

Hálózattervezés Alapjai 2007

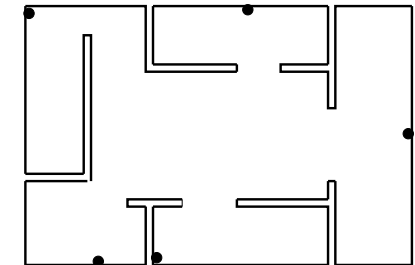
8: Művészeti Galéria Probléma – Őrzési / Megvilágítási problémák

A művészeti galéria probléma

A művészeti galéria probléma (art gallery problem):

A "művészeti galéria" megfigyelése kamerákkal / őrkkel.

- A galéria tervét egy síkbeli sokszöggel (pólygon) modellezük.
- Feltesszük, hogy ez egy egyszerű sokszög, azaz
 - egy önmagát nem metsző poligonális lánc határolja és
 - nem tartalmaz lyukat.



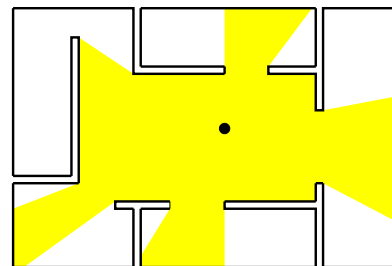
A művészeti galéria probléma

- Legyen P egy egyszerű sokszög és p és q két pont P -ben.
- Azt mondjuk, hogy p és q látják egymást, ha P teljes egészében tartalmazza a pq szakaszt.

A művészeti galéria probléma:

- **Adott:** Egy egyszerű sokszög P .
- **Feladat:** Hol és hány pontot (őrt) kell elhelyezni P -ben, úgy hogy minden P beli pontot legalább egy őr lásson.

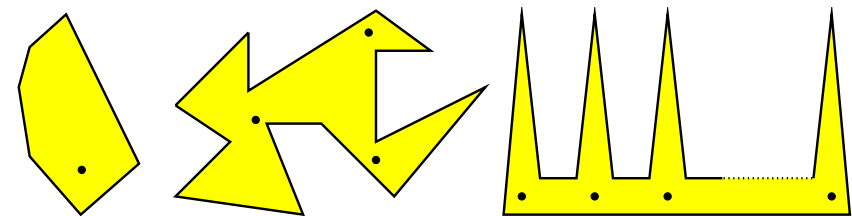
(őr: mozgásérzékelő szenzor, kamera, fényforrás,...)



■ : Azon pontok halmaza P -ben, melyeket p lát

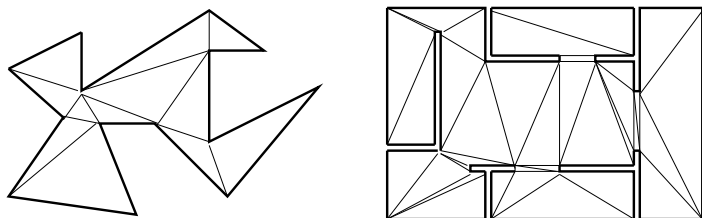
A művészeti galéria probléma

- Az őrk minimális számának kiszámítása NP-nehéz.
- De: Megmutatjuk, hogy $\lfloor n/3 \rfloor$ őr elegendő, ahol n a csúcsok száma P -ben.
- Néhány esetben $\lfloor n/3 \rfloor$ őr szükséges is.



Sokszögek háromszögelése

- Egy P sokszög háromszögelése (Δ -elése) egy planár felosztása P -nek, melynek
 - csomópontjai P csúcsai,
 - élei egyenes szakaszok a csúcspárok között (az éleket átlóknak is nevezik),
 - felületei pedig háromszögek.



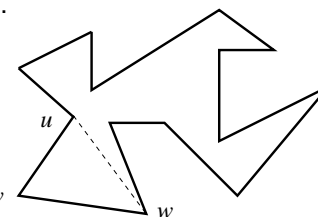
Sokszögek háromszögelése

Lemma 1: Minden n csúcsú egyszerű sokszög P háromszögelésében pontosan $n-2$ háromszög van.

Biz.: Indukció n szerint.

