Hálózati Algoritmusok

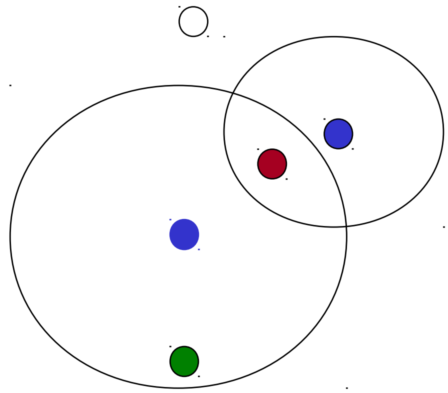
2015

Topológia felügyelet és „trade-off”-ok

F. Meyer auf der Heide, C. Schindelhauer K. Volbert, M. Grünewald:
Energy, Congestion and Dilation in Radio Networks. In: Theory of Computing Systems 37(3), 343-370, 2004.

Egy egyszerű fizikai hálózat modell

- Homogén hálózat, amely
  - n vezeték nélküli állomásból $s_1,..,s_n$ áll a síkon elhelyezve
- Vezeték nélküli átvitel
  - Egy frekvencia (csatorna)
  - Állítható átviteli hatótávolság
    - Max. hatótávolság > max. távolság az állomások között
    - A küldő hatótávolsági területén belül: tiszta jel vagy rádió interferencia
    - Kívül: nincs jel
  - A csomagok egységnyi méretűek

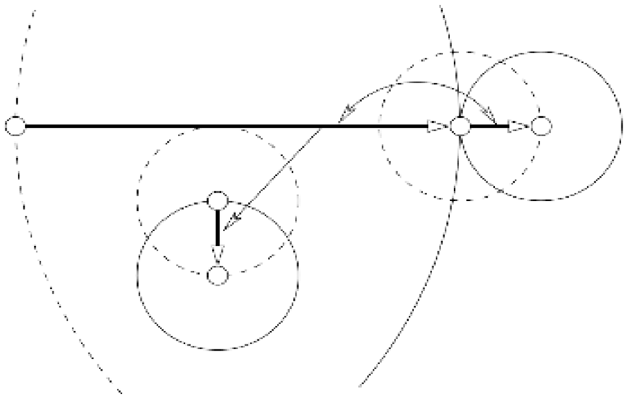


A Routing Probléma

- Adott:
  - n pont a síkon, $V=(v_1,..,v_n)$
    - melyek a mobil ad hoc hálózat (MANET) csomópontjait reprezentálják
  - a teljes irányítatlan gráf G = (V,E), mint lehetséges kommunikációs hálózat
    - ami olyan MANET-et reprezentál, ahol minden kapcsolat létrehozható
  - Routing probléma (multi-commodity flow):
  - $f : V \times V \rightarrow$ **N**, ahol f(u,v) csomagot kell küldeni u-tól v-hez, minden $u,v \in V$
  - Keressünk egy utat minden csomagnak a teljes gráfban
- Az útrendszerek unióját link hálózatnak vagy kommunikációs hálózatnak hívjuk

Az Interferencia formális definíciója

- Legyen $D_r(u)$ az a körlap a síkon, melynek középpontja u és a sugara
- Minden e={u,v} élhez $D(e) = D_r(u) \cup D_r(v)$



- Azon élek halmaza, melyek interferálnak az e = {u,v} éllel az N kommunikációs hálózatban:

$$\text{Int}(e) := \{e' \in E(N) \setminus \{e\} \mid u \in D(e') \text{ or } v \in D(e')\}$$

- Az e él interferencia száma a vele interferáló élek száma |Int(e)|
- Az N hálózat interferencia száma max{ |Int(e)} | $e \in$ E }

A Congestion formális definíciója

- Egy e élen a congestion:

$$C_{\mathcal{P}}(e) := \ell(e) + \sum_{e' \in \mathrm{Int}(e)} \ell(e')$$

ahol l(e) az e élen áthaladó utak (csomagok) száma

- Egy P útrendszeren a congestion:

$$C_{\mathcal{P}}(V) := \max_{e \in E_{\mathcal{P}}} \{C_{\mathcal{P}}(e)\}$$

- Egy P útrendszer átmérője (dilation) a leghosszabb út hossza (éleinek száma)

