

Számítási modellek

4: Reguláris kifejezések, véges automaták

Reguláris kifejezések

Felhasználások:

- szövegszerkesztőkben keresés, csere
- kereső motorok
- szövegfeldolgozó programok (pl. sed és AWK)
- programozási nyelvek, lexikális elemzés
- genom elemzés (genom mint karakterlánc)
- spam/malware szűrő
- ...

Reguláris kifejezések

Legyenek V és $V' = \{\varepsilon, \cdot, +, *, (,)\}$ diszjunkt ábécék. A V ábécé feletti **reguláris kifejezéseket** rekurzív módon a következőképpen definiáljuk:

1. ε reguláris kifejezés V felett,
2. minden $a \in V$ reguláris kifejezés V felett,
3. Ha R reguláris kifejezés V felett, akkor R^* is reguláris kifejezés V felett,
4. Ha Q és R reguláris kifejezések V felett, akkor $(Q \cdot R)$ és $(Q + R)$ is reguláris kifejezések V felett.

* iteráció lezártja
· konkatenáció
+ unió.

Reguláris kifejezések

Minden reguláris kifejezés egy **reguláris nyelvet reprezentál**, melyet az alábbi rekurzióval definiálunk:

1. az ε a $\{\varepsilon\}$ nyelvet reprezentálja,
2. az a ($\in V$) az $\{a\}$ nyelvet reprezentálja,
3. ha R az L nyelvet reprezentálja, akkor R^* az L^* nyelvet reprezentálja,
4. ha R az L nyelvet és R' az L' nyelvet reprezentálja, akkor
($R \cdot R'$) az LL' nyelvet reprezentálja,
($R + R'$) az $L \cup L'$ nyelvet reprezentálja.

Reguláris kifejezések

A zárójelek elhagyhatók, ha precedencia relációt definiálunk a műveleteken. A szokásos sorrend: $*$, \cdot , $+$.

Az alábbi reguláris kifejezések ekvivalensek:

- a^* ugyanaz, mint $(a)^*$ és az $\{a\}^*$ nyelvet reprezentálja,
- $(a + b)^*$ ugyanaz, mint $((a) + (b))^*$ és a $\{a, b\}^*$ nyelvet reprezentálja,
- $a^* \cdot b$ ugyanaz, mint $((a)^*) \cdot (b)$ és a $\{a\}^*b$ nyelvet reprezentálja,
- $b + ab^*$ ugyanaz, mint $(b) + ((a) \cdot (b)^*)$ és a $\{b\} \cup \{a\}\{b\}^*$ nyelvet reprezentálja,
- $(a + b) \cdot a^*$ ugyanaz, mint $((a) + (b)) \cdot ((a)^*)$ és a $\{a, b\}\{a\}^*$ nyelvet reprezentálja.

Reguláris kifejezések

Legyenek P , Q és R reguláris kifejezések. Ekkor fennáll:

- $P + (Q + R) = (P + Q) + R$
- $P \cdot (Q \cdot R) = (P \cdot Q) \cdot R$
- $P + Q = Q + P$
- $P \cdot (Q + R) = P \cdot Q + P \cdot R$
- $(P + Q) \cdot R = P \cdot R + Q \cdot R$
- $P^* = \varepsilon + P \cdot P^*$
- $\varepsilon \cdot P = P \cdot \varepsilon = P$
- $P^* = (\varepsilon + P)^*$

Reguláris kifejezések

Példa:

- $(a + b)a^*$ és $aa^* + ba^*$ reguláris kifejezések által reprezentált nyelv ugyanaz:
 $\{ aa^n \mid n \geq 0 \} \cup \{ ba^n \mid n \geq 0 \}$.
- Az $a + ba^*$ reguláris kifejezés által reprezentált nyelv:
 $\{ a, b, ba, ba^2, ba^3, \dots \}$.

Reguláris kifejezések kifejezőereje

Tétel:

- 1) Minden reguláris kifejezés egy reguláris (3-típusú) nyelvet reprezentál.
- 2) Minden reguláris (3-típusú) nyelvhez megadható egy reguláris kifejezés, ami ezt a nyelvet reprezentálja.

Biz.:

- 1) következik abból, hogy a reguláris nyelvek osztálya \mathcal{L}_3 zárt a reguláris műveletekre.

Reguláris kifejezések kifejezőereje

Biz. (folyt.):

2) Megmutatjuk, hogy minden L reguláris nyelvhez, amelyet egy $G = (N, T, P, S)$ reguláris grammatika generál, konstruálható egy reguláris kifejezés, amely L nyelvet reprezentálja.