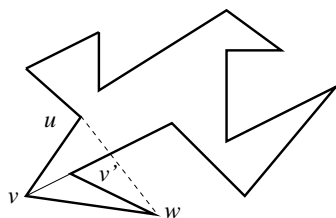
- $n=3$ esetén igaz, P egy háromszög.
- Legyen $n>3$. Feltétel, a lemma állítása igaz minden $m<n$ esetén. Először megmutatjuk, hogy P -nek van egy átlója. Ezután alkalmazzuk az indukciós feltételt a két sokszögre, amire ez az átló osztja P -t.

Legyen v az a csúcsa P -nek, melynek koordinátái lexikografikusan minimálisak. Legyen u és w a két v -vel szomszédos csúcs. - Ha az uw szakasz teljességében P -ben van, v akkor uw egy átló.



Sokszögek háromszögelése

- Ha uw nincs teljességében P -ben, akkor uvw Δ tartalmazza P egy vagy több csúcsát. Legyen ezen csúcsok közül v' az a csúcs, melynek távolsága uw -tól maximális. Ekkor a vv' szakasz nem metszheti P egy oldalát sem, mert egy ilyen oldal egyik végpontja az uvw Δ belsejében lenne és a távolsága uw -tól nagyobb lenne mint v' -nek. Ezért vv' egy átló.

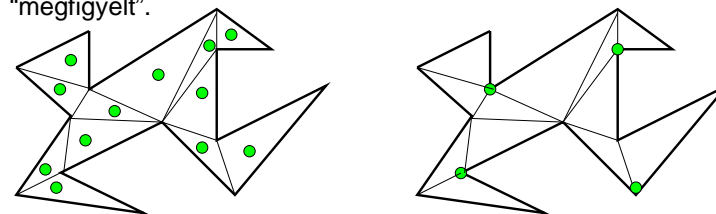


Minden átló P -t két sokszögre P_1 -re és P_2 -re osztja. Legyen m_1 és m_2 a csúcsok száma P_1 -ben és P_2 -ben. Mivel $m_1 < n$ és $m_2 < n$, az indukciós feltétel szerint P_1 és P_2 Δ -elhető, és ezzel P is.

Mivel P_1 -nek és P_2 -nek pontosan két közös csúcsa van, $m_1+m_2=n+2$. P_1 és P_2 Δ -elése az indukciós feltétel szerint m_1-2 és m_2-2 Δ -t tartalmaz. Ezért P Δ -elése $n-2$ -t. \square

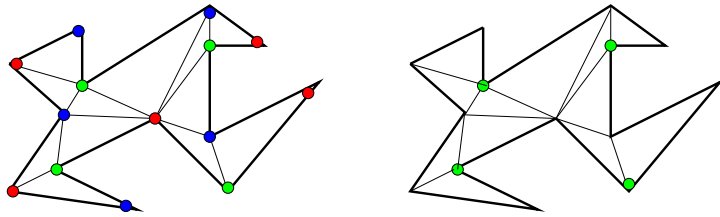
Sokszögek háromszögelése – műgaléria probléma

- Lemma 1 implikálja, hogy minden n csúcsú egyszerű P sokszögben elegendő $n-2$ ör, Δ -enként 1. Ez azonban túl „nagyvonalú”. Ha az öröket bizonyos jól kiválasztott csúcsokban helyezzük el, akkor kevesebb ör is elegendő.
- A „stratégia“:
 - Válasszunk ki a csúcsok egy (lehetőleg kicsi) részhalmazát, úgy hogy a Δ -elés minden Δ -ében legalább egy kiválasztott csúcs van.
 - Helyezzük el az öröket ezekben a csúcsokban. Ekkor az egész P „megfigyelt”.



