Számítási modellek

6: Probabilisztikus automata, verem automata,
környezetfüggetlen nyelvek

Probabilisztikus automata

- Legyen $S=\{s_1, . . . ,s_n\}$ a **probabilisztikus automata** *PA* állapotainak a halmaza. Egy x input szimbólumot olvasva s állapotban *PA* az s_i állapotba megy $p_i(s,x)$ valószínűséggel, ahol minden s-re *és* x-re:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(s,x) = 1; \quad p_i(s,x) \geq 0, i = 1, ..., n.$$

- Kezdőállapot helyett: **kezdőállapotok eloszlása**, azaz minden állapot kezdőállapot egy rögzített valószínűséggel.
- Az **elfogadott nyelv** $L(PA, S_f, \eta)$ függ a
  - **végállapotok** S_f **halmazá**tól és a
  - **vágási pont**tól η, $0 \leq \eta < 1$.
- Az **elfogadott nyelv** $L(PA, S_f, \eta)$ azon szavak halmaza, amelyekkel *PA* valamely S_f-beli állapotba jut η-nál nagyobb valószínűséggel.

Probabilisztikus automata

- Egy ***n*-dimenziós sztochasztikus mátrix** $(p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ egy n x n négyzetes mátrix, amelyre

$$1.) \quad p_{ij} \geq 0 \quad (1 \leq i, j \leq n),$$
$$2.) \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \quad (1 \leq i \leq n).$$

- Egy ***n*-dimenziós sztochasztikus sor vektor (oszlop vektor)** egy n-dimenziós sor vektor (oszlop vektor) melyek elemei nemnegatívok és összegük 1.
- Ha egy sztochasztikus sor vektornak csak egy eleme 1, akkor azt **koordináta vektor**nak nevezzük.
- Az n-dimenziós egység mátrix E_n egy sztochasztikus mátrix.

Probabilisztikus automata

- Egy **véges probabilisztikus automata** egy V ábécé felett egy hármas $PA = (S, s_0, M)$, ahol
  - $S = \{s_1 , . . . , s_n\}$ állapotok egy véges, nem üres halmaza,
  - s_0 egy n-dimenziós sztochasztikus sorvektor, az **állapotok kezdőeloszlása**,
  - M egy leképezés, amely V-t képezi le az n-dimenziós sztochasztikus mátrixok egy halmazára.
  - $x \in V$-re az $M(x)$ mátrix (i,j)-dik eleme $p_j(s_i,x)$, ami PA átmenet-valószínűsége, miután x szimbólum hatására PA az s_i állapotból az s_j állapotba lépett.

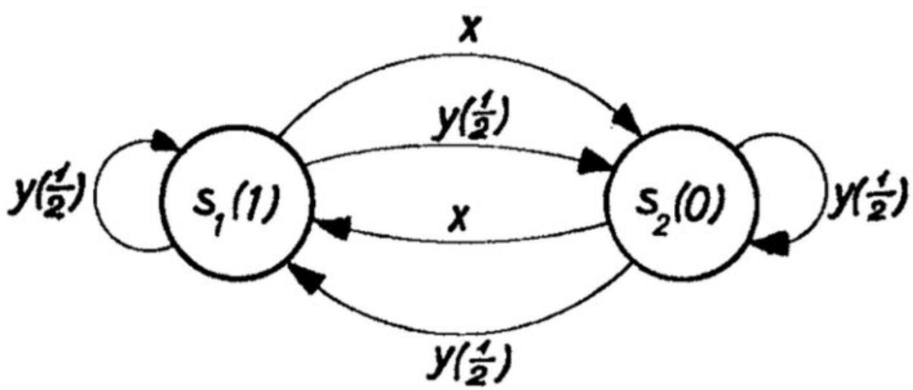
Probabilisztikus automata

- Példa: Legyen PA = ({s_1, s_2}, (1,0), M) az {x,y} ábécé felett, ahol

$$M(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M(y) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- A kezdőeloszás azt mutatja, hogy s_1 a kezdőállapot.

- Az állapotátmenet diagramm:



Probabilisztikus automata

- Legyen $PA = (S, s_0, M)$ egy V ábécé feletti véges probabilisztikus automata. Az M függvény V-ről a következőképpen terjeszthető ki V^*-ra:
- $\hat{M}(\varepsilon) := E_n$
- $\hat{M}(x_1 \ldots x_n) := M(x_1)M(x_2)\ldots M(x_n)$, ahol $n \geq 2$, $x_i \in V$.
- $\hat{M}$ helyett a továbbiakban M-t írunk.
- Valamely $w \in V^*$ szóra, az $M(w)$ mátrix (i,j)-dik elemét $p_j(s_i, w)$ jelöli, amely annak a valószínűsége, hogy PA a w inputszó feldolgozásával az s_i állapotból az s_j állapotba lépett.

Probabilisztikus automata

- Legyen $PA = (S, s_0, M)$ egy véges probabilisztikus automata V ábécé felett és $w \in V^*$. A $s_0M(w)$ sztochasztikus sorvektor a ***w* eredményeként kapott állapoteloszlás**, melyet $PA(w)$-vel jelölünk.
- Megjegyzés: $PA(\varepsilon) = s_0$.

