Hálózattervezés Alapjai
2007

5: Access Hálózat Tervezés – Könnyű Közelítően Legrövidebb-Utak-Fája (folyt.)

Hálózattervezési Problémák

- A hálózattervezés különböző problémák sorozatát foglalja magába
- A cél általánosan:
  - Egy alacsony költségű hálózat megtervezése, amely adott forgalomigényeket kielégít.
  - A topológia és a routing meghatározása
    - Azon csomópontpárok meghatározása, melyeket egymással egy linkkel össze kell kötni.
    - A linkek kapacitásának megatározása.
    - Minden forgalomkövetelményhez az útvonal meghatározása, melyet a routing hozzárendel.

Access Hálózattervezés

- Access hálózattervezés egy kábeltipussal (AND1K)
- Minden forgalomigény egy kitüntetett csomópontot, mondjuk az 1-es csomópont, és egy másik csomópontot köt össze
- Az 1-es csomópontot forrásnak nevezzük
- **Adott:**
  - V: csomópontok n elemű halmaza, a csomópontok 1-től n-ig vannak számozva
  - Igények $r_{1i} > 0$, $2 \le i \le n$
  - F: Egy link installálásának fix alapköltsége
  - $A=(a_{ij})$: Költség mátrix: szimmetrikus és teljesíti a háromszög egyenlőtlenséget
- **Feladat:** határozzunk meg egy P_{1i} utat minden r_{1i} igényhez, $2 \le i \le n$, úgy hogy

  $\Sigma_{e=\{i,j\}\in E'}(F + \lceil q(e) \rceil a_{ij})$ minimális,

  ahol
  - $E' = E(\cup_{2\le i\le n} P_{1i})$: az installált linkek halmaza,
  - $q(e) = \Sigma_{e\in P_{1i}} r_{1i}$: az igények összege, melyek útvonala az e linket tartalmazza

Approximációs Algoritmus Access Hálózattervezéshez

[Khuller, Raghavachari, Young 95]

- Approximaciós algoritmus a AND1K problémához
  - Egy könnyű közelítően legrövidebb utak fája (LAST) segítségével
- Egy (α,β)-LAST T egy $G=(V,E)$ gráfhoz $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ élsúlyokkal és s kezdő csomóponttal egy feszítőfája G-nek, amelyre
  1. $d_T(s,v) \le \alpha\, d_G(s,v)$, ahol
     - $d_T(s,v)$ az út hossza s-től v-hez T-ben
     - $d_G(s,v)$ egy legrövidebb út hossza s-től v-hez G-ben
  2. $c(T) \le \beta\, c(T_M)$, ahol T_M egy minimális feszítőfája G-nek.

Lemma 2: Legyen G az n csomópontú teljes gráf a_{ij} élsúlyokkal.
Legyen T egy (α,β)-LAST G-hez az 1-es kezdő csomóponttal.
Legyen P_{1i} az út az 1-es csomóponttól i-hez T-ben.
Akkor T hálózat költsége a fenti routinggal $\le (\alpha+\beta)$OPT,
ahol OPT az optimális access hálózat költsége □

Egy (α,β)-LAST kiszámítása

Algoritmus: (α,β)-LAST

Input: Egy összefüggő irányítatlan gráf $G=(V,E)$, kezdőcsomópont $s \in V$, élsúlyok $c : E \rightarrow R^+$ és α,β értékek $\alpha > 1$ és $\beta = 1 + 2 / (\alpha-1)$.

Output: (α,β)-LAST T.

1. Kiszámítunk egy T_M minimális feszítőfát G-ben;
   Kiszámítjuk a legrövidebb utat s-től minden más csomóponthoz G-ben;
2. Kiszámítjuk T_M csomópontjainak preorder számozását s gyökérrel;
3. $H := T_M$;
4. **for all** $v \in V$ preorder szám szerint növekvő sorrendben **do**
   Kiszámítunk egy lerövidebb utat P-t s-től v-hez H-ban;
   if $c(P) \geq \alpha\, d_G(s,v)$ **then**
   Legyen P_i a legrövidebb út s-től v-hez G-ben;
   Adjuk hozzá P' éleit H-hoz (azaz $E(H) := E(H) \cup E(P_i)$);
   fi;
   od;
5. Kiszámítunk H-ban s kezdőcsomóponttal egy legrövidebb utak fáját T-t;
6. **return** T;

