Hálózati Algoritmusok

2015

Adatfolyam és véletlen elhelyezés elmélete

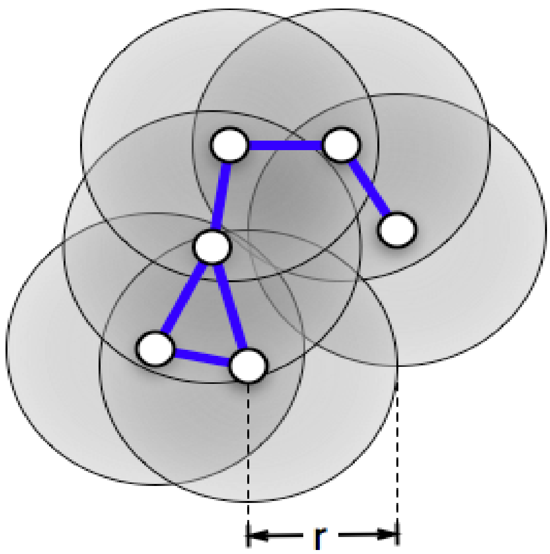
Unit Disk Graph

- Motiváció:
  - A fogadott jel erőssége d távolságban arányos $d^{-\gamma}$-val, ahol γ a *path loss exponent*
  - Kapcsolat csak akkor van, ha a jel-zaj arány nagyobb, mint egy küszöb
- Definíció
  - Adott pontok egy véges halmaza $V \subset \mathbf{R}^2$ vagy $V \subset \mathbf{R}^3$,
  - akkor a V ponthalmazhoz a *Unit Disk Graph (UDG)* r sugárral G=(V,E) a következő irányítatlan élhalmaz által definiált:

$$E = \{\{u, v\} \mid ||u, v||_2 \leq r\}$$

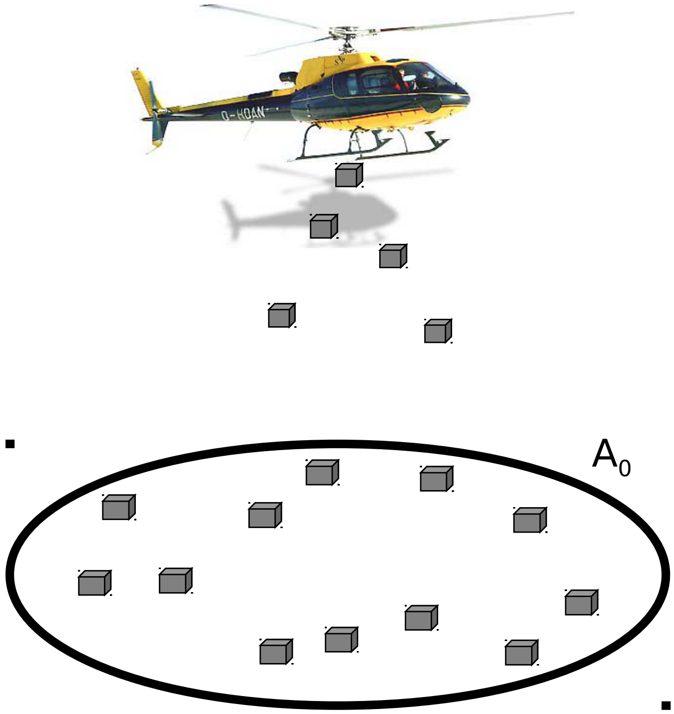
  - ahol $||u,v||_2$ az Euklideszi távolság:

$$||u, v||_2 = \sqrt{(u_x - v_x)^2 + (u_y - v_y)^2}$$



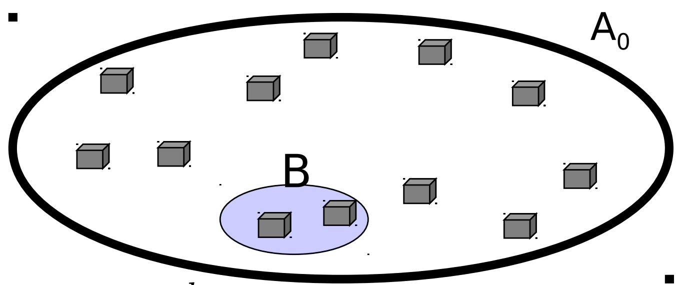
Véletlen elhelyezés model

- Motiváció
  - Repülőről szórjuk le a csomópontokat
- Definíció
  - Pontok egy halmaza véletlenül van elhelyezve egy A_0 területen, ha minden pozíció egyforma valószínű, azaz
  - A sűrűségi függvény (pdf) f(x) konstans



