' -ben.
- 3 lépés: Kiszámítjuk G egy H részgráfját, amely M minden $f=\{u,v\}$ éléhez tartalmazza egy legrövidebb út csomópontjait és éleit u -tól v -ez G -ben.



Steiner-fák – Távolság-Heurisztika

- 4. lépés: Kiszámítjuk a G gráf $V(H)$ által indukált részgráfját H' -t.
- 5. lépés: Kiszámítjuk H' egy minimális feszítőfáját T' -t
 - T' egy Steiner-fa G -ben.
 - Megjegyzés: Alternatív, ki lehetne egy minimális feszítőfát direkt H -hoz számítani ahhoz, hogy egy 2-approximációt kapjunk egy minimális. Azáltal, hogy H' -hoz számítunk ki egy minimális feszítőfát, bizonyos esetekben jobb eredményt lehet elérni.
- 6. lépés: Eltávolítjuk T' -ből azokat a Steiner-csomópontokat ($V(T') \setminus N$ azon csomópontjait), melyeknek a foka 1.



Steiner-fák – Távolság-Heurisztika

Futási idő:

- 1. lépés: G' kiszámítása: $O(|N| (n \log n + m))$
- Minden $u \in N$ csomóponthoz számítsuk ki egy legrövidebb utak fáját Dijkstra algoritmusával
- 2. lépés: M kiszámítása: $O(|N|^2)$
 - G' -ben $|N|$ csomópont van és $O(|N|^2)$ él. Prim algoritmusával: $O(|N|^2)$ idő
- 3. lépés: H kiszámítása: $O(|N| n)$
 - Az M fa $|N|-1$ élének mindegyikét G -ben egy úttal helyettesítjük, amely utak mindegyikének hossza legfeljebb $n-1$
- 4. lépés: H' kiszámítása: $O(m)$
 - G minden élénél teszteljük, hogy mindkét végpontja H -ban van-e
- 5. lépés: T' kiszámítása: $O(n \log n + m)$
 - Prim algoritmusával
- 6. lépés: A Steiner-csomópontok eltávolítása, melyek foka 1: $O(n)$
- Összesen: $O(|N| (n \log n + m))$ idő

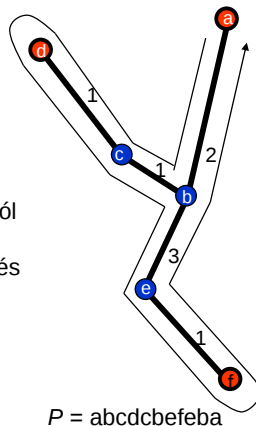
Steiner-fák – Távolság Heurisztika

Az approximációs ráta elemzése

- Jelölje OPT egy minimális Steiner-fa költségét.

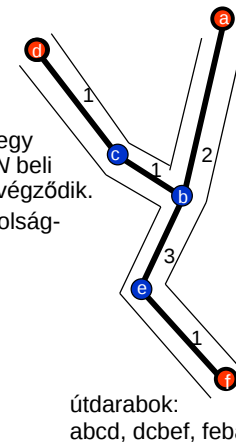
Lemma 1:

- Legyen W a távolság gráf G' egy M minimális feszítőfájának a súlya. Ekkor $W \leq (2 - 2 / |N|) OPT$.
 - T' súlya legfeljebb W .
- Biz. a):
- Legyen T egy minimális Steiner-fa
 - Legyen P egy út, amely egy tetszőleges s csomópontból indul és egyszer „körülfutja T -t”:
- Kezdjük el T egy preorder bejárását s -ből indulva és adjuk hozzá P -hez az éleket abban a sorrendben, amelyben bejárjuk őket.
 - T minden éle kétszer fordul elő P -ben.
 - Érvényes: $\sum_{e \in E(P)} c(e) = 2 OPT$.



Steiner-fák – Távolság-Heurisztika

- Vágjuk szét P -t azokon a helyeken, ahol egy N beli csomópont először fordul elő.
- $|N|$ útdarabot kapunk.
- Távolítsuk el a legnagyobb súlyú útdarabot
 - A megmaradó $|N|-1$ útdarab súlya $\leq 2 ((|N|-1) / |N|) OPT = (2 - 2 / |N|) OPT$.
 - Minden útdarab egy N beli csomópontból indul és egy N beli csomópontban végződik, úgy hogy minden N beli csomópontban csak egy útdarab kezdődik és egy végződik.
- Tekintsük minden útdarabhoz a megfelelő éleket a G' távolság-gráfban.
 - Legyen $P_{u,v}$ egy útdarab u -tól v -hez. Ekkor: $c'(\{u,v\}) \leq c(P_{u,v})$.
 - Ez az $|N|-1$ él egy feszítőfát képez G' -ben, melynek súlya $\leq (2 - 2 / |N|) OPT$.
- G' egy minimális feszítőfájának M -nek a súlya $W \leq (2 - 2 / |N|) OPT$.

