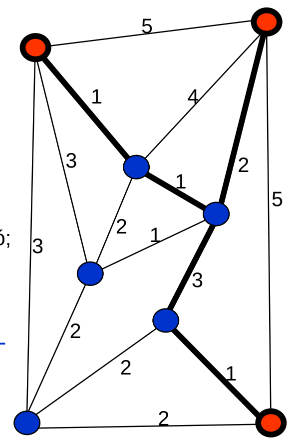
Hálózattervezés Alapjai
2007

3: Multicasting – Steiner fák (folytatás)

Multicasting

- Hogy néz ki egy optimális multicast-fa?
  - A hálózat terhelése minimális legyen.
  - Feltesszük: minden egyes linken az átvitel költsége független az iránytól.
- Steiner Probléma:
  - Adott: Egy összefüggő irányítatlan gráf $G=(V,E)$, élsúlyok $c: E \to R^+$, terminal-csomópontok halmaza $N \subseteq V$.
    (N: a multicast-csoport tagjai: a küldő és minden fogadó; $c(e)$: a költség, ami akkor lép fel, ha az e linken adatot viszünk át. Pl.: 1/sávszélesség)
  - $T=(V',E')$ egy Steiner-fa G-ben, ha T egy részfája G-nek és $N \subseteq V'$. A $V' \setminus N$ beli csomópontokat Steiner-csomópontoknak nevezzük.
  - Amit keresünk: Egy T Steiner-fa G-ben, melynek a súlya $c(T) := \Sigma_{c \in E'} c(e)$ minimális.



Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata [Mehlhorn 1988]

Alapötlet:

- Az 1. lépésben a G' távolság-gráf helyett egy G'' gráfot számítunk ki $c'': E(G'') \to R^+$ élsúlyokkal, úgy hogy
  - Minden minimális feszítőfa M'' a G'' gráfban a c'' élsúlyok szerint egyben egy minimális feszítőfa a G' gráfban c élsúlyok szerint, és $c''(M'') = c'(M'')$;
  - G'' kiszámítható $O(n \log n + m)$ időben.
- Kiszámítunk egy M'' minimális feszítőfát G'' -ben.
- Ezután végrehajtjuk az eredeti távolságheurisztika lépéseit M''-t használva.

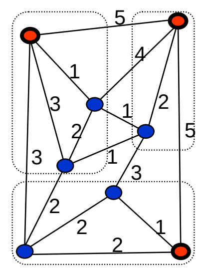
Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

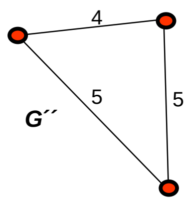
G'' következőképp definiált:

- Minden $z_i \in N$ csomóponthoz legyen
  $N(z_i) := \{z_i\} \cup \{ v \in V \setminus N : d(v,z_i) = \min_{z' \in N} d(v,z')$ und
  $i = \min\{ j : d(v,z_j) = \min_{z' \in N} d(v,z')\} \}$
  Vegyük észre: $N(z_i)$, $z_i \in N$, egy partíciót definiál V-ben.
- $E(G'') := \{ \{z_i,z_j\} : z_i, z_j \in N,$
  $\exists \{u,v\} \in E(G)$ mit $u \in N(z_i), v \in N(z_j) \}$
- $c''(z_i,z_j) := \min\{ d(z_i,u) + c(\{u,v\}) + d(v,z_j) :$
  $\{u,v\} \in E(G), u \in N(z_i), v \in N(z_j) \}$

Figyeljük meg:

- G'' lehet G'-nek egy valódi részgráfja.
- Egy él súlya G''-ben lehet nagyobb is mint G'-ben (kisebb nem lehet).

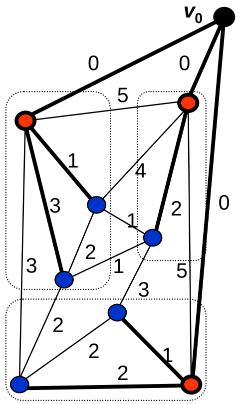




Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

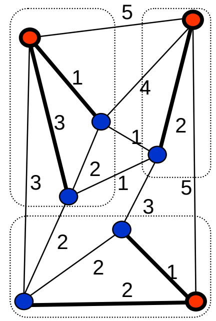
G´´ konstrukciója:

- Adjunk hozzá a G gráfhoz egy új $v_0$csomópontot és minden $z \in N$ -hez egy új $\{v_0,z\}$ élet $c(\{v_0,z\}) = 0$ élsúllyal.
- Feltétel: Az eredeti *G* gráf minden élének súlya >0.
- Számítsunk ki v_0 kezdőcsomóponttal egy legrövidebb utak fáját T_S -t Dijkstra algoritmusával.