A véletlen elhelyezés tulajdonságai

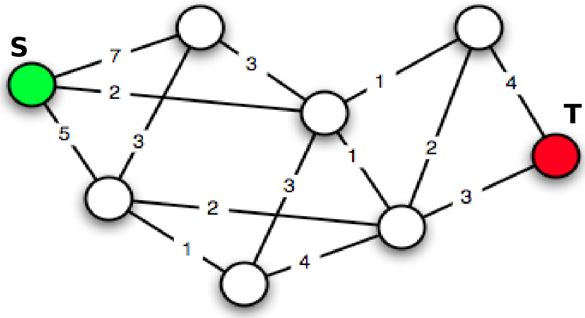
- Annak a valószínűsége, hogy egy csomópont egy adott B területre esik A_0–on belül:
  - Pr[csomópont B-be esik] = |B| / | A_0|
  - ahol |B| B területe
- Lemma
  - Legyen p = |B|/|A_0|. Annak a valószínűsége, hogy n csomópont közül k esik B-be:

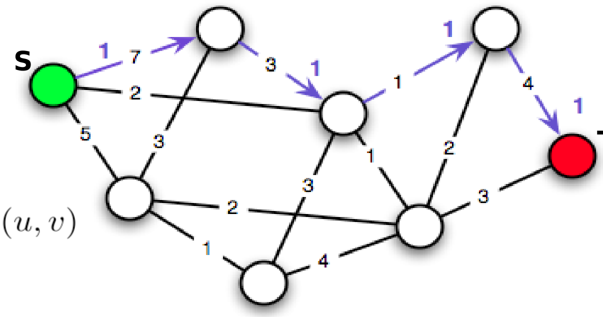


$$Pr[n\text{-ből } k \text{ esik } B\text{-be}] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Adatfolyamok hálózatokban

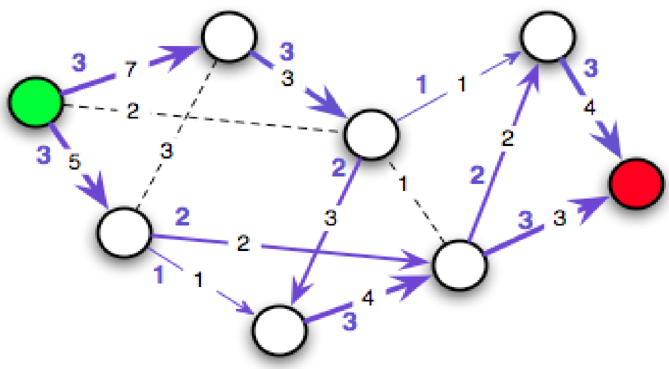
- Motiváció:
  - Optimizáljuk az adatfolyamot a forrástól a célig
- Definíció:
  - **max. folyam probléma**
  - Adott
    - gráf G=(V,E)
    - kapacitás függvény w: E $\rightarrow$ $\mathbf{R}^{+}_{0}$,
    - forrás halmaz S és cél halmaz T
  - Keressünk egy maximum folyamot S-től T-ig
- Egy folyam függvény f : E $\rightarrow$ $\mathbf{R}^{+}_{0}$, ahol
  - minden e $\in$ E: f(e) $\leq$ w(e)
  - minden u,v $\in$ V: f(u,v)$\geq$0
  - $\forall u \in V \setminus (S \cup T)$ $\qquad \sum_{v \in V} f(v,u) = \sum_{v \in V} f(u,v)$
- A folyam mérete: $\qquad \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u,v)$