Probabilisztikus automata

- Legyen $PA = (S, s_0, M)$ egy V ábécé feletti véges probabilisztikus automata, $0 \leq \eta < 1$, és $\bar{s}_f$ egy n-dimenziós oszlopvektor, amelynek minden eleme vagy 0, vagy 1 ($\bar{s}_f$ **tagsági funkció**ként értelmezhető az $S_f \subseteq S$ végállapot halmazhoz).
- A ***PA* által *η* vágási ponttal elfogadott nyelv**: $L(PA, \bar{s}_f, \eta) = \{\ w \in V^* \mid\ s_0 M(w) \bar{s}_f > \eta \}$.

- Egy L nyelvet ***η*-sztochasztikus**nak nevezünk, ha $\exists$ probabilisztikus véges automata $PA = (S, s_0, M)$ és oszlopvektor $\bar{s}_f$, amelyre $L = L(PA, \bar{s}_f, \eta)$ teljesül.
- Egy L nyelv **sztochasztikus**, ha η-sztochasztikus valamely $0 \leq \eta < 1$-re.

Probabilisztikus automata

- Példa: Legyen $PA = (\{s_1, s_2\}, (1,0), M)$ az $\{x,y\}$ ábécé felett, ahol

$$M(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M(y) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- Ekkor
  - $PA(x^n) = (1, 0)M(x^n) = (1, 0)$ ha n páros,
  - $PA(x^n) = (0, 1)$, ha n páratlan, és
  - $PA(w) = (1/2, 1/2)$ ha w tartalmaz legalább egy y-t.
- Így $\overline{s}_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ esetén

$$L(PA, \overline{s}_f, \eta) = \begin{cases} V^* - (xx)^* & \text{if } 0 \leq \eta < 1/2, \\ x(xx)^* & \text{if } 1/2 \leq \eta < 1. \end{cases}$$

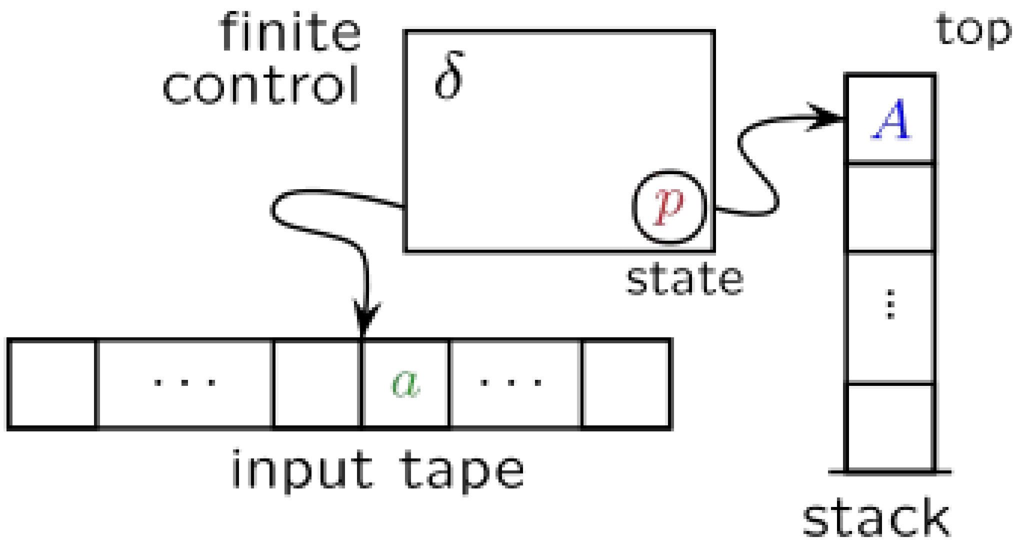
- Tehát $V^* - (xx)^*$ pl. 1/3-sztochasztikus nyelv,
  $x(xx)^*$ pedig pl. 2/3-sztochasztikus nyelv.
  Így mindkettő sztochasztikus nyelv.

Reguláris és (η-)sztochasztikus nyelvek

- **Tétel 1** [Rabin 1963]: Minden reguláris nyelv sztochasztikus, de nem minden sztochasztikus nyelv reguláris.
- **Tétel 2** [Rabin 1963]: Minden 0-sztochasztikus nyelv reguláris.

Veremautomata

- A veremautomata a véges automata általánosítása potenciálisan végtelen veremmel és véges kontrollal.
- Az új adat a verem tetejéhez adódik,
  kivétele fordított sorrendben történik.
- A verem
  “last in, first out”
  (LIFO) adatszerkezet.



Veremautomata

- Egy **veremautomata** egy 7-es
  $A = (Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F)$, ahol
  - Z a **veremszimbólumok** véges halmaza (veremábécé),
  - Q az **állapotok** véges halmaza,
  - T az **inputszimbólumok** véges halmaza (inputábécé),
  - $\delta : Z \times Q \times (T \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow P(Z^* \times Q)$ az **átmenet függvény**,
    - ahol $P(X)$ az X véges részhalmazainak a halmaza.
      példa: $\delta(z,q,a) = \{(z',q'), (z'',q'')\}$
    - alapértelmezetten **nemdeterminisztikus**.
  - $z_0 \in Z$ a **kezdeti veremszimbólum** (kezdő veremszimbólum),
  - $q_0 \in Q$ a **kezdeti állapot** (kezdőállapot),
  - $F \subseteq Q$ az **elfogadó állapotok** vagy **végállapotok** halmaza.

