Hálózattervezés Alapjai
2007

4: Access Hálózat Tervezés – Könnyű Közelítően
Legrövidebb-Utak-Fája

Hálózattervezési Problémák

- A hálózattervezés különböző problémák sorozatát foglalja magába
- A cél általánosan:
  - Egy alacsony költségű hálózat megtervezése, amely adott forgalomigényeket kielégít.
  - A topológia és a routing meghatározása
    - Azon csomópontpárok meghatározása, melyeket egymással egy linkkel össze kell kötni.
    - A linkek kapacitásának megatározása.
    - Minden forgalomkövetelményhez az útvonal meghatározása, melyet a routing hozzárendel.

Buy-at-Bulk Hálózattervezési Problémák

- A buy-at-bulk hálózattervezési probléma egy kábeltipussal (ND1K):
- **Adott:**
  - V: csomópontok n elemű halmaza, a csomópontok 1-től n-ig számozva vannak
  - $R=(r_{ij})$: Forgalomigény-mátrix
    - $r_{ij} \in R_{\geq 0}$: forgalom egy időegység alatt i -től j-be. Ez valamilyen alap-egységben adott (pl. 2Mbps).
  - F: Egy link installálásának fix alapköltsége.
    Kapacitás-független, minden linknél azonos.
  - $A=(a_{ij})$: Költség-mátrix
    - $a_{ij} \in R_{\geq 0}$: Egy egységnyi kapacitású link installálásának a költsége i és j között.
    - A szimmetrikus és érvényes rá a háromszög-egyenlőtlenség:
      $\forall\, i,j,k$: $a_{ij} \leq a_{ik} + a_{kj}$
- **Feladat:** határozzunk meg minden r_{ij} forgalom-igényhez, $0<i\leq j\leq n$, egy P_{ij} utat, úgy hogy
  $\sum_{e=\{i,j\}\in E'} (F + \lceil q(e) \rceil\, a_{ij})$ minimális,
  ahol
  - $E' = E(\bigcup_{0<i\leq j\leq n} P_{ij})$: az installált linkek halmaza,
  - $q(e) = \sum_{e \in P_{ij}} r_{ij}$: az igények összege, melyek útvonala az e linket tartalmazza

Buy-at-Bulk Hálózattervezési Problémák

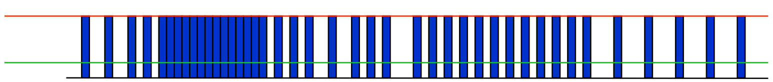
Megjegyzés: Az előző fólián definiált probléma egy leegyszerűsítése a gyakorlatban fellépő hálózattervezesi problémának

- Egy link kapacitás-függő költsége gyakran nem lineárisan függ a kapacitástól
- További korlátozások lehetségesek, pl.:
  - Hálózat átmérője
  - Csomópontok foka
- Egy link kapacitásának meghatározásánál gyakran van szerepük sztochasztikus faktoroknak is (különösen Access hálózatok esetén)

Packet level (TCP):

Access rate

Average bandwidth



Buy-at-Bulk Hálózattervezési Problémák

Lemma 1: Legyen *OPT* az ND1K probléma optimális megoldásának a költsége. A következő alsó korlátok érvényesek *OPT*-ra:

(1) $OPT \ge F\bullet(n\text{-}1) + MST$,
ahol *MST* egy minimális feszítőfa költsége az *n* csomópont által meghatározott teljes gráfban, melyben az (i,j) él súlya a_{ij}, $i,j \in V$, $i \neq j$.

(2) $OPT \ge F\bullet(n\text{-}1) + \Sigma_{1 \le i < j \le n}\, r_{ij} a_{ij}$

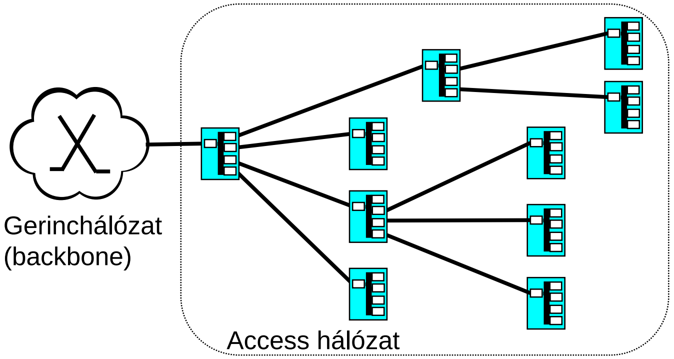
Biz.:
(1) A hálózatnak összefügőnek kell lenni, és tartalmaznia kell egy feszítőfát, melyben minden él kapacitása legalább 1. A kapacitás-független költsége *n*-1 élnek $F\bullet(n\text{-}1)$ és a kapacitás-függő legalább *MST.*