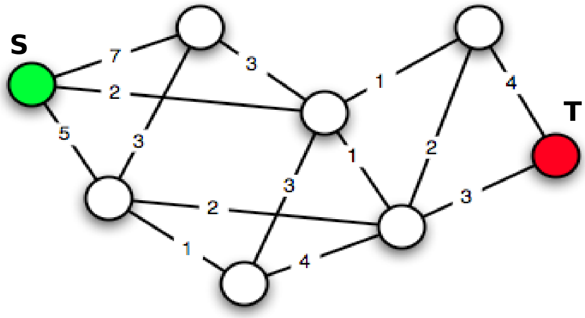
A max. folyam kiszámítása

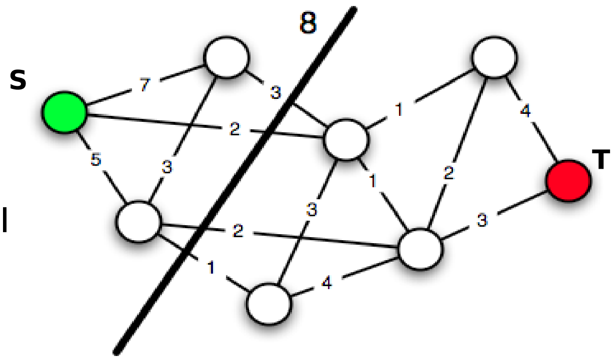
- Minden természetes csővezeték rendszerben a max. folyam a természet által kiszámítódik
- Számítógép algoritmusok a max. folyam kiszámítására:
  - Lineáris programozás
    - A folyam egyenletek a lineáris programozási probléma egyenletei
    - Simplex (vagy ellipsoid módszer, vagy belső pont modszer)
  - Ford-Fulkerson
    - Amíg van egy nyitott út (olyan, ami megjavítja a folyamot) növeljük a folyamot ezen az úton
  - Edmonds-Karp
    - Ford-Fulkerson speciális esete
    - Használjunk szélességi keresést ennek az útnak a megtalálásához



Min. vágás hálózatokban

- Motiváció:
  - Találjuk meg a szűk keresztmetszetet a hálózatban
- Definíció:
  - **Min. vágás probléma**
  - adott
    - gráf G=(V,E)
    - kapacitás függvény w: E $\rightarrow$ $\mathbf{R}^{+}_{0}$,
    - forrás halmaz S és cél halmaz T
  - Találjunk egy minimum vágást S és T között
- Egy C vágás élek olyan halmaza, hogy
  - G\C–ben nincs út S egyetlen csomópontjából T egyetlen csomópontjába se
- C vágás mérete: $\sum_{e \in C} w(e)$



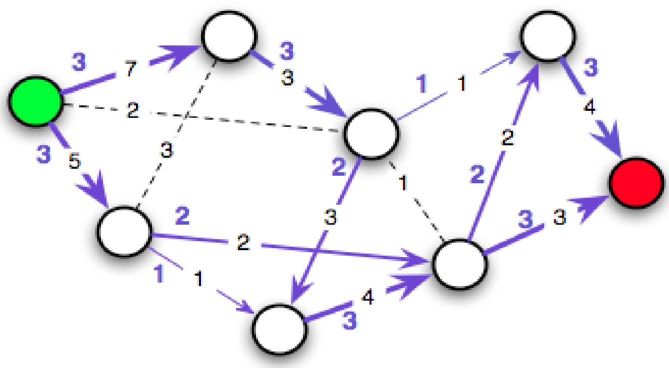


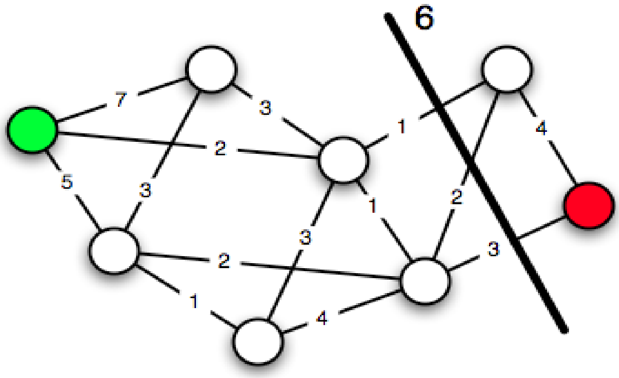
Min-vágás-max-folyam tétel

- Tétel

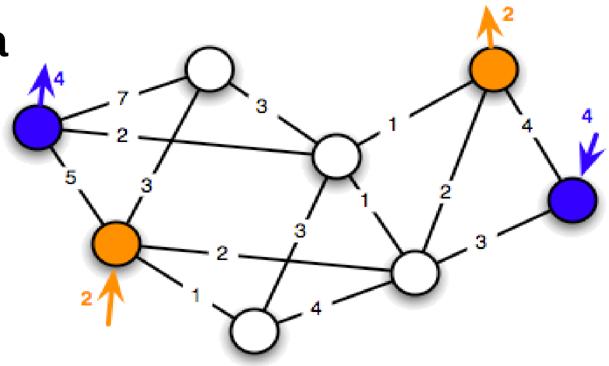
  Minden gráfra, minden kapacitás függvényre, minden forrás és cél csomópont halmazra