Sokszögek háromszögelése – műgaléria probléma

- Színezzük a Δ -elés csúcsait 3 színnel, úgy hogy a csúcsok, melyek egy éllel össze vannak kötve, különböző színűek legyenek.
 - Ekkor minden Δ csúcsai 3 különböző színt kap.
 - Ez 3 színosztályra osztja a csúcsok halmazát.
- Kiválasztjuk a legkisebb színosztályt és az öröket ezekben a csúcsokban helyezük el.
 - Meg kell mutatni, hogy a „ Δ -elés 3 színnel színezhető”



Sokszögek háromszögelése – műgaléria probléma

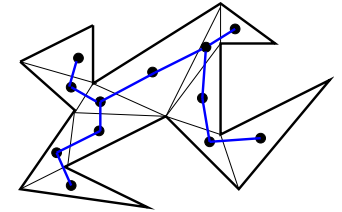
Lemma 2: Tekintsük egy sokszög Δ -elését T -t egy gráfként. Ekkor T 3 színnel színezhető.

Biz.:

Egy planár gráf G **duál-gráfja** G^* az a gráf, melynek csomópontjai G -nek a felületei. Két csomópont G^* -ben pontosan akkor van összekötve egy éllel, ha a megfelelő felületek G -ben egy él által szomszédosak.

Tekintsük T duál-gráfját T^* -t (a külső felület kivételével).

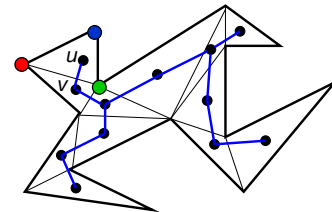
Mivel minden átló P -t két sokszögre osztja, T^* bármelyik élének törlése két komponensre osztaná T^* -t. Tehát T^* egy fa. (Ez nem lenne érvényes olyan sokszögre, amelyben lyuk van.) Továbbá, T^* foka 3, mivel minden Δ -höz T -ben legfeljebb 3 szomszédos Δ van.



Sokszögek háromszögelése – műgaléria probléma

T színezéséhez T^* bejárását használjuk mélységi keresés (DFS) által.

- Egy tetszőleges T^* belső csomóponttal kezdünk.
- T megfelelő Δ -ének a csúcsait 3 különböző színnel színezzük.
- Megőrizzük azt az invariánst, hogy T minden elért Δ -ének csúcsai helyesen vannak színezve.
- Amikor T^* -ben bejárunk egy (u, v) élt, az u -nak és v -nek megfelelő Δ -eknek t_u -nak és t_v -nek T -ben van egy közös oldala.
- Ekkor a közös oldal két végpontja már színezett.
- A harmadik csúcs színezéséhez t_v -ben a 3-adik színt használjuk.

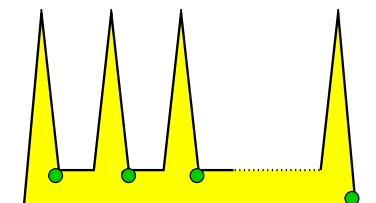
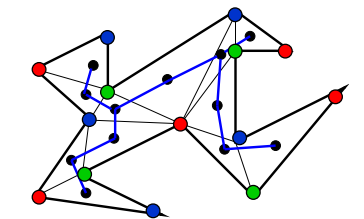


A DFS után T -ben egy helyes színezést kapunk 3 színnel. \square

Sokszögek háromszögelése – műgaléria probléma

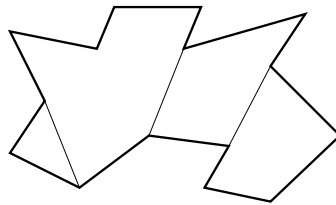
- Mivel a színezés után a 3 színosztály közül legalább egy $\leq \lfloor n/3 \rfloor$ csúcsot tartalmaz és minden Δ -ben pontosan egy csúcs ezzel a színnel van színezve, a következő teljesül:

Tétel 1: Legyen P egy egyszerű sokszög n csúccsal. Akkor P legfeljebb $\lfloor n/3 \rfloor$ örrrel mindig megfigyelhető. Vannak olyan sokszögek, melyekben $\lfloor n/3 \rfloor$ ör szükséges is. \square



A háromszögelés kiszámítása

- Először P -t u.n. monoton sokszögekre bontjuk.
- Ezután ezeket a monoton sokszögeket Δ -eljük.
- Akkor mondjuk, hogy egy egyszerű sokszög P egy h egyenes szerint **monoton**, ha minden h -ra ortogonális h' egyenesre $P \cap h'$ összefüggő, azaz $P \cap h'$ vagy egy pont, vagy egy szakasz.
- P x -monoton, ha az x -tengely szerint monoton.