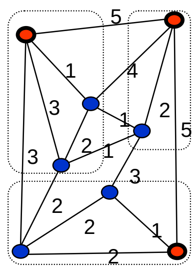
Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

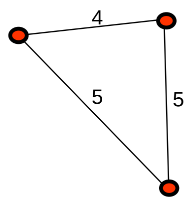
- Töröljük v_0-t és minden hozzá incidens élet T_S-ből.
  - T_S részfákra esik szét.
  - Minden részfa pontosan egy terminalcsomópontot tartalmaz (ez a feltételből következik az eredeti gráf éleinek a súlyáról).
  - A $z \in N$ terminál részfája pontosan $N(z)$-t tartalmazza.
  - Minden $v \in V$ -re a kiszámitott legrövidebb út költsége *dist*(*v*) pontosan a $d(v,z)$ érték, ahol $z \in N$, $v \in N(z)$.



Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

- $c´´:E(G´´) \rightarrow R^+$ kiszámítása
  - Teszteljük *G* minden $\{u,v\}$ éle̋re, hogy *u* és *v* különböző $N(z_i)$ és $N(z_j)$ halmazban van-e.
  - Ha igen, és $\{u,v\}$ az első él $N(z_i)$ és $N(z_j)$ között, vagy $d(u,z_i) + c(\{u,v\}) + d(v,z_j)$ kisebb mint az aktuális költség $c´´(\{z_i,z_j\})$, akkor legyen $c´´(\{z_i,z_j\}) := d(u,z_i) + c(\{u,v\}) + d(v,z_j)$.





Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

<u>Lemma 2</u>: Legyen *M´´* a *G´´* gráf egy minimális feszítőfája *c´´* élsúlyok szerint. Akkor *M´´* a *G´* gráfnak egy minimális feszítőfája *c´* élsúlyok szerint.

<u>Biz.:</u> Megmutatjuk:

(1) *G´*-nek van egy olyan *M** minimális feszítőfája, hogy *M** minden $\{z_i,z_j\}$ éle *G´´*-ben is benne van és $c´´(\{z_i,z_j\})=c´(\{z_i,z_j\})$.
Ha (1) teljesül, akkor

- *M** minimális feszítőfája *G´´*-nek is és
- *G´´* minden más *M´´* minimális feszítőfájára teljesül, hogy $c´´(M´´) = c´´(M^*) = c´(M^*)$, ezért *M´´* egy minimális feszítőfája *G´*-nek *c´* élsúlyok szerint.

Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

Tegyük fel: (1) nem teljesül. Legyen $M°$ egy minimális feszítőfája G'-nek, amely

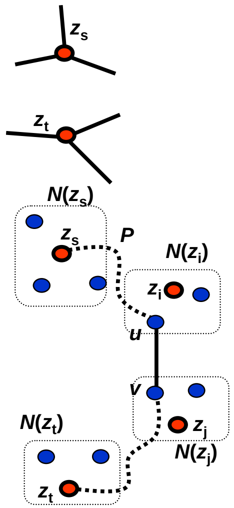
a) maximális számú G'' beli élet tartalmaz, azaz $| E(M°) \cap E(G'') |$ maximális, és

b) az élek összköltsége $\Sigma_{E(M°) \cap E(G'')} c''(e)$ minimális azon minimális feszítőfák között, amikre a) igaz.

Ekkor teljesül:

- vagy létezik egy él $\{z_s,z_t\} \in E(M°) \setminus E(G'')$,
- vagy egy olyan él létezik $\{z_s,z_t\} \in E(M°)$, amelyre $c''(\{z_s,z_t\}) > c'(\{z_s,z_t\}) = d(z_s,z_t)$.

Legyen P egy legrövidebb út z_s-től z_t-hez G-ben c szerint. Tekintsünk egy olyan $\{u,v\}$ élet, hogy u és v különböző partícióban van: mondjuk $u \in N(z_i)$, $v \in N(z_j)$.

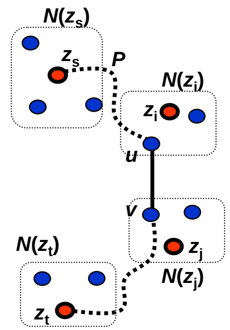


Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

- Definíció szerint teljesül $d(z_i,u) \le d(z_s,u)$, $d(z_j,u) \le d(z_t,u)$.
- Mivel $N(z_i)$ és $N(z_j)$ között G-ben legalább egy él van, pl. $\{u,v\}$, következik hogy $\{z_i,z_j\} \in E(G'')$.
- $\{z_i,z_j\}$ költsége G''-ben:

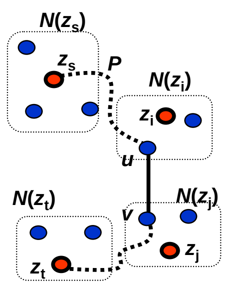
$$\begin{aligned} c''(\{z_i,z_j\}) &= \min\{d(u^*,z_i) + c(\{u^*,v^*\}) + d(v^*,z_j) : \\ &\qquad u^* \in N(z_i),\ v^* \in N(z_j)\ \} \\ &\le d(u,z_i) + c(\{u,v\}) + d(v,z_j) \\ &\le d(u,z_s) + c(\{u,v\}) + d(v,z_t) \\ &= c(P) \\ &= d(z_s,z_t) \\ &= c'(\{z_s,z_t\}). \end{aligned}$$

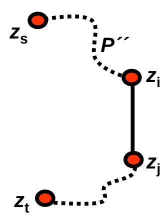
- Ezért P minden $\{u,v\} \in P$ élre, melynek végpontjai különböző partícióban vannak, $u \in N(z_i)$, $v \in N(z_j)$, teljesül hogy $c''(\{z_i,z_j\}) \le c'(\{z_s,z_t\})$.



Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

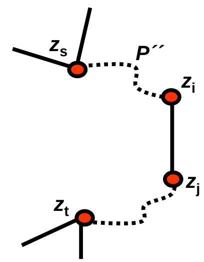
- Tekintsük a P'' utat z_s-től z_t-hez G''-ben, ami következőképp definiált:
- $\{z_i,z_j\} \in E(P'') \ \Leftrightarrow\ \exists\ \ \{u,v\} \in E(P)$, amelyre $u \in N(z_i)$, $v \in N(z_j)$, $i \neq j$.





Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

- Ha az $\{z_s,z_t\}$ élet a G' gráf $M°$ minimális feszít őfájából eltávolítjuk, $M°$ két részfára $M_s°$ és $M_t°$ esik szét.
- Mivel P'' egy út z_s-től z_t-hez G''-ben, letezik legalább egy $\{z_i,z_j\} \in P''$ él, úgy hogy $z_i \in V(M_s°)$ és $z_j \in V(M_t°)$.
- Ha $\{z_s,z_t\}$-t $M°$-ben $\{z_i,z_j\}$-vel kicseréljük, kapunk egy másik feszítőfát M^*-t, amelyre
  - $c'(M^*) = c'(M°) - c'(\{z_s,z_t\}) + c'(\{z_i,z_j\}) \le c'(M°)$ Ezért M^* egy minimális feszítőfája G'-nek.
- A feltételünk miatt:
  - vagy $\{z_s,z_t\} \notin E(G'')$, ekkor $|E(M^*) \cap E(G'')| < |E(M°) \cap E(G'')|$;
  - vagy $\{z_s,z_t\} \in E(G'')$ úgy hogy $c''(\{z_s,z_t\}) > c'(\{z_s,z_t\})$, ekkor $c''(\{z_s,z_t\}) > c'(\{z_s,z_t\}) \ge c''(\{z_i,z_j\})$, és $c''(M^*) < c''(M°)$.



Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

Tétel 2: Mehlhorn változata a távolság-heurisztikának $O(n \log n + m)$) idő alatt kiszámít egy Steiner-fát, melynek költsége legfeljebb $(2 - 2 / |N|)\ OPT < 2\ OPT$.

Steiner-fák – Dinamikus Programozás

[Dreyfus, Wagner 1972]

- Exakt algoritmus a Steiner probléma megoldásához.
- Az időigény exponencialis $|N|$-ben.
- Egy $D \subseteq V$ halmazra és egy $v \in V$ csomópontra jelölje $S(v,D)$ egy minimális Steiner-fa költségét, ahol a terminálok halmaza $D \cup \{v\}$.
- $S(v,D)$ a következő rekurzióval kiszámítható:
  - $S(v,D) = \min_{w \in V}\{ d(v,w) + \min_{\emptyset \neq D' \subset D}\{S(w,D')+S(w,D \setminus D')\}\}$
  - w-t összekötő csomópontnak nevezzük
  - w foka ≥ 3
  - Lehetséges, hogy $w=v$

Steiner-fák

Megjegyzések:

- Legjobb ismert polinomiális idejű approximáció a Steiner problémához: approximatiós ráta 1+ ½ ln 3 ≈ 1,55 [Robins, Zelikovsky 2000]
- Egy algoritmus, ami a gyakorlatban nagyon jól működik, az u.n. iterált 1-heurisztika [Kahng, Robins ´95]:

1. Legyen $S := \emptyset$ (S a kényszerített Steiner-csomópontok halmaza)
2. Számítsunk ki a távolság-heurisztikával egy T Steiner-fát $N \cup S$ terminálokkal
3. do
4. Minden $v \in V \setminus (N \cup S)$-hez számítsunk ki egy T_v Steiner-fát $N \cup S \cup \{v\}$ terminálokkal a távolság-heurisztikával;
5. Legyen u egy csomópont, amelyre $c(T_u)$ minimális;
6. if $(c(T_u) < c(T))$ then $S := S \cup \{u\}$; $T := T_u$; fi;
7. until (T-t nem tudtuk megjavítani)

Irodalom

- H. Takahashi and A. Matsuyama: **An approximate soplution for the Steiner problem in graphs**. *Math. Japonica*, Vol. 24, 573-577, 1980.
- K. Mehlhorn: **A faster approximation algorithm for the Steiner Problem in graphs.** *Information Processing Letter*, Vol. 27, 125-128, 1988.
- A. B. Kahng and G. Robins: **A new class of iterative Steiner tree heuristics with good performance**. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design*, Vol. 11(7), 893-902, 1992.
- G. Robins and A. Zelikovsky: **Improved Steiner tree approximation in graphs**. *Proceedings of the 11th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, 770-779, 2000.