  a minimum vágás értéke egyenlő a maximum folyamával



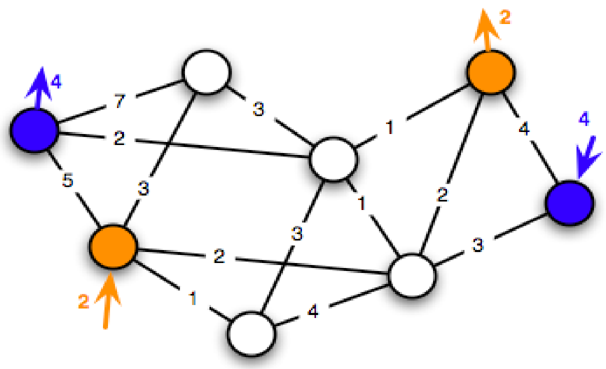


Multi-commodity folyam probléma

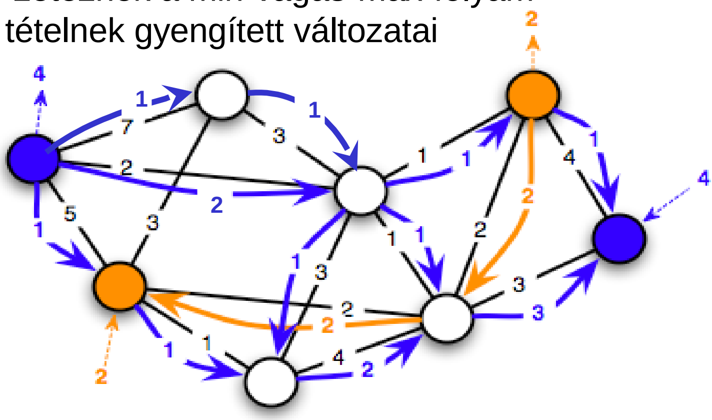


- Motiváció:
  - Elméleti modell minden pont-pont kommunikáció optimális elhelyezésére a hálózatban kapacitásokkal
- Definíció
  - **Multi-commodity folyam probléma**
  - adott
    - gráf G=(V,E)
    - kapacitás függvény w: E $\rightarrow$ $\mathbf{R}^{+}_{0}$,
    - commodities K_1, .., K_k:
      – $K_i=(s_i,t_i,d_i)$, ahol
      – s_i az forrás csomópont
      – t_i a cél csomópont
      – d_i a szükséglet
- Találjunk folyamokat $f_1,f_2,...,f_k$ minden commodity-nak, úgy hogy
  - kapacitás:
    $$\sum_{i=1}^{k} f_i(u,v) \le w(u,v)$$
  - folyam tulajdonság:
    $$\forall v \notin \{s_i, t_i\} \ : \ \sum_{u\in V} f_i(u,v) = \sum_{u\in V} f_i(v,u)$$
  - szükséglet:
    $$\sum_{v\in V} f_i(s_i,v) = \sum_{u\in V} f_i(u,t_i) = d_i$$

Multi-commodity folyam problémák megoldása



- A Multi-Commodity folyam probléma megoldható lineáris programozással
  - Az egyenlőségek a lineáris program egyenletei
  - Simplex vagy ellipsoid vagy belső pont algoritmus
- Léteznek a min-vágás-max-folyam tételnek gyengített változatai