Egy (α,β)-LAST kiszámítása

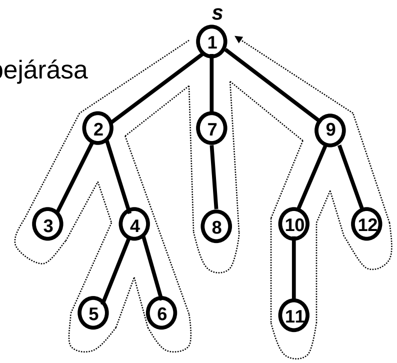
Lemma 3: Legyen T egy feszítőfája egy $G=(V,E)$ gráfnak $c : E \rightarrow R^+$ élsúlyokkal és legyen s a T gyökere. Legyen $z_0,z_1,\ldots,z_k$ tetszőleges k+1 csomópont T-ben preorder szám szerint növekvő sorrendben. Ekkor

$$\Sigma_{1\leq i\leq k}\, d_T(z_{i-1},z_i) \leq 2c(T).$$

Biz.: Tekintsük a P utat, amelyet T preorder bejárása definiál. T minden éle pontosan kétszer fordul elő P-ben. Ezért

$$\Sigma_{e\in E(P)} c(e) = 2\, c(T).$$

P tartalmaz minden i-hez, $1 \leq i \leq k$, egy részútat z_{i-1} első előfordulásától z_i első előfordulásáig.
E részút hossza $\geq d_T(z_{i-1},z_i)$.
Mivel ezek a részutak diszjunkt részutak P-ben, következik az állítás. □



Egy (α,β)-LAST kiszámítása

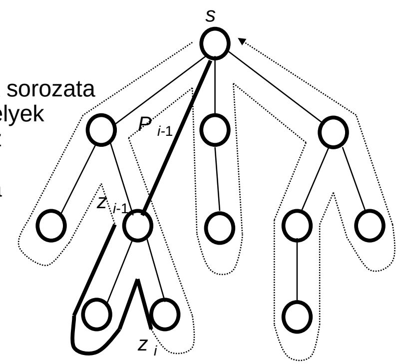
Lemma 4: Legyen $\alpha > 1$ és $\beta = 1 + 2 / (\alpha-1)$.
A H gráfra az (α,β)-LAST algoritmusban érvényes:

(1) minden $v \in V$ csomópontra, egy legrövidebb út költsége s-től v-hez H-ban $\leq \alpha\, d_G(s,v)$, és

(2) H összköltsége $c(H) \leq \beta\, c(T_M)$.

Biz.: A 4. lépés biztosítja, hogy (1) teljesül.
(2): Legyen $z_0=s$ és $z_1,\ldots,z_k$ azon csomópontok sorozata preorder szám szerint növekvő sorrendben, melyek a 4. lépésben P_i (egy legrövidebb út s-től z_i-hez G-ben) hozzáadását okozták H-hoz.
Amikor z_i (i=1,…,k) a 4. lépésben feldolgozásra kerül, H tartalmazza azt az utat, ami következőképp áll össze:

- P_{i-1}, egy legrövidebb út s-től z_{i-1}-hez G-ben kiegészítve
- T_M preorder bejárása által definiált út részútjával z_{i-1}-től z_i-hez.



Egy (α,β)-LAST kiszámítása

Ezen út költsége $d_G(s,z_{i-1}) + d_{T_M}(z_{i-1},z_i)$.

Mivel egy legrövidebb P út s-től z_i-hez H-ban legfeljebb ekkora költségű és $c(P) > \alpha\, d_G(s,z_i)$ (4. lépés miatt), teljesül hogy
$d_G(s,z_{i-1}) + d_{T_M}(z_{i-1},z_i) > \alpha\, d_G(s,z_i)$, átrendezve:
$\alpha\, d_G(s,z_i) - d_G(s,z_{i-1}) < d_{T_M}(z_{i-1},z_i)$.