Veremautomata

- A verem tetején lévő szimbólum, az aktuális állapot és az inputszimbólum együttesen határozzák meg a következő átmenetet.
- Minden lépésben kiveszünk egy elemet a verem tetejéről (**pop**) és beteszünk helyette néhányat (0, 1, 2, . . . szimbólumot) (**push**).
- Ha $\delta(z, q, \varepsilon)$ nem üres, akkor ún. **ε-átmenet** hajtható végre, ami lehetővé teszi, hogy a veremautomata anélkül változtassa meg az állapotát, hogy valamilyen szimbólumot olvas az inputszalagról.
- ε-átmenet lehetséges már az első inputszimbólum olvasása előtt is és az utolsó inputszimbólum olvasása után is.

Veremautomata

- A veremautomata **konfiguráció**ja egy zqw alakú szó, ahol
  - $z \in Z^*$ a verem aktuális tartalma,
  - $q \in Q$ az aktuális állapot,
  - $w \in T^*$ az input még feldolgozatlan része.

- z első betűje van a verem alján, az utolsó betűje a verem tetején.
- Az olvasófej w első betűjén áll.
- q bal oldalán lévő szimbólum van a verem tetején,
  q jobb oldalán lévő szimbólum az input következő feldolgozandó betűje.

- Az $A=(Z,Q,T,\delta,z_0,q_0,F)$ veremautomata $w \in T^*$ bemenethez tartozó **kezdőkonfiguráció**ja z_0q_0w.

Veremautomata – operációk

- Legyen $t \in T \cup \{\varepsilon\}$, $q,r \in Q$ és $z \in Z$
  - $(\varepsilon, r) \in \delta(z, q, t)$: a z elemet kivehetjük a veremből (**pop**)
  - $(z, r) \in \delta(z, q, t)$: a verem tartalma változatlan maradhat
  - $(z', r) \in \delta(z, q, t)$: z-t kicserélhetjük z'-vel a verem tetején
  - $(zz', r) \in \delta(z, q, t)$: z'-t a verem tetejére (z-re rá) tehetjük (**push**)
  - Egyéb lehetőségek:
    - $(zz'z'', r) \in \delta(z, q, t)$: $z'z''$-t a verem tetejére tehetjük ($z'', z' \in Z$), z'' lesz a tetején.
    - Általánosan $(w, r) \in \delta(z, q, t)$, ahol $w \in Z^*$ egy Z feletti szó. A w szó kerül z helyére és w utolsó betűje lesz a verem tetején.

Veremautomata – redukció

- Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja egy lépésben**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A \beta$ -val jelölünk, ha
  $\exists\, z \in Z$, $q,p \in Q$, $a \in T \cup \{\varepsilon\}$, $x,y \in Z^*$, és $w \in T^*$, hogy
  $(y,p) \in \delta(z,q,a)$ and $\alpha = x\boldsymbol{zqa}w$ and $\beta = x\boldsymbol{yp}w$.

- Példák:
  - ha $\delta(c,q_1,a) = \{(dd, q_2), (\varepsilon, q_4)\}$ és $z_0cddcq_1ababba$ egy konfiguráció, akkor
    - $z_0cdd\boldsymbol{cq_1a}babba \Rightarrow_A z_0cdd\boldsymbol{ddq_2}babba$ és
    - $z_0cdd\boldsymbol{cq_1a}babba \Rightarrow_A z_0cdd\boldsymbol{q_4}babba$ is teljesül.
  - ha $\delta(c, q_3, \varepsilon) = \{(dd, q_2)\}$ és $z_0cddcq_3ababba$ egy konfiguráció, akkor
    - $z_0cdd\boldsymbol{cq_3}ababba \Rightarrow_A z_0cdd\boldsymbol{ddq_2}ababba$
  - ha $\delta(c, q_5, \varepsilon) = \emptyset$ és $\delta(c, q_5, a) = \emptyset$, akkor
    - $\nexists\, C$ konfiguráció, melyre $z_0ccq_5aab \Rightarrow_A C$.

Veremautomata – redukció

- Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja**, amelyet $\alpha \Rightarrow^*_A \beta$-val jelölünk, ha vagy
  - $\alpha = \beta$, vagy
  - $\exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ szavakból álló véges sorozat, hogy $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \alpha_n$ és $\alpha_i \Rightarrow_A \alpha_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$.

- A $\Rightarrow^*_A \subseteq Z^*QT^* \times Z^*QT^*$ reláció a $\Rightarrow_A$ reláció reflexív, tranzitív lezártja.

- Példa:
  - Ha $\delta(d, q_6, b) = \{(\varepsilon, q_5)\}$ és $\delta(d, q_5, \varepsilon) = \{(dd, q_2), (\varepsilon, q_4)\}$, akkor
    - $\#cddq_6bab \Rightarrow_A \#cdq_5ab \Rightarrow_A \#cddq_2ab$ és
    - $\#cddq_6bab \Rightarrow_A \#cdq_5ab \Rightarrow_A \#cq_4ab$.
    - Tehát, $\#cddq_6bab \Rightarrow^*_A \#cddq_2ab$ és $\#cddq_6bab \Rightarrow^*_A \#cq_4ab$.

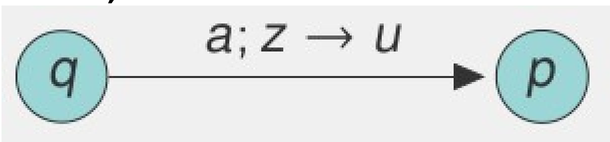
Veremautomata – elfogadott nyelv

- Az A veremautomata által **elfogadó állapottal** (végállapottal) **elfogadott nyelv**:

  $L(A) = \{w \in T^* \mid z_0 q_0 w \Rightarrow^*_A xp$, ahol $x \in Z^*, p \in F\}$.