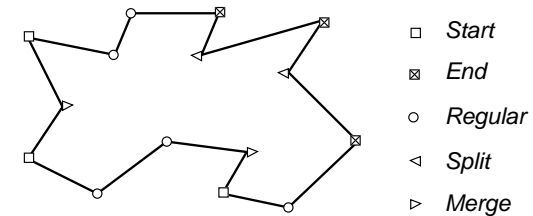


P felbontása x -monoton sokszögekre

5 csúcstípust különböztetünk meg:

Legyen v egy csúcs és $\alpha(v)$ belső szög v -nél P -ben. Ekkor v egy

- **Start-csúcs:** v mindkét szomszédja jobbra van v -től és $\alpha(v) < \pi$,
- **Split-csúcs:** v mindkét szomszédja jobbra van v -től és $\alpha(v) > \pi$,
- **End-csúcs:** v mindkét szomszédja balra van v -től és $\alpha(v) < \pi$,
- **Merge-csúcs:** v mindkét szomszédja balra van v -től és $\alpha(v) > \pi$,
- **Regular-csúcs:** különben.



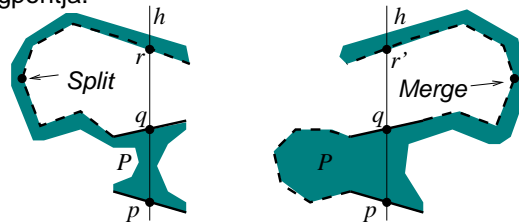
P felbontása x -monoton sokszögekre

Lemma 3: Egy P sokszög akkor x -monoton, ha nem tartalmaz se split-csúcsot se merge-csúcsot.

Biz.: Tegyük fel, hogy P nem x -monoton, akkor létezik egy vertikális egyenes h , melyre $h \cap P$ több mint 1 összefüggő komponenst tartalmaz. Válasszuk h -t úgy, hogy a legmélyebben lévő komponens egy szakasz nem egy pont. Legyen p és q a szakasz két végpontja.

Kövessük P határát q -ból balra indulva addig, amíg egy $r \in P \cap h$ metszéspontot nem találunk. Ha $p \neq r$, akkor útközben kellett lenni egy split-csúcsnak. Különben kövessük P határát q -ból jobbra indulva addig, amíg egy $r' \in P \cap h$ metszéspontot nem találunk.

Ekkor útközben kellett lenni egy merge-csúcsnak. □

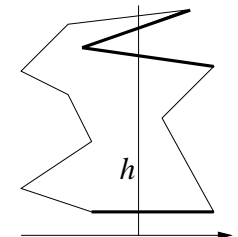


P felbontása x -monoton sokszögekre – plane sweep

- Így tehát a split- és a merge-csúcsokat kell P -ben kezelni. A sokszögeknek P felbontása után nem szabad ilyen csúcsokat tartalmazniuk.
- P felbontásához egy **plane-sweep** eljárást használunk.

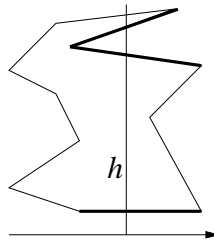
Plane sweep

- **Ötlet:**
- csúsztassunk egy függőleges egyenest (**sweep-line**) balról jobbra a síkon
- Egy **sweep-status** adatstruktúrában tároljuk a sweep-line és a scenárió metszetét.
- A sweep-status adatstruktúrát csak bizonyos **eseményeknél** (**event point**) kell aktualizálni (amikor az egyenes és a scenárió metszete változik).