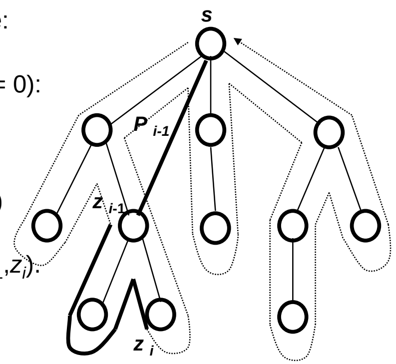
Összeadva minden i-re, i=1,…,k (mivel $d_G(s,z_0) = 0$):

$$\alpha\, d_G(s,z_1) - d_G(s,z_0) < d_{T_M}(z_0,z_1)$$
$$\alpha\, d_G(s,z_2) - d_G(s,z_1) < d_{T_M}(z_1,z_2)$$
$$\ldots$$
$$\alpha\, d_G(s,z_k) - d_G(s,z_{k-1}) < d_{T_M}(z_{k-1},z_k)$$

$$\alpha\, d_G(s,z_k) + \Sigma_{1\leq i<k}(\alpha-1)\, d_G(s,z_i) < \Sigma_{1\leq i\leq k} d_{T_M}(z_{i-1},z_i).$$

Így

$$\Sigma_{1\leq i\leq k}(\alpha-1)\, d_G(s,z_i) < \Sigma_{1\leq i\leq k} d_{T_M}(z_{i-1},z_i)$$



Egy (α,β)-LAST kiszámítása

Lemma 3 miatt $\Sigma_{1\le i\le k}\, d_{T_M}(z_{i-1},z_i) \le 2c(T_M)$.
Így
$$\Sigma_{1\le i\le k} d_G(s,z_i) < (1 / (\alpha-1))\ \Sigma_{1\le i\le k} d_{T_M}(z_{i-1},z_i) \le 2c(T_M) / (\alpha-1).$$
Mivel
$$c(H) \le c(T_M) + \Sigma_{1\le i\le k} d_G(s,z_i) \le (1 + 2 / (\alpha-1))\ c(T_M),$$
a bizonyítás teljes □

Tétel 1: Legyen $\alpha > 1$ és $\beta = 1 + 2 / (\alpha-1)$. A (α,β)-LAST algoritmus polinomiális idő alatt kiszámít egy (α,β)-LAST-ot *G*-ben, azaz egy *T* feszítőfát, amelyre

- $\forall v\in V : d_T(s,v) \le \alpha\, d_G(s,v)$ és
- $c(T) \le \beta\, c(T_M)$. □

Access Hálózatervezés

Megjegyzés: Az ANDK1K access hálózattervezés problémában $(\alpha+\beta) = (\alpha + 1 + 2 / (\alpha-1))$ értéket kell minimalizálni ahhoz, hogy a legjobb approximációs rátát garantáljuk.
A minimum $\alpha = \beta = 1+\sqrt{2}$.
Ekkor az approximációs ráta $(\alpha+\beta) = (2+2\sqrt{2}) \approx 4{,}82$.

Algoritmus: AND1K

Input: csomópontok *n* elemű halmaza *V*, (csomópont 1 a forrás); forgalomigények r_{1i}, $2 \le i \le n$; fix költség *F*, költség mátrix $A = (a_{ij})$

Output: Utak P_{1i} , $2 \le i \le n$.

1. Kiszámítunk egy $(1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$-LAST-ot *T*-t az 1-es kezdőcsomóponttal a teljes gráfban, melynek csomóponthalmaza *V* és az élsúlyok a_{ij}
2. P_{1i} := az út 1-től *i*-hez *T*-ben, $2 \le i \le n$.

Access Hálózattervezés

Tétel 2: Az AND1K algoritmus kiszámítja polinomiális idő alatt az AND1K probléma egy megoldását, melynek költsége legfeljebb $(2+2\sqrt{2})$ *OPT*. □

Irodalom

- S. Khuller, B. Raghavachari, and N. Young: **Balancing minimum spanning and shorthest path trees**. *Algorithmica*, Vol. 14, 305-322, 1995.
- F. Salman, J. Cheriyan, R. Ravi, amd S. Subramanian: **Buy-at-bulk network design: approximating the single-sink edge installation problem.** *Proc. ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA´97)*, 1997.