Veremautomata

Egy A veremautomata alternatív megadható

- Átírási szabályokkal
  - Az így nyert szabályhalmazt M_δ -val jelöljük. Ezzel az alternatív jelöléssel:
    - $zqa \to up \in M_\delta \iff (u, p) \in \delta(z, q, a)$,
    - $zq \to up \in M_\delta \iff (u, p) \in \delta(z, q, \varepsilon)$.
    - $(p, q \in Q\ , a \in T\ , z \in Z\ , u \in Z^*)$
- Átmenet-diagrammal
  - $p, q \in Q, a \in T \cup \{\varepsilon\}, z \in Z, u \in Z^*$ esetén: $(u, p) \in \delta(z, q, a) \iff$ 

  - A végállapotokat duplán karikázzuk
  - A kezdőállapotot $\to$ jelöli.

Determinisztikus veremautomata

- Az $A = (Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F)$ veremautomata **determinisztikus**, ha minden $(z, q, a) \in Z \times Q \times T$ esetén $|\delta(z, q, a)| + |\delta(z, q, \varepsilon)| = 1$.

- Tehát minden $q \in Q$ és $z \in Z$ esetén
  - vagy $\delta(z, q, a)$ pontosan egy elemet tartalmaz minden $a \in T$ inputszimbólumra és $\delta(z, q, \varepsilon) = \emptyset$,
  - vagy $\delta(z, q, \varepsilon)$ pontosan egy elemet tartalmaz és $\delta(z, q, a) = \emptyset$ minden $a \in T$ inputszimbólumra.

- Megjegyzés: Ha minden $(z, q, a) \in Z \times Q \times T$ esetén $|\delta(z, q, a)| + |\delta(z, q, \varepsilon)| \leq 1$ akkor a veremautomata a felismert nyelv változása nélkül kiegészíthető determinisztikus veremautomatává. Így tágabb értelemben az ezt a feltételt teljesítő veremautomatákat is tekinthetjük determinisztikus veremautomatának.

Determinisztikus, nemdeterminisztikus veremautomata

- A determinisztikus veremautomata **elfogadó (felismerési) ereje** kisebb mint a nemdeterminisztikus veremautomatáé.

- Példa: Legyen
  - $L_1 = \{wcw^{-1} \mid w \in \{a,b\}^*\}$,
  - $L_2 = \{ww^{-1} \mid w \in \{a,b\}^*\}$.
  - L_1 nyelvet el lehet fogadni determinisztikus veremautomatával, de L_2 nyelvet nem.
  - L_1 és L_2 elfogadtatható nemdeterminisztikus veremautomatával.

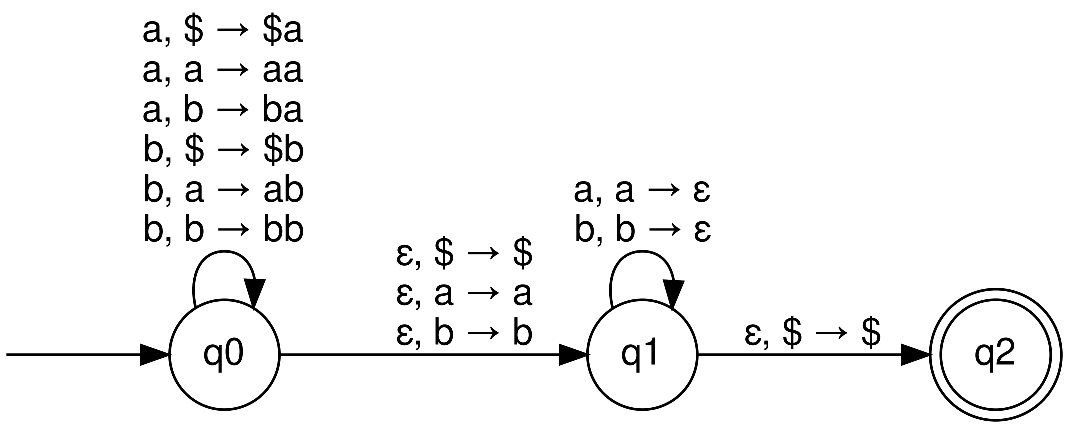
Nemdeterminisztikus veremautomata

- Példa: $L_2 = \{ww^{-1} \mid w \in \{a,b\}^*\}$ elfogadása nemdeterminisztikusan.
  - Ötlet:
    - 1. olvassunk egy inputszimbólumot és tegyük a veremre (push);
      nemdeterminisztikusan vagy ismételjük 1.-t
      vagy menjünk 2-re.
    - 2. olvassuk az inputszimbólumokat és vegyük ki a verem tetején
      lévő szimbólumot (pop) és hasonlítsuk össze
      ha nem egyenlők, utasítsuk el.
    - 3. menjünk elfogadó állapotba, ha a verem üres.