(2) A hálózat legalább *n*-1 élet tartalmaz: a kapacitás-független költség így $\ge F\bullet(n\text{-}1)$. Minden r_{ij} igény legalább $r_{ij}a_{ij}$ kapacitásfüggő költséget okoz, mivel a háromszög-egyenlőtlenség miatt nincs olyan út *i* és *j* között, ami rövidebb mint a_{ij}.

□

Access Hálózattervezés

- A végfelhasználók egy access hálózaton keresztül csatlakoznak a gerinchálózathoz
- Az access hálózat u.n. koncentrátor csomópontokból áll



Access Hálózattervezés

- Access hálózattervezés egy kábeltipussal (AND1K)
- Minden forgalomigény egy kitüntetett csomópontot, mondjuk az 1-es csomópont, és egy másik csomópontot köt össze
- Az 1-es csomópontot forrásnak nevezzük
- **Adott:**
  - *V*: csomópontok *n* elemű halmaza, a csomópontok 1-től *n*-ig vannak számozva
  - Igények $r_{1i} > 0$, $2 \le i \le n$
  - *F*: Egy link installálásának fix alapköltsége
  - $A=(a_{ij})$: Költség mátrix: szimmetrikus és teljesíti a háromszög egyenlőtlenséget
- **Feladat:** határozzunk meg egy P_{1i} utat minden r_{1i} igényhez, $2 \le i \le n$, úgy hogy
$$\Sigma_{e=\{i,j\}\in E'} (F + \lceil q(e) \rceil\, a_{ij}) \text{ minimális,}$$
ahol
  - $E'=E(\cup_{2\le i\le n} P_{1i})$: az installált linkek halmaza,
  - $q(e) = \Sigma_{e\in P_{1i}} r_{1i}$: az igények összege, melyek útvonala az *e* linket tartalmazza

Approximációs Algoritmus Access Hálózattervezéshez

[Khuller, Raghavachari, Young 95]

- Bemutatunk egy approximaciós algoritmust a AND1K problémához
- Alapja: Egy könnyű közelítően legrövidebb utak fájának (light approximate shortest path tree LAST) kiszámítása
- Egy (α,β)-LAST *T* egy $G=(V,E)$ gráfhoz $c : E \rightarrow R^+$ élsúlyokkal és *s* kezdő csomóponttal egy feszítőfája *G*-nek, amely
  1. approximálja *G*-nek egy legrövidebb utak fáját *s* kezdő csomóponttal, azaz minden $v \in V$ csomópontra teljesül
  $$d_T(s,v) \le \alpha\, d_G(s,v),$$
  ahol
     - $d_T(s,v)$ az út hossza *s*-től *v*-hez *T*-ben
     - $d_G(s,v)$ egy legrövidebb út hossza *s*-től *v*-hez *G*-ben
  2. könnyű: $c(T) \le \beta\, c(T_M)$, ahol T_M egy minimális feszítőfája *G*-nek.

Access Hálózattervezés - LAST

Lemma 2: Legyen G az n csomópontú teljes gráf a_{ij} élsúlyokkal.
Legyen T egy (α,β)-LAST G-hez az 1-es kezdő csomóponttal.
Legyen P_{1i} az út az 1-es csomóponttól i-hez T-ben.
Akkor T hálózat költsége a fenti routinggal ≤(α+β)*OPT*.