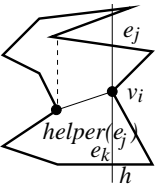
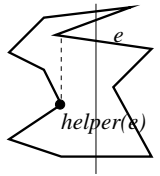
P felbontása x-monoton sokszögekre – plane sweep

- **Sweep-Status T :** egy bináris keresőfa. Az algoritmus futása alatt T mindig P -nek azon oldalait (éleit) tárolja, melyek h -t metszik, a metszéspontok y -koordinátáinak megfelelően rendezve.
- **Eseménypontok:** P csúcsai. Ezeket egy Q várakozási sorban tároljuk, ahol Q egy Priority-Queue.
 - Egy csúcs prioritása a csúcs x -koordinátája (pontosabban: a csúcs koordinátái lexikografikusan).
 - Q -t rendezett listaként is implementálhatjuk, mivel minden esemény kezdettől fogva ismert.



P felbontása x-monoton sokszögekre – plane sweep

- P Minden e oldalához, amelyet a Sweep-Status T tartalmaz, tárolunk egy pointert: $helper(e)$. Ez P -nek arra a legjobboldalibb v csúcsára mutat,
 - amely balra van h -tól és
 - P belsejében v és e egy függőleges szakasszal összeköthető.
 - Ha nincs ilyen csúcs, akkor $helper(e)$ a bal végpontja e -nek.
- Ha h eléri egy v_i split-csúcsot, akkor meg kell találni P -nek azokat az e_j és e_k éleket, amelyek a T -ben direkt v_i felett illetve direkt v_i alatt vannak. Ekkor a szakasz v_i -től $helper(e_j)$ -hez (és $helper(e_k)$ -hoz) nem metszheti P egy másik élét és így teljesen P -ben van.
- Miután h elérte egy v_i split-csúcsot, v_i lesz e_j és e_k új $helper()$ -je és a két v_i -hez incidens él.
- Elegendő a $helper()$ mutatót csak azoknál az éleknél tárolni, amelyek direkt az újonnan elért csúcs fölött vannak T -ben.

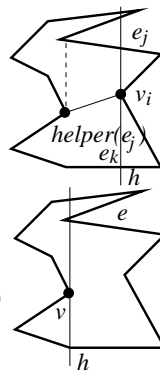


P felbontása x-monoton sokszögekre – plane sweep

Az események feldolgozása:

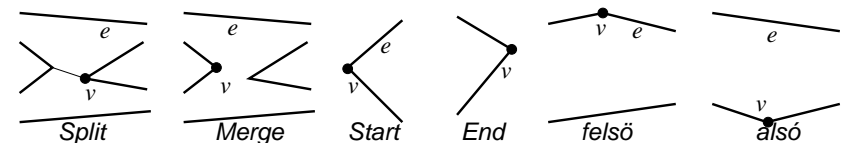
Legyen v az aktuális csúcs, amit h éppen elér.

- **v split-csúcs:** Keressük meg P azon e és e' élét, ami direkt v felett és direkt v alatt van T -ben. Fűzzük be az átlót, amely v -t és $helper(e)$ -t összeköti. Fűzzük be T -be P -nek a v -hez incidens két élét. Ezután az e és a v -hez incidens alsó oldal $helper()$ mutatóját állítsuk v -re.
- **merge-csúcs:** Töröljük a v -hez incidens két élét T -ből. Keressük meg azt az e élét, ami direkt v fölött van T -ben. Legyen $helper(e):=v$. (Később még visszatérünk erre az esetre)
- **start-csúcs:** Fűzzük be a két incidens élét T -be. A felső él $helper()$ mutatója legyen v .
- **end-csúcs:** Töröljük a két incidens élét T -ből.



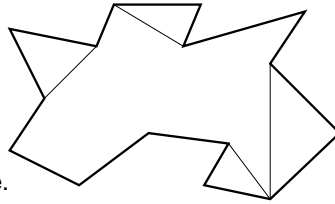
P felbontása x-monoton sokszögekre – plane sweep

- **felső reguláris-csúcs:** Cseréljük ki T -ben az élt, ami balról incidens v -hez a jobbról incidens e élre. Legyen $helper(e):=v$.
- **alsó reguláris-csúcs:** Cseréljük ki T -ben az élt, ami balról incidens v -hez a jobbról incidens e élre. Legyen e az az él, ami T -ben direkt v felett van. Legyen $helper(e):=v$.