  - Nemdeterminisztikus veremautomata:
    $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{\$, a, b\}, \delta, q_0, \$, \{q_2\})$, ahol:
    - $(zt, q_0) \in \delta(z, q_0, t), \quad \forall\, t \in \{a, b\}, z \in \{\$, a, b\}$
    - $(z, q_1) \in \delta(z, q_0, \varepsilon), \quad \forall\, z \in \{\$, a, b\}$
    - $(\varepsilon, q_1) \in \delta(t, q_1, t), \quad \forall\, t \in \{a, b\}$
    - $(\$, q_2) \in \delta(\$, q_1, \varepsilon)$

Nemdeterminisztikus veremautomata

- Példa: $L_2 = \{ww^{-1} \mid w \in \{a,b\}^*\}$ elfogadása nemdeterminisztikusan.
  - Ötlet:
    - 1. olvassunk egy inputszimbólumot és tegyük a veremre (push);
      nemdeterminisztikusan vagy ismételjük 1.-t
      vagy menjünk 2-re.
    - 2. olvassuk az inputszimbólumokat és vegyük ki a verem tetején
      lévő szimbólumot (pop) és hasonlítsuk össze
      ha nem egyenlők, utasítsuk el.
    - 3. menjünk elfogadó állapotba, ha a verem üres.



Veremautomata

- Az $N(A)$ nyelvet az A veremautomata **üres veremmel fogadja el**, ha

  $N(A) = \{w \in T^* \mid z_0 q_0 w \Rightarrow^*_A p$, where $p \in Q\}$.

- Példa: Legyen $A = (\{\$, a\}\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \delta, \$, q_0, \{\ \})$, M_δ:
  - $\$q_0 a \rightarrow \$a q_0$
  - $a q_0 a \rightarrow a a q_0$
  - $a q_0 b \rightarrow q_1$
  - $a q_1 b \rightarrow q_1$
  - $\$q_1 \rightarrow q_1$.

  Ekkor $N(A) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$.

Veremautomata

- Megjegyzés: Ha a verem üres, akkor az automata működése blokkolódik, mivel nincs átmenet definiálva az üres verem esetére. (Ezért van szükségünk a z_0 szimbólumra a kezdeti konfigurációban. Az elfogadó állapotok halmaza irreleváns $N(A)$ szempontjából.)

Veremautomata számítási ereje

- **Tétel 3**: Minden A veremautomatához konstruálható egy A' veremautomata úgy, hogy $N(A') = L(A)$.

- **Tétel 4**: Minden G környezetfüggetlen grammatikához konstruálható egy A veremautomata, amelyre $L(A) = L(G)$.

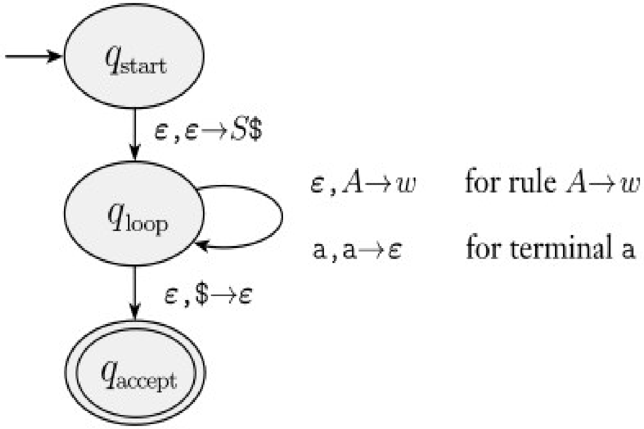
- **Tétel 5**: Minden A veremautomatához megadható egy környezetfüggetlen G grammatika úgy, hogy $L(G) = N(A)$.

- Tehát a veremautomaták számítási ereje (akár végállapottal, akár üres veremmel való elfogadást tekintünk) megegyezik a környezetfüggetlen (2-es típusú) grammatikák számítási erejével.

Veremautomata konstrukció környezetfüggetlen grammatikához

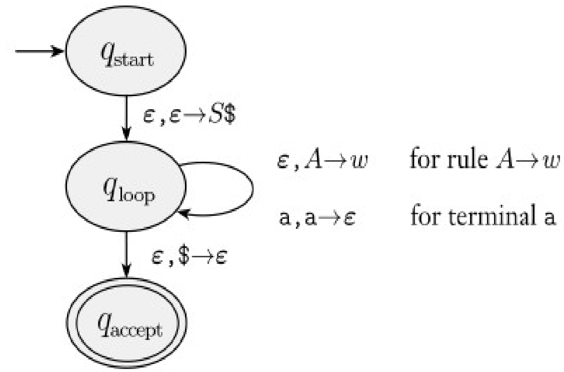
- **Tétel 4**: Minden környezetfüggetlen grammatikához konstruálható egy *A* veremautomata úgy, hogy $L(A) = L(G)$.

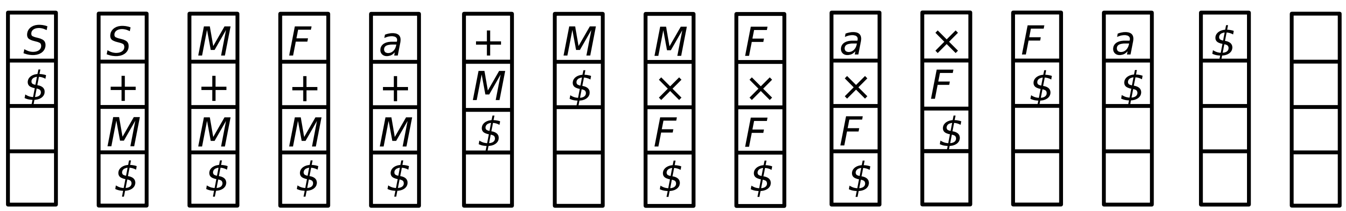
- **Biz.** (vázlat): *G*-hez tekintsük a következő veremautomatát.
  - Tegyük a *$* kezdő veremszimbólumot és az *S* kezdőszimbólumot a verem tetejére (push).
  - Ismételjük a következő lépéseket:
    - Ha a verem tetején lévő szimbólum
      - Nemterminális *A*: válasszunk nemdeterminisztikusan egy szabályt *A*-ra és cseréljük le *A*-t a szabály jobb oldalára a verem tetején.
      - Terminális *a*: vegyük le a verem tetejéről (pop), olvassuk a következő input szimbólumot és hasonlítsuk össze *a*-val. Ha nem egyeznek, elutasítjuk.
      - *$* szimbólum: lépjünk elfogadási állapotba. Így elfogadjuk az inputot, ha teljesen végigolvastuk.