Energia

- Egy átvitelhez szükséges energia modellezhető a küldő és a fogadó közötti távolság hatványával
- Két energia modell:
  - **Egység energia model:** csak az energiát méri, ami egy él fenntartásához szükséges egy időegységre
    - Ötlet: az üzeneteket aggregálhatjuk és egy csomagban küldhetjük

$$\text{U-Energy}_{\mathcal{P}}(V) := \sum_{e \in E_{\mathcal{P}}(N)} |e|^2$$

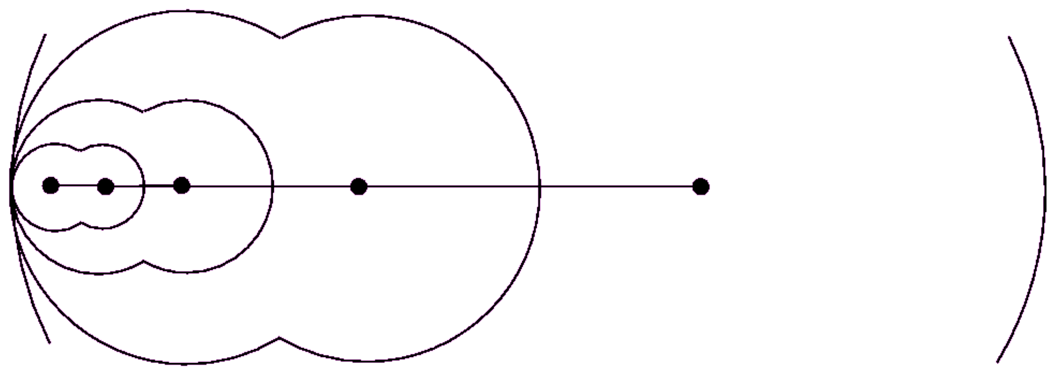
  - **Folyam energia model:** minden csomagot külön számolunk

$$\text{F-Energy}_{\mathcal{P}}(V) := \sum_{e \in E_{\mathcal{P}}(N)} \ell(e)|e|^2$$

Energia minimalizálása

- **Tétel:** Az egység energia modellben a minimális feszítőfában definiált egyértelmű utak egy optimális útrendszert eredményeznek egy vezeték nélküli ad hoc hálózatban N=(V,E), $V \subset \mathbf{R}^d$.
- **Tétel:** A folyam energia modellben egy adott V csomóponthalmazra és f routing problémára (multicommodity folyam problémára) a Gabriel gráfban a legrövidebb utak azon u és v csomópontpárok között, melyekre f(u,v)\neq 0, egy optimális útrendszert eredményeznek.

Worst-case konstrukció congestion-hoz



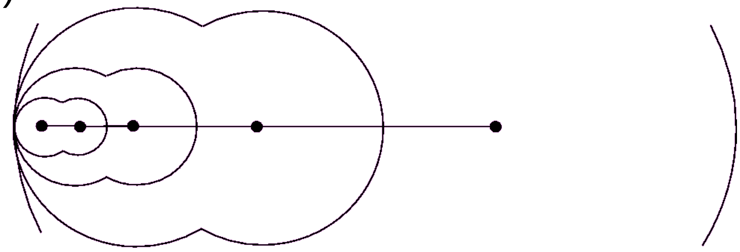
Az interferencia szám n csomópont esetén: n-2

Egy mérték, ami a csomópontok pozícióinak sokféleségét és „szépségét” méri

- Egy G=(V,E) hálózatban a diverzitás (sokféleség):

$$g(V) := \left|\{m \mid \exists u,v \in V : \lfloor \log |u,v| \rfloor = m\}\right|$$

- A diverzitás tulajdonságai:
  - $g(V)=\Omega(\log n)$
  - $g(V)=O(n)$



Congestion, Energia és Átmérő

Congestion

Csomagok maximális száma, melyek interferálnak egy élen

$$C_{\mathcal{P}}(V) := \max_{e \in E_{\mathcal{P}}} \left\{ \ell(e) + \sum_{e' \in \mathrm{Int}(e)} \ell(e') \right\} .$$

Energia

Minden úton felhasznált energia összege

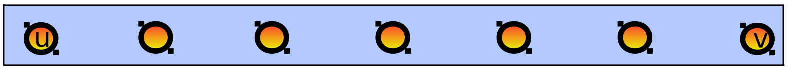
$$\mathrm{Energy}_{\mathcal{P}}(V) := \sum_{e \in E_{\mathcal{P}}(N)} \ell(e)|e|^2 .$$

Átmérő

A hop-ok maximális száma két csomópont között

Energia versus Átmérő

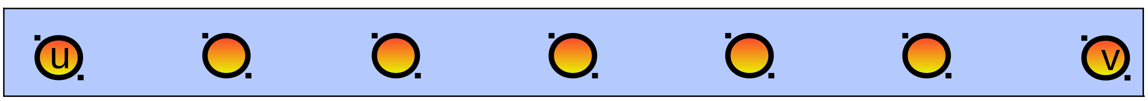
- Lehet-e az energiát és az átmérőt egyidőben optimalizálni?
- Szcenárió:



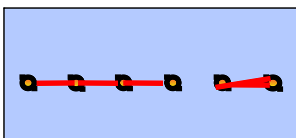
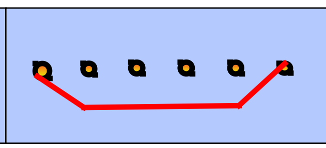
  - n+1 csomópont $u_0, \ldots, u_n$ egy egyenesen ekvidisztáns elhelyezve 0,d/n, 2d/n,...,d koordinátákkal
  - Szüséglet: W csomag u_0-tól u_n-hez
- **Energia-optimális útrendszer:**
  - Küldjünk minden csomagot az $u_0, \ldots, u_n$ úton
  - átmérő: n
  - $\text{Unit-Energy} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{n}\right)^2 = \frac{d^2}{n}$
  - $\text{Flow-Energy} = \sum_{i=1}^{n} W \left(\frac{d}{n}\right)^2 = \frac{d^2 W}{n}$
- **Átmérő-optimális útrendszer:**
  - Küldjünk minden csomagot az u_0, u_n úton
  - átmérő: 1
  - $\text{Unit-Energy} = d^2$
  - $\text{Flow-Energy} = d^2 W$
- **Tétel:** Ebben a szcenárióban: $\textit{Unit-Energy} \times \textit{Dilation} \geq d^2$

  $\textit{Flow-Energy} \times \textit{Dilation} \geq W d^2$

Trade-off Energia és Átmérő között



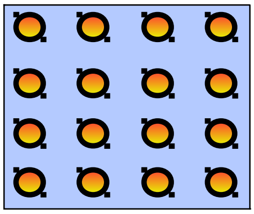
Szükséglet: W csomag u-tól v-hez

		
Energia E	$\frac{d^2W}{n}$	d^2W
Átmérő D	n	1

Bármely hálózat

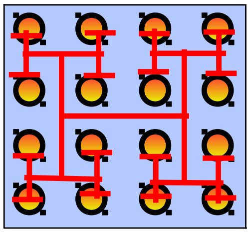
$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \Omega(\mathbf{d}^2\mathbf{W})$$

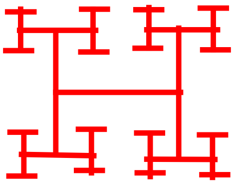
Congestion versus Átmérő



- Lehetséges-e egyidőben optimalizálni a congestiont és az átmérőt?
- Szcenárió:
  - Egy $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ rács n csomóponttal
  - Szükséglet: W/n^2 csomag minden csomópontpár között
- Átmérő-optimális útrendszer
  - Küldjünk minden csomagot direkt a küldőtől a célhoz
  - Átmérő: 1
  - Congestion: $\Theta(W)$
    - Ha a távolság a küldőtől a célig legalább (3/4) $n^{1/2}$, akkor a kommunikációs körlap lefedi a rács konstans hányadát
    - Így a W csomag egy konstans hányadában mindegyik csomag mindegyikkel interferál
- Jó útrendszer a congestion szempontjából
  - Küldjünk minden csomagot a legrövidebb úton egységnyi lépésekben
    - először vízszintesen aztán függőlegesen
  - Congestion: $O(W/\sqrt{n})$
    - Minden vízszintes szakaszon legfeljebb $O(W/\sqrt{n})$ csomag interferálhat egymással
    - A vizszintes élek hatása a függőlegesekre legfeljebb 2-szeresére növeli a congestiont
  - Átmérő: $\sqrt{n}$

Congestion versus Átmérő





- Lehet-e optimalizálni a congestiont és az átmérőt egyidőben?
- Szcenárió:
  - Egy $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ rács n csomóponttal
  - Szükséglet: W/n^2 csomag minden csomópontpár között
- Jó útrendszer átmérő szempontjából
  - Építsünk egy H-formájú feszítőfát O(log n) átmérővel
  - Átmérő: O(log n)
  - Congestion: Θ(W (log n))
- **Tétel:**
  - Ebben a szcenárióban minden útrendszerre:

$$\text{Congestion} \times \text{Dilation} = \Omega(W)$$

- Bizonyítási stratégia:
  - Függőlegesen vágjuk szét a négyzetet 3 egyforma téglalapra
  - Csak forgalom 1/9 –ét figyeljük, ami a baloldali téglalapból a jobboldali téglalapba megy
  - Definiáljuk a kommunikációs terhelést egy területre
  - Bizonyítsuk be, hogy a kommunikációs terhelés alsó korlát a congestion-ra
  - Minimalizáljuk a kommunikációs terhelést egy adott átmérőre a két téglalap között

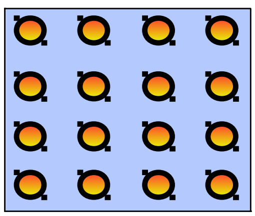
Trade-Off az Átmérő és a Congestion között