P felbontása x -monoton sokszögekre – plane sweep

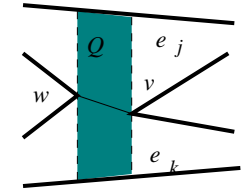
- A split-csúcsokat teljesen feldolgoztuk. Átlókat fűztünk be mindegyiknél. Az új sokszögekben már nincs split-csúcs. A merge-csúcsokat kell még teljesen feldolgozni.
- **1. lehetőség:** Végrehajtunk egy másik *plane sweep*-et hátrafele.
- **2. lehetőség:** Csak egy *plane sweep* (csak balról jobbra).
 - Minden alkalommal, amikor egy e élnél $helper(e)$ megváltozik, teszteljük, hogy a régi $helper()$ -csúcs egy merge-csúcs-e. Ha igen, akkor fűzzük be az átlót a régi és az új $helper()$ -csúcs között.
 - Ugyanígy, mindig, amikor h egy e élt elhagy, teszteljük, hogy $helper(e)$ egy merge-csúcs-e. Ha igen, fűzzük be az átlót e jobb oldali végpontja és $helper(e)$ között.
 - Ennek ugyanaz a hatása mint a „hátrafele plane sweep“-nek.



P felbontása x -monoton sokszögekre – plane sweep

Helyesség:

- Az új sokszögekben nyilvánvalóan nincs se split- se merge-csúcs.
- Azt kell még megmutatni, hogy nem fűzünk be olyan átlót, amely P valamelyik élét vagy egy másik átlót metsz.
- Egyszerűség végett tegyük fel, hogy nincs két egyenlő x -koordinátájú csúcs (a kiterjesztés az általános esetre egyszerű: a lexikografikus sorrend segítségével). Legyen wv egy átló, amit akkor fűztünk be, amikor egy split-csúcsot elértünk. A Q tartomány a T -ben v -hez szomszédos élek és a függőleges szakaszok között w -n és v -n keresztül nem tartalmaz csúcsot a $helper()$ definíciója miatt. Ezért a wv átló nem metszhet se másik átlót se P -nek egy élét.
- A merge-csúcsoknál befűzött átlókra hasonló érvek ismételhetők.



P felbontása x -monoton sokszögekre – plane sweep

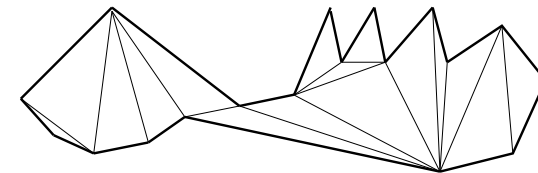
Futási idő és tárigény:

- Minden esemény (csúcs) feldolgozása $O(\log n)$ időt igényel.
- Összesen: $O(n \log n)$ idő. Tárigény $O(n)$.

Lemma 5: Egy egyszerű sokszög felbontható x -monoton sokszögekre $O(n \log n)$ idő alatt $O(n)$ tárigénnyel. \square

Monoton sokszögek háromszögelése

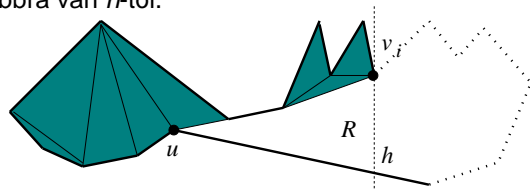
- Legyen P egy x -monoton sokszög.
- Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy P nem tartalmaz egyenlő x -koordinátájú csúcsokat.
- Egy plane sweep-et hajtunk végre balról jobbra. Ennek során P -be átlókat fűzünk be, amikor csak lehetséges.



Monoton sokszögek háromszögelése

Invariáns: Legyen v_i , $i \geq 2$, az a csúcs P -ben, amelyet a h sweep line éppen elért. Legyen R a nem-háromszögelt tartomány P -ben h -tól balra. Legyen u a legbaloldali csúcs R -ben. Ekkor

- R -t két x -monoton lánc határolja, a felső lánc és az alsó lánc. Mindkét lánc legalább egy élt tartalmaz.
- Ha a lánc v_i -től u -hoz több mint egy élt tartalmaz, akkor ez a lánc egy u.n. **reflex-lánc**, azaz a lánc minden belső csúcsánál a belső szög legalább π .
- A másik lánc csak egy élt tartalmaz, melynek bal végpontja u és jobb végpontja jobbra van h -tól.