Veremautomata konstrukció környezetfüggetlen grammatikához

- Példa: Legyen G=(N,T,P,S) egy környezetfüggetlen grammatika, ahol T = {a,+,×,(,)}, N = {S,M,F}, és P={$S \rightarrow S+M \mid M$, $M \rightarrow M\times F \mid F$, $F \rightarrow (S) \mid a$}.
  Input: $a+a\times a$.





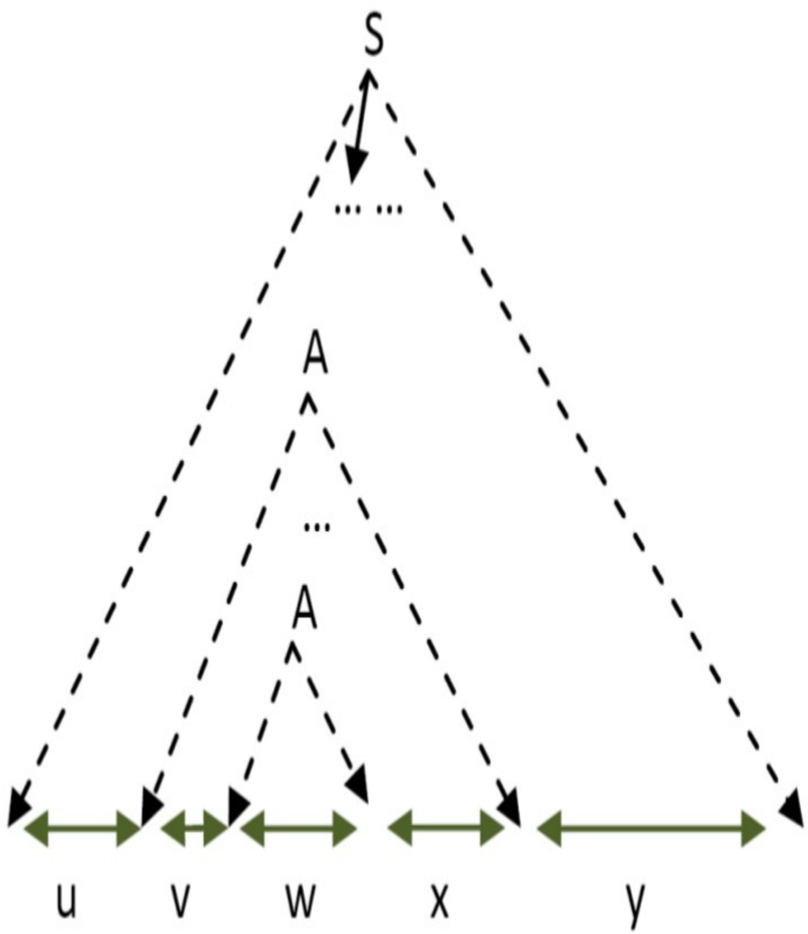
Bar-Hillel Lemma – pumping lemma környezetfüggetlen nyelvekhez

- Egy szükséges feltétel egy nyelv környezet-függetlenségére (és így veremautomatával való felismerhetőségére).

- **Tétel 6** (Bar-Hillel lemma, vagy pumping lemma környezetfüggetlen nyelvekhez):
  Minden L környezetfüggetlen nyelvhez létezik egy n természetes szám, úgy hogy minden $z \in L$ szóra, melyre $|z|>n$, teljesül, hogy z felírható mint $z=uvwxy$ ($u,v,w,x,y \in T^*$), amely kielégíti a következő 3 feltételt:
  1. $|vwx| \leq n$,
  2. $vx \neq \varepsilon$,
  3. $uv^iwx^iy \in L$, minden $i \geq 0$ -ra.