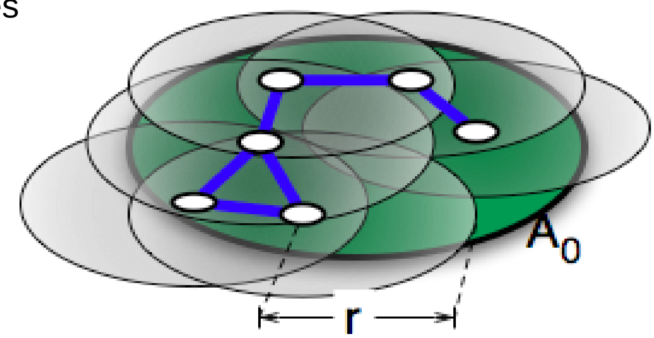


Minimum sűrűség összefüggőséghez

- Gupta, Kumar: **The Capacity of Wireless Networks,** *IEEE Transactions on Information Theory*, 46(2), 388-404, 2000.
  - Kritikus energia vezeték nélküli hálózatok összefüggéséhez
- Motiváció:
  - Hány csomópontot kell elhelyezni véletlenül, hogy egy összefüggő UDG-t (unit-disk graph) kapjunk
- Tétel
  - Egy négyzet alakú A_0 területen szükséges és elégséges véletlenül elhelyezni n csomópontot, hogy összefüggő UDG-t kapjunk, ahol

$$c \cdot \pi r^2 \cdot n = |A_0| \log n$$

  - valamilyen konstans c-re.
- Ekvivalens: $\Theta\left(\frac{n}{\log n}\right) = \frac{|A_0|}{r^2}$



Miért kell ennyi csomópont?

- Elégséges feltétel, hogy a hálózat ne legyen összefüggő, hogy
  - legalább egy csomópont egy r oldalhosszú négyzetben
  - 8 szomszédos négyzet üres
- A valószínűség, hogy n csomópont közül egy se esik a szomszédos négyzetekbe:

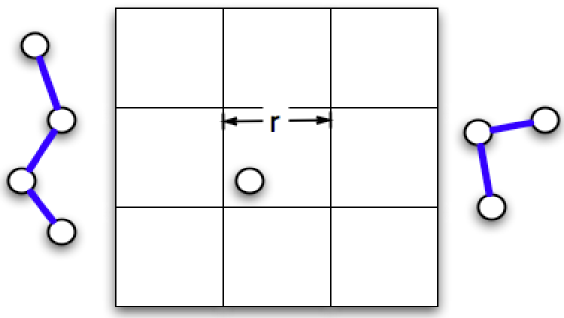
$$\left(1 - \frac{8r^2}{|A_0|}\right)^n$$

- $x \in [0,0.75]$ esetén:

$$e^{-2x} \le (1-x) \le e^{-x}$$

- Ezért (elég nagy A_0–ra)

$$\left(1 - \frac{8r^2}{|A_0|}\right)^n \ge e^{-\frac{16r^2 n}{|A_0|}}$$



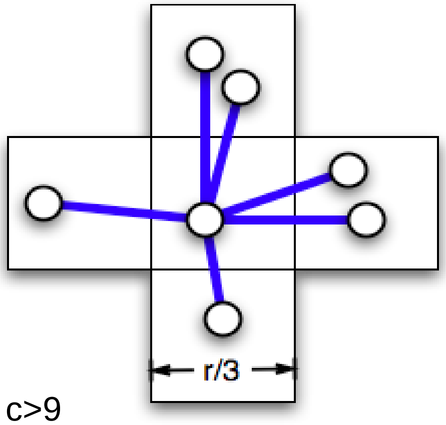
- Ilyen izolált csomópontok számának várható értéke legalább

$$n \cdot e^{-\frac{16r^2 n}{|A_0|}}$$

- Ha $r^2 = o\left(\frac{|A_0| \ln n}{n}\right)$, akkor

az izolált csomópontok számának várható értéke legalább 1

Elég ennyi csomópont?



- Elégséges feltétel az összefüggéshez
  - szomszédos r/3 oldalhosszúságú négyzetekben legalább egy csomópont legyen
- Annak a valószínűsége, hogy legalább egy csomópont egy ilyen négyzetben van:

$$1 - \left(1 - \frac{r^2}{9|A_0|}\right)^n$$

- Válasszuk

$$r^2 = c \cdot \frac{|A_0| \ln n}{n}$$

- Akkor a fenti valószínűség:

$$1 - \left(1 - \frac{c \ln n}{9n}\right)^n \geq 1 - e^{-\frac{c}{9} \ln n} = 1 - n^{-\frac{c}{9}}$$