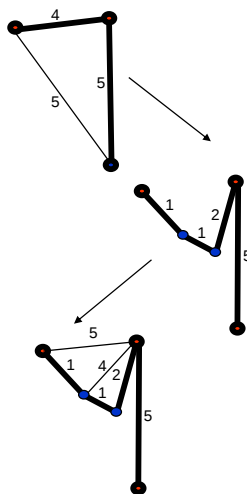


Steiner-fák – Távolság-Heurisztika

Biz. b) (T súlya $c(T) \leq W$):

- A 3. lépésben az algoritmus helyettesíti M minden élét a végpontok közötti legrövidebb úttal G -ben.
- Ha alegrövidebb utak éldisjunktak lennének, akkor H súlya $c(H)$ egyenlő lenne M súlyával $c'(M)=W$ -vel.
- Mivel a legrövidebb utak közös éleket is tartalmazhatnak, $c(H) \leq W$.
- H egy minimális feszítőfájának T_H -nak a súlya $c(T_H)$ nem nagyobb mint $c(H) \leq W$.
- Mivel $H \subseteq H'$, $c(T) \leq c(T_H) \leq W$.
- Miután eltávolítottuk a Steiner-csomópontokat, melyek foka 1, a súly csak csökkenhet.

Tétel1: A bemutatott algoritmus $O(|N| (n \log n + m))$ idő alatt kiszámít egy Steiner-fát, melynek költsége legfeljebb $(2 - 2/|N|) OPT < 2 OPT$.



Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata [Mehlhorn 1988]

Alapötlet:

- Az 1. lépésben a G távolság-gráf helyett egy G'' gráfot számítunk ki $c'': E(G'') \rightarrow \mathbb{R}^+$ élsúlyokkal, úgy hogy
 - Minden minimális feszítőfa M'' a G'' gráfban a c'' élsúlyok szerint egyben egy minimális feszítőfa a G gráfban c élsúlyok szerint, és $c''(M'') = c'(M'')$;
 - G'' kiszámítható $O(n \log n + m)$ időben.
- Kiszámítunk egy M'' minimális feszítőfát G'' -ben.
- Ezután végrehajtjuk az eredeti távolságheurisztika lépéseit M'' -t használva.

Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

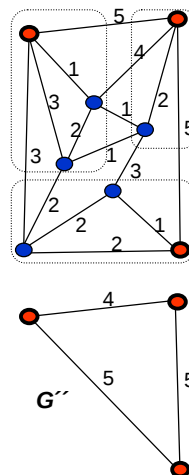
G'' következőképp definiált:

- Minden $z_i \in N$ csomópontoz legyen

$$N(z_i) := \{z_i\} \cup \{v \in V \setminus N : d(v, z_i) = \min_{z' \in N} d(v, z') \text{ und } i = \min \{j : d(v, z_j) = \min_{z' \in N} d(v, z')\}$$
 Vegyük észre: $N(z_i), z_i \in N$, egy partíciót definiál V -ben.
- $E(G'') := \{ \{z_i, z_j\} : z_i, z_j \in N, \exists \{u, v\} \in E(G) \text{ mit } u \in N(z_i), v \in N(z_j) \}$
- $c''(z_i, z_j) := \min \{ d(z_i, u) + c(\{u, v\}) + d(v, z_j) : \{u, v\} \in E(G), u \in N(z_i), v \in N(z_j) \}$

Figyeljük meg:

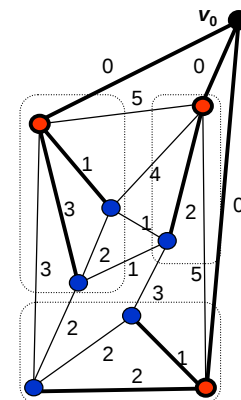
- G'' lehet G -nek egy valódi részgráfja.
- Egy él súlya G'' -ben lehet nagyobb is mint G -ben (kisebb nem lehet).



Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

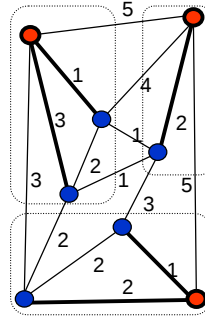
G'' konstrukciója:

- Adjunk hozzá a G gráfhoz egy új v_0 csomópontot és minden $z \in N$ -hez egy új $\{v_0, z\}$ élet $c(\{v_0, z\}) = 0$ élsúllyal.
- Feltétel: Az eredeti G gráf minden élének súlya > 0 .
- Számítsunk ki v_0 kezdőcsomóponttal egy legrövidebb utak fáját T_S -t Dijkstra algoritmusával.



Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

- Töröljük v_0 -t és minden hozzá incidens élet T_S -ből.
- T_S részfákra esik szét.
- Minden részfa pontosan egy terminalcsomópontot tartalmaz (ez a feltételből következik az eredeti gráf éleinek a súlyáról).
- A $z \in N$ terminál részfája pontosan $N(z)$ -t tartalmazza.
- Minden $v \in V$ -re a kiszámított legrövidebb út költsége $dist(v)$ pontosan a $d(v, z)$ érték, ahol $z \in N$, $v \in N(z)$.



Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

- $c'': E(G'') \rightarrow \mathbb{R}^+$ kiszámítása
- Teszteljük G minden $\{u, v\}$ élére, hogy u és v különböző $N(z_i)$ és $N(z_j)$ halmazban van-e.
- Ha igen, és $\{u, v\}$ az első él $N(z_i)$ és $N(z_j)$ között, vagy $d(u, z_i) + c(\{u, v\}) + d(v, z_j)$ kisebb mint az aktuális költség $c''(\{z_i, z_j\})$, akkor legyen $c''(\{z_i, z_j\}) := d(u, z_i) + c(\{u, v\}) + d(v, z_j)$.