- Legyen $N = \{A_1, \dots, A_n\}$, $n \geq 1$, $S = A_1$.
- TF. minden szabály $A_i \rightarrow aA_j$ vagy $A_i \rightarrow \varepsilon$ alakú, ahol $a \in T$, $1 \leq i, j \leq n$.
- Azt mondjuk, hogy az A_m nemterminális **érintett** az $A_i \Rightarrow^* uA_j$ ($u \in T^*$) levezetésben, ha A_m előfordul valamely közbülső mondatformában A_i és uA_j között a levezetésben.

Reguláris kifejezések kifejezőereje

Biz. (folyt.):

- Az $A_i \Rightarrow^* uA_j$ levezetés **k -megszorított** ha $0 \leq m \leq k$ érvényes minden A_m nemterminálisra, ami előfordul a levezetésben.
- Legyen $E^k_{i,j} = \{u \in T^* \mid \exists A_i \Rightarrow^* uA_j \text{ } k\text{-megszorított levezetés}\}$.
- Megmutatjuk k szerinti indukcióval, hogy $E^k_{i,j}$ nyelvhez létezik reguláris kifejezés, ami $E^k_{i,j}$ nyelvet reprezentálja, $0 \leq i,j,k \leq n$.

Reguláris kifejezések kifejezőereje

Biz. (folyt.):

- $k=0$ (indukció kezdete):
 - $i \neq j$ esetén $E^0_{i,j}$ vagy üres, vagy T -beli szimbólumokból áll ($a \in E^0_{i,j}$ pontosan akkor, ha $A_i \rightarrow aA_j \in P$.)
 - $i = j$ esetén $E^0_{i,j}$ tartalmazza ε -t és T nulla vagy annál több elemét. Így $E^0_{i,j}$ reprezentálható reguláris kifejezéssel.

Reguláris kifejezések kifejezőereje

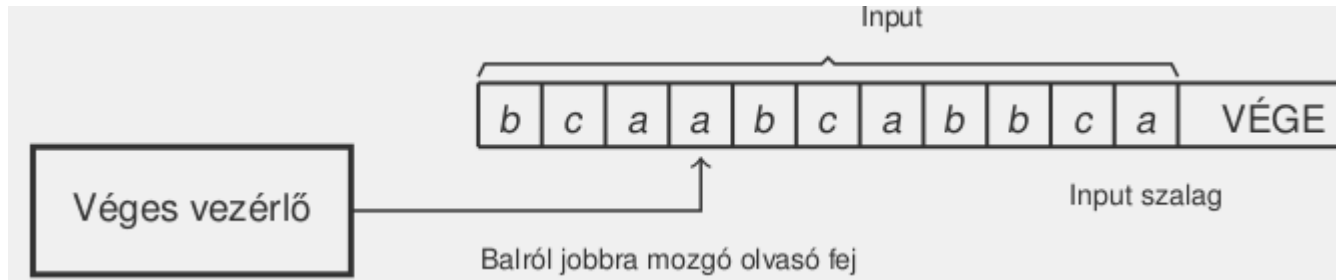
Biz. (folyt.):

- $k-1 \rightarrow k$ (indukciós lépés):
 - TF: minden i, j -re $E^{k-1}_{i,j}$ reprezentálható egy reguláris kifejezéssel
 - Ekkor $E^k_{i,j} = E^{k-1}_{i,j} + E^{k-1}_{i,k} \cdot (E^{k-1}_{k,k})^* \cdot E^{k-1}_{k,j}$.
 - Ezért $E^k_{i,j}$ reprezentálható reguláris kifejezéssel.
 - Legyen I_ε azon i indexek halmaza, melyekre $A_i \rightarrow \varepsilon$.
 - Ekkor $L(G) = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} E^{n-1}_{1,i}$ reprezentálható reguláris kifejezéssel. □

Véges Automata (VA)

- Formális nyelvek azonosítása felismerő eszközökkel is lehetséges. Ilyenek az automaták
- Egy automata alkalmas szavak feldolgozására és azonosítására.
- A grammatikák szintetizáló, míg az automaták analitikus megközelítést alkalmaznak.
- Az automata egy input szót vagy elfogad, vagy elutasít.