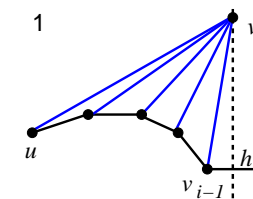


Monoton sokszögek háromszögelése

$i=2$: az invariáns $u=v_1$ -gyel teljesül. A v_2v_1 lánc csak egy élt tartalmaz, a másik lánc pedig abból a másik élből áll, amely v_1 -hez incidens.

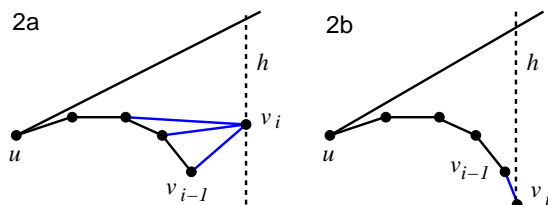
$i \geq 2$: Tegyük fel, hogy az invariáns teljesül v_{i-1} -re. Az algoritmusnak a következő eseteket kell kezelni:

- **1. eset:** u, \dots, v_{i-1} egy reflex-láncot alkot és v_i a másik láncon van. Ekkor fűzzük be egy átlót v_i -től a reflex-lánc minden csúcsához u -ig (exkluzív u). Ezután legyen $u := v_{i-1}$. Most a reflex-lánc egyetlenegy élt tartalmaz $v_i u$ -t.



Monoton sokszögek háromszögelése

- **2. eset:** v_i ugyanazon a láncon van mint v_{i-1} . Ekkor menjünk a láncon v_i -től hátrafele és fűzzük be minden látható csúcsához egy átlót, amíg el nem érjük az első csúcsot, ami v_i -ből már nem látható. (Lehetséges, hogy egy átlót se fűzzük be. (2b. Eset).) Ezután a v_i -ből látató csúcsokat töröljük a láncból. Ekkor az új lánc v_i -től u -ig egy reflex-lánc.



Monoton sokszögek háromszögelése

Implementálás:

- A reflex-lánc csúcsai egy veremben tárolhatók.
- Egy flag adja meg, hogy a verem a felső vagy az alsó láncot tárolja.
- Tegyük fel, hogy minden csúcsához tudjuk, hogy az alsó vagy a felső láncon van.

Elemzés:

- Ha P csúcsai sorba vannak rendezve balról jobbra, akkor a Δ -eléshez $O(n)$ idő szükséges.
- P csúcsainak balról jobbra rendezet sorrendje $O(n)$ idő alatt kiszámolható a csúcsok óramutatóval ellentétes sorrendjéből.
- A Δ -elés során összesen $O(n)$ pop-, push-operációt iránytesztet (v_j a láncon pontosan akkor látható v_i -ből, $j+1 < i$, ha $\angle v_i v_{j+1} v_j < \pi$) hajtunk végre, $O(1)$ idő alatt operációként.
- Az adatstruktúrák tárigenye $O(n)$.

Sokszögek háromszögelése – múgaléria probléma

Lemma 6: Legyen P egy x -monoton sokszög n csúccsal. Akkor P egy háromszögelése $O(n)$ idő alatt $O(n)$ tárigénnyel kiszámítható. \square

Tétel 2: Legyen P egy egyszerű sokszög n csúccsal. Akkor P egy háromszögelése $O(n \log n)$ idő alatt $O(n)$ tárigénnyel kiszámítható. \square

Következmény: Legyen P egy egyszerű sokszög n csúccsal. Akkor a $\lfloor n/3 \rfloor$ ör elhelyezése, amelyek P -t megfigyelik, $O(n \log n)$ idő alatt $O(n)$ tárigénnyel kiszámítható. \square

Irodalom

[1]: Joseph O'Rourke: **Art Galery Theorems and Algorithms**. Oxford University Press, 1987.

[2]: Mark de Berg, Marc van Kreveld, Mark Overmars, and Otfried Schwarzkopf: **Computational Geometry, Algorithms and Applications**. Springer-Verlag, 1997.