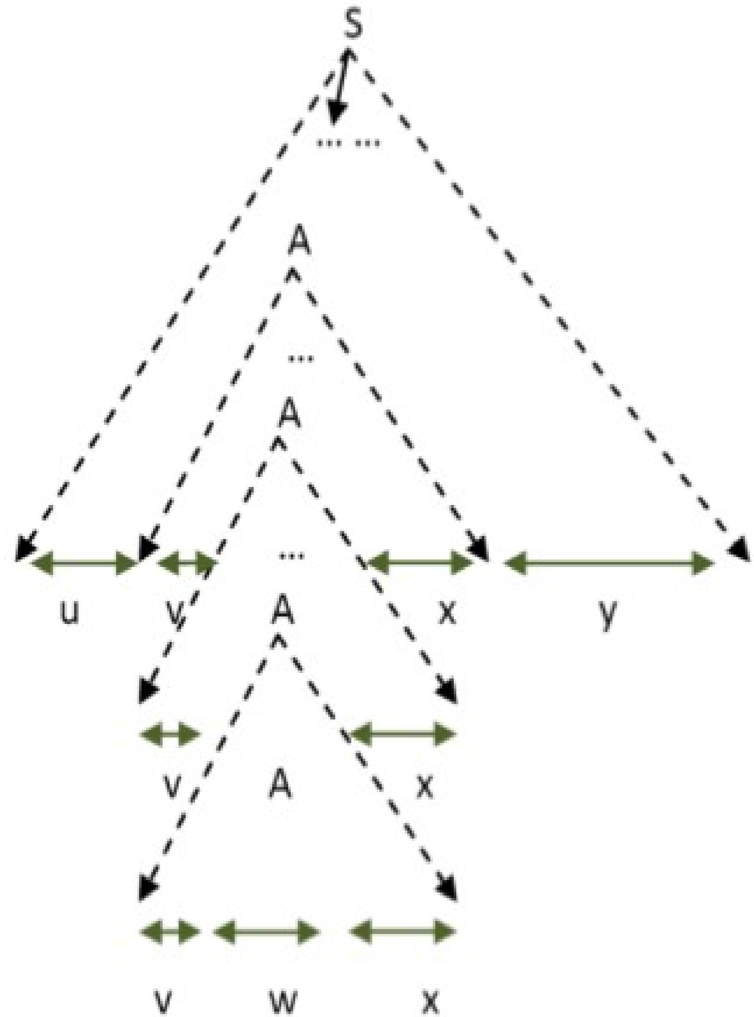
Bar-Hillel Lemma

- **Biz.**: TF. a nyelvtan ε-mentes és Chomsky normálformában van (azaz minden szabály $A \to BC$, vagy $A \to a$, vagy $S \to \varepsilon$ alakú).
  A $z \in L(G)$ szó levezetése egy T_S fával reprezentálható.
  Ha T_S mélysége (a leghosszabb út hossza S-től egy levélig) k, akkor $|z| \leq 2^k$, a Chomsky normálforma miatt.
  Legyen N a nemterminálisok halmaza G-ben és $j=|N|$. Legyen $n=2^{j+1}$.
  Ha $z \in L$ és $|z| > n$, akkor $S \Rightarrow^* z$ levezetési fájában a leghosszabb útnak hosszabbnak kell lennie j-nél.
  Tekintsük ennek az útnak a $j+1$ hosszú utolsó szakaszát.
  Kell lennie egy $A \in N$ nemterminálisnak, amely legalább kétszer előfordul ebben a szakaszban.



Bar-Hillel Lemma

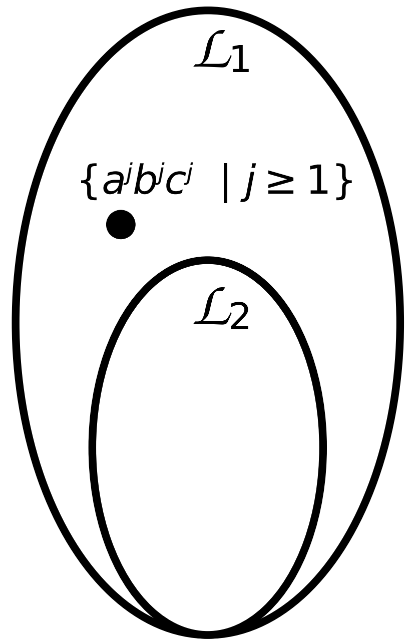
- **Biz.** (folyt.): Tekintsünk A két ilyen előfordulását ezen az úton.
  Legyen r az első (S-hez közelebbi előfordulás) részfájának megfelelő szó, w pedig a másik (S-től távolabbi) részfájának megfelelő szó.
  Ekkor $A \Rightarrow^* r$ és $A \Rightarrow^* w$, és w az r részszava, tehát $r = vwx$ valamely $v,x \in T^*$ -re.
  Továbbá $z = ury$, valamely $u,y \in T^*$-re.
  Az A előfordulásainak megválasztása miatt, $|r| \leq 2^{j+1}$.
  Másrészt $S \Rightarrow^* uAy$ és $A \Rightarrow^* vAx$.
  Ezért $S \Rightarrow^* uv^iwx^iy$ minden $i \geq 0$ -ra.
  Így $A \Rightarrow^* vAx$ legalább egy lépést tartalmaz, és az első lépés egy $A \rightarrow BC$ formájú szabály alkalmazása kell hogy legyen.
  Ezért $|vx| \geq 1$, mivel G ε-mentes. □



Bar-Hillel Lemma alkalmazása

- **Állítás**: Az $L=\{a^j b^j c^j : j \geq 1\}$ nyelv nem környezetfüggetlen.