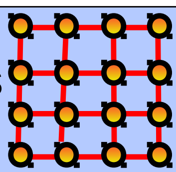
- **Tétel:** Adott egy rács G_n n csomóponttal a d-dimenziód Euklídeszi térben és W forgalom. Ekkor minden P útrendszerre a következő trade-off létezik az átmérő $D_P(G_n)$ és a congestion $C_P(G_n)$ között:

$$C_P(G_n)\,(D_P(G_n))^{d-1} = \Omega(W).$$

Trade-Off az Átmérő és a Congestion között

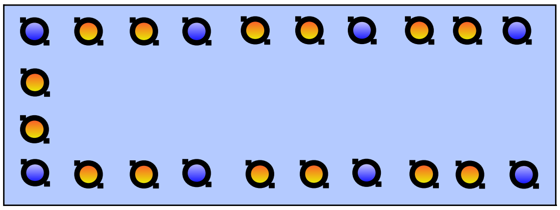
- n csomópontból álló rács
- Minden csomópontpár között W/n^2 csomag szükséglet



	Rács 	Direkt	bármilyen hálózatban
Átmérő	$\sqrt{n}$	1	$C \cdot D = \Omega(W)$
Congestion	$\frac{W}{\sqrt{n}}$	W	

Congestion versus Energia

- Lehet-e optimalizálni a congestion-t és az energiát ugyanabban az időben?
- Szcenárió:
  - A csomópont halmaz $U_{\alpha,n}$, $\alpha \in [0,0.5]$ két párhuzamos vízszintes vonalon n^{α} kék csomópontot tartalmaz
  - Szomszédos kék csomópontok (és a szemben lévők) távolsága Δ/n^{α}
- A szemben lévő kék csomópont párok között a szükséglet W/n^{α}
- Ezen kívül n csomópont ekvidisztánsan helyezkedik el a kék csomópontok között úgy hogy két szomszédos csomópont között a távolság Δ/n
- Congestion-optimális útrendszer:
  - Egy-hop kommunikáció a kék csomópontok között: Congestion: $O(W/n^{\alpha})$
  - Unit-Energy: $\Omega(\Delta^2 n^{-\alpha})$
  - Flow-Energy: $\Omega(W \Delta^2 n^{-\alpha})$



- Energia-optimális útrendszer:
  - U-alakú utak
  - Unit-Energy: $O(\Delta^2 n^{-1})$
  - Flow-Energy: $O(\Delta^2 n^{-1} W)$
  - Congestion: $\Omega(W)$
- Válasszuk: $\alpha=1/3$

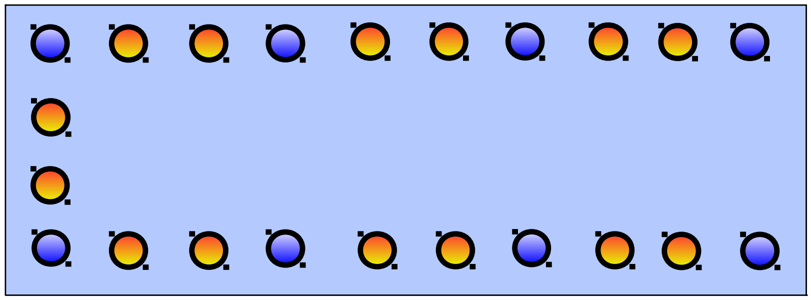
Energia és Congestion inkompatibilisek

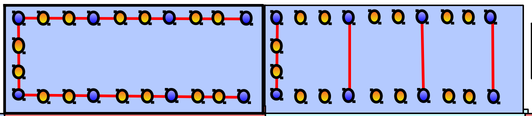
- **Tétel:** Létezik olyan V csomóponthalmaz egy úthalmazzal, ami minimalizálja a congestiont C*-ra es egy másik útrendszerrel, amely az egység-energiát minimalizálja U-Energy*-ra és a folyam-energiát F-Energy*-ra. Ezen a V csomóponthalmazon minden P útrendszerre:
  - $C_P(V) = \Omega(n^{1/3}C^*)$ vagy
  - $\text{U-Energy}_P(V) = \Omega(n^{1/3}\ \text{U-Energy}^*)$,

  - $C_P(V) = \Omega(n^{1/3}C^*)$ vagy
  - $\text{F-Energy}_P(V) = \Omega(n^{1/3}\ \text{F-Energy}^*)$.

Energia és Congestion nem kompatibilisek

- $n^{1/3}$ kék csomópont
- Egy csomag szükséglet minden függőlegesen szemben lévő kék csomópontpár között





			Bármely hálózat	
Congestion	***$n^{1/3}$***	**$C^* = O(1)$**	**$C \geq \Omega(n^{1/3}C^*)$**	*vagy*
Energia	**$E^*=O(1/n)$**	**$O(1/n^{2/3})$**	*vagy*	**$E \geq \Omega(n^{1/3}E^*)$**