- Válasszuk c>9
  - Akkor egy üresen maradt szomszédos négyzet valószínűsége o(n^{-1})
  - Ezt a valsz.-t 4n-nel megszorozva (minden szomszédos négyzethez), egy felső korlátot ad arra a valsz.-re, hogy van olyan csomópont, amelyiknek valamelyik oldalon nincs szomszédja
- Akkor a hiba valószínűsége o(1)

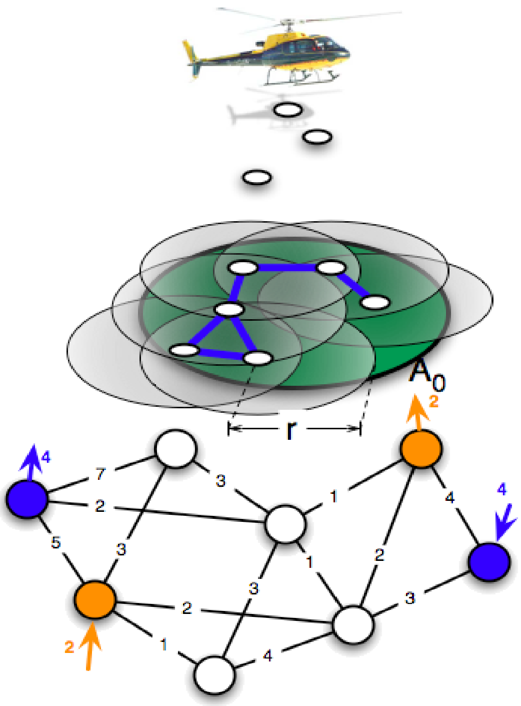
Hálózati folyam véletlen UDG-ban

- Motiváció:
  - Mekkora átvitelt enged a hálózat
- Tétel
  - Tegyük fel, hogy egy négyzet alakú A_0 területen n csomópont véletlenül van elhelyezve egyenletes eloszlás szerint, úgy hogy

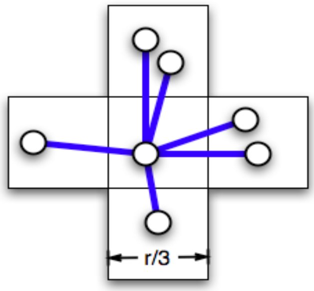
$$\Theta\left(\frac{n}{\log n}\right) = \frac{|A_0|}{r^2}$$

  - Tegyük fel, hogy minden csomópont képes W bit/s rátával adatot átvinni egy szomszédnak az UDG-ban. Tegyük fel, hogy minden csomópont véletlenül választ egy csomópontot és annak küld adatot. A ráta, ami elérhető minden csomópontban ehhez az átvitelhez:

$$\Theta\left(\frac{W}{\sqrt{n \log n}}\right)$$



Bizonyítás vázlat



- 1. megfigyelés:
  - ha $$\Theta\left(\frac{n}{\log n}\right) = \frac{|A_0|}{r^2}$$
  - a véletlen elhelyezés egy rács-szerű struktúrához vezet, melyben a cellák élhossza r/3
- 2. megfigyelés:
  - A hálózat lényegében egy rács m x m cellával, ahol $$m = \Theta\left(\sqrt{\frac{n}{\log n}}\right)$$
  - Átlagosan minden cella log n csomópontot tartalmaz és ennyi egy csomóponthoz szomszédos élek száma egy szomszédos cellába
- Egy rácsban egy ekkora igény routolható n^2/m kapacitással (horizontális vagy vertikális vágás a szűk keresztmetszet
- Ebben a hálózatban a minimális vágás m log n = $(n \log n)^{1/2}$
- Ezért a multi-commodity folyam: $W/(n \log n)^{1/2}$

Diszkuszió

- Véletlenül elhelyezett csomópontok esetén egy A négyzeten Ω(n log n) csomópontra van szükség
  - hogy az UDG összfüggő legyen
  - ahol $n= |A|/r^2$
- Ekkor a hálózat egy rácshoz hasonlóan viselkedik
  - egy polylogaritmikus faktortól eltekintve
- A rács szűk keresztmetszete a szélessége
  - optimális esetben (egy négyzet esetén) ez $n^{1/2}$.
- Ha a Ω(log n)-szorzós overhead-et nem érjük el,
  - akkor a véletlenül elhelyezett UDG nem összefüggő
- Ez egy esete a „coupon-collector” problémának
  - Mennyi kártyát kell begyűjteni, amíg mind az n különböző kupont megtaláljuk