- **Biz.**: TF. G egy környezetfüggetlen grammatika, amely L-t generálja.
  Ekkor, a lemma szerint, $\exists\ n \geq 0$ úgy hogy
  $\forall\ z \in L$, $|z|>n$, szó felírható mint $z=uvwxy$,
  $|vwx| \leq n$, $vx \neq \varepsilon$, továbbá, minden $i \geq 0$-ra
  $uv^i wx^i y \in L$.
  Tekintsünk egy $a^m b^m c^m$ szót, ahol $m>n$.
  Mivel $|vwx| \leq n$, vwx nem tartalmazhatja mindhárom szimbólumot, a,b,c-t.
  TF. az általánosság elvesztése nélkül, hogy vwx tartalmaz legalább egy a-t és nem tartalmaz c-t. Ekkor $i \geq 2$ esetén, $uv^i wx^i y$ több a-t tartalmaz, mint c-t.
  Ezért $uv^i wx^i y \notin L$.
  Következésképp, L nem környezetfüggetlen. $\square$



Példa

- Példa: Környezetfüggő grammatika, ami $L=\{a^j b^j c^j : j \geq 1\}$ nyelvet generálja:

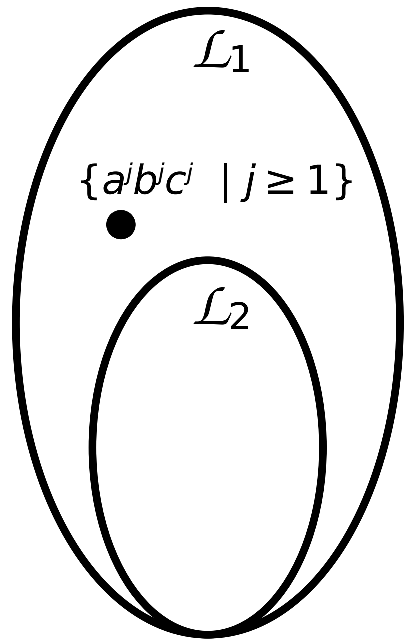
  $S \rightarrow abc \mid aAbc$

  $Ab \rightarrow bA$

  $Ac \rightarrow Bbcc$

  $bB \rightarrow Bb$

  $aB \rightarrow aa \mid aaA$



Környezetfüggetlen nyelvek tulajdonságai

Tétel 7: Legyen L és L' két környezetfüggetlen nyelv. Ekkor $L \cup L'$, LL', L^* szintén környezetfüggetlenek (azaz. $\mathcal{L}_2$ zárt a reguláris operációkra unió, konkatenáció, Kleene-csillag).

Biz.: Itt csak azt bizonyítjuk, hogy $L \cup L'$ környezetfüggetlen.

- Legyen $G = (N,T,P,S)$ és $G' = (N',T',P',S')$ két környezetfüggetlen grammatika, melyekre $L(G) = L$ és $L(G') = L'$.
- TF. $N \cap N' = \emptyset$. (Máskülönben nevezzük át a nemterminálisokat N'-ben.)
- Legyen S'' egy új szimbólum, $S'' \notin N \cup N' \cup T \cup T'$. S'' lesz az új kezdőszimbólum.
- Legyen $G'' = (N \cup N' \cup \{S''\}, T \cup T', P'', S'')$, ahol $P'' = P \cup P' \cup \{S'' \to S, S'' \to S'\}$.
- Ekkor G'' egy környezetfüggetlen grammatika és $L(G'') = L(G) \cup L(G') = L \cup L'$.
  - Minden levezetésnek vagy a $S'' \to S$ vagy a $S'' \to S'$ szabállyal kell kezdődni.
  - Ha $S'' \to S$ szabállyal kezdődik, azután már csak G szabályai alkalmazhatók.
  - Ha $S'' \to S'$ szabállyal kezdődik, azután már csak G' szabályai alkalmazhatók.

$\square$

Környezetfüggetlen nyelvek tulajdonságai

Tétel 8: Két környezetfüggetlen nyelv metszete nem feltétlenül környezetfüggetlen (azaz $\mathcal{L}_2$ nem zárt a metszet operációra).

Biz.: Tekintsük a következő nyelveket $T=\{a,b,c\}$ felett:

- $L=\{a^n b^n c^m \mid n \geq 1,\ m \geq 1\}$,
- $L'=\{a^n b^m c^m \mid n \geq 1,\ m \geq 1\}$.
- Ekkor $L \cap L'=\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.
- Az előző fóliákról tudjuk, hogy $L \cap L'$ nem környezetfüggetlen.
- Pedig L és L' környezetfüggetlenek. A következő környezetfüggetlen grammatika L-t generálja:
  - $S \rightarrow TC$
  - $C \rightarrow cC \mid c$
  - $T \rightarrow aTb \mid ab$
- Hasonlóan, környezetfüggetlen grammatikával generálható L' is . $\square$

Környezetfüggetlen nyelvek tulajdonságai

Tétel 9 Egy környezetfüggetlen nyelv komplementere nem feltétlenül környezetfüggetlen. (azaz $\mathcal{L}_2$ nem zárt a komplementer operációra).

Biz.:

- TF. minden környezetfüggetlen nyelv komplementere is környezetfüggetlen.
- Legyen L és L' két környezetfüggetlen nyelv T ábécé felett.
- A feltevés szerint, $\overline{L}$ és $\overline{L'}$ környezetfüggetlenek.
- Tétel 7 szerint, $\overline{L} \cup \overline{L'}$ környezetfüggetlen.
- A feltevést újra alkalmazva azt kapjuk, hogy $\overline{\overline{L} \cup \overline{L'}}$ környezetfüggetlen.
- Ám $\overline{\overline{L} \cup \overline{L'}} = L \cap L'$, ami Tétel 8 szerint nem feltétlenül környezetfüggetlen.
- Következésképpen, a feltevés nem lehet igaz. $\square$

Irodalom

- Michael O. Rabin: Probabilistic Automata. Information and Control. 6 (3): 230–245, 1963. doi:10.1016/s0019-9958(63)90290-0
- Michael Sipser: Introduction to the Theory of Computation. 3rd edition, 2012.