Biz.: Legyen $E' = E(T)$ a T hálózat éleinek halmaza.
Minden $e \in E'$ él legalább egy P_{1i} úton előfordul.
A T hálózat költsége, amely a routingból adódik:

$$C = F\bullet(n-1) + \Sigma_{e=\{i,j\}\in E'} \lceil q(e) \rceil\, a_{ij}.$$

Minden $e \in E'$ élhez legyen $\Delta(e) := \lceil q(e) \rceil - q(e)$.
$\Delta(e)$ az a kapacitás az e élen, amit megfizetünk, de nincs rá szükség.
Ekkor $C = C_1 + C_2$, ahol

$$C_1 = \Sigma_{e=\{i,j\}\in E'}\, q(e)\, a_{ij} \text{ und}$$
$$C_2 = F\bullet(n-1) + \Sigma_{e=\{i,j\}\in E'}\, \Delta(e)\, a_{ij}$$

Access Hálózattervezés - LAST

Egy r_{1i} igény $r_{1i}\, d_T(1,i)$ költséget ad C_1-hez.
Mivel T egy (α,β)-LAST, $r_{1i}\, d_T(1,i) \le r_{1i}\, \alpha\, d_G(1,i)$.
Mivel az élsúlyokra érvényes a háromszög-egyenlőtlenség, $d_G(1,i) = a_{1i}$.
Ezért

$$C_1 = \Sigma_{2\le i\le n}\, r_{1i}\, d_T(1,i) \le \alpha\, \Sigma_{2\le i\le n}\, r_{1i}\, a_{1i}\ .$$

Így Lemma 1 (2) miatt $C_1 \le \alpha\ OPT$.

Mivel $\Delta(e) \le 1$ minden $e \in E'$ élre és T egy (α,β)-LAST, érvényes hogy

$$C_2 \le F\bullet(n-1) + \Sigma_{e=\{i,j\}\in E'}\, a_{ij} \le F\bullet(n-1) + \beta MST.$$

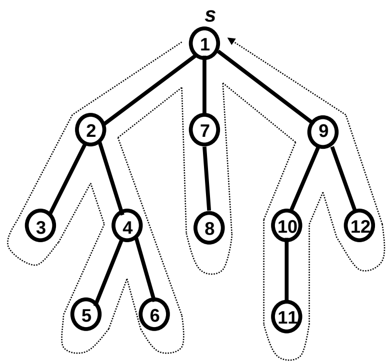
Így Lemma 1 (1) miatt $C_2 \le \beta\ OPT$, és ezért
$C \le (\alpha+\beta)OPT$. □

Egy (α,β)-LAST kiszámítása

- Cél: Egy algoritmus, amely kiszámít egy (α,β)-LAST-ot lehetőleg kicsi α és β értékekkel.
- Egy LAST kiszámításához szükség lesz egy minimális feszítőfa csomópontjainak preorder számozására.

Algoritmus Preorder_számozás
Input: fa $T=(V,E)$
Output: preorder szám *num*[*v*] minden $v \in V$ csomóponthoz

```
procedure preorder(node v)
begin
  num[v]:=i; i:=i+1;
    for all child w of v do
      preorder(w);
    od;
end;
i:=1;
preorder(s);
```



Egy (α,β)-LAST kiszámítása

Algoritmus: (α,β)-LAST
Input: Egy összefüggő irányítatlan gráf $G=(V,E)$, kezdőcsomópont $s \in V$, élsúlyok $c : E \to R^+$ és α,β értékek $\alpha > 1$ és $\beta = 1 + 2 / (\alpha-1)$.
Output: (α,β)-LAST T.

1. Kiszámítunk egy T_M minimális feszítőfát G-ben;
   Kiszámítjuk a legrövidebb utat s-től minden más csomóponthoz G-ben;
2. Kiszámítjuk T_M csomópontjainak preorder számozását s gyökérrel;
3. $H := T_M$;
4. **for all** $v \in V$ preorder szám szerint növekvő sorrendben **do**
   Kiszámítunk egy lerövidebb utat P-t s-től v-hez H-ban;
   if $c(P) \ge \alpha\, d_G(s,v)$ **then**
   Legyen P_i a legrövidebb út s-től v-hez G-ben;
   Adjuk hozzá P' éleit H-hoz (azaz $E(H) := E(H) \cup E(P_i)$);
   fi;
   od;
5. Kiszámítunk H-ban s kezdőcsomóponttal egy legrövidebb utak fáját T-t;
6. **return** T;