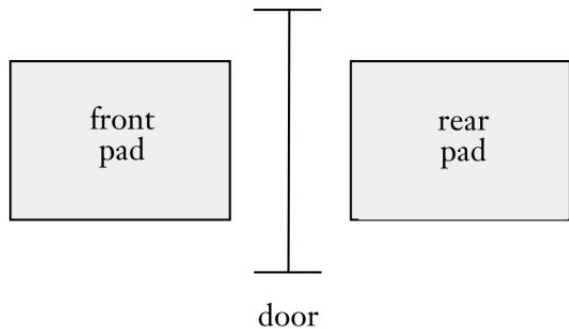
Véges Automata (VA)



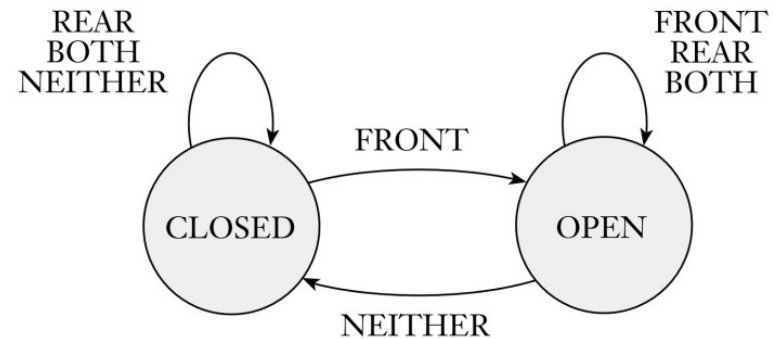
- A véges automata (VA) lépések sorozatát hajtja végre diszkrét időintervallumokban.
- A VA a kezdőállapotból indul.
- Az inputszó az inputszalagon helyezkedik el, az olvasófej az inputszó legbaloldalibb szimbólumán áll.
- A VA, miután elolvasott egy szimbólumot, az olvasófejet egy pozícióval jobbra mozgatja, majd állapotot vált az állapotátmenet függvény szerint.
- Ha a VA elolvasta az inputot, megáll, elfogadja vagy elutasítja.

Véges Automata (VA)

- Példa: automata ajtó vezérlés



Állapot-átmenet diagramm:



Állapot-átmenet táblázat

	input signal			
	NEITHER	FRONT	REAR	BOTH
state	CLOSED	OPEN	CLOSED	CLOSED
	OPEN	OPEN	OPEN	OPEN

Véges Automata (VA)

- Felhasználás:
 - Önműködő ajtó
 - Kávéautomata
 - Mintafelismerés
 - Matematikai rejtvények (pl. átkelés a folyón)
 - Mintafelismerés
 - Beszédfeldolgozás
 - Optikai karakterfelismerés
 - Részvény árak előrejelzése a tőzsdén
 - ...

Véges Automata (VA)

A véges automata egy 5-ös $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$, ahol

- Q az **állapotok** egy véges, nemüres halmaza,
- T az **inputszimbólumok** véges ábécéje,
- $\delta : Q \times T \rightarrow Q$ (teljes) leképezés, az ún. **állapotátmenet függvény**,
- $q_0 \in Q$ a **kezdőállapot**,
- $F \subseteq Q$ az **elfogadó állapotok halmaza**.

Véges Automata (VA)

Megjegyzés:

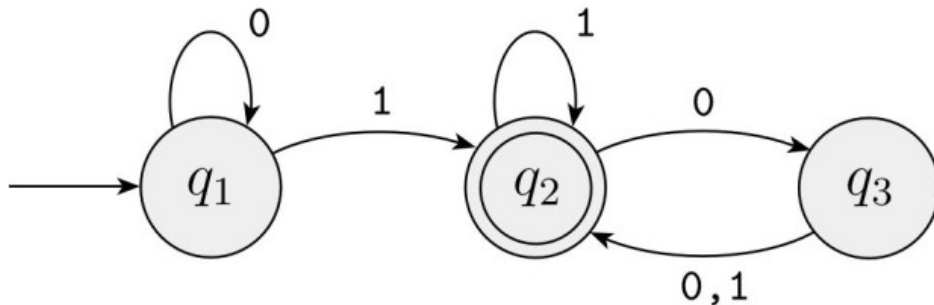
- A $\delta : Q \times T \rightarrow Q$ leképezés kiterjeszhető $\hat{\delta} : Q \times T^* \rightarrow Q$ leképezéssé:
 - $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = q,$
 - $\hat{\delta}(q, xa) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$ minden $x \in T^*$ -ra és $a \in T$ -re.

Véges Automata (VA)

Példa:

- Legyen $A = (Q, T, \delta, q_1, F)$ egy VA, ahol
 $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$, $T = \{0, 1\}$, $F = \{q_2\}$,
 $\delta(q_1, 0) = q_1$, $\delta(q_1, 1) = q_2$, $\delta(q_2, 0) = q_3$, $\delta(q_2, 1) = q_2$,
 $\delta(q_3, 0) = \delta(q_3, 1) = q_2$.

Állapot-átmenet diagramm:



Állapot-átmenet táblázat:

δ	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_2	q_2

- Az elfogadott nyelv $L(A) = \{w \mid w \text{ legalább egy } 1\text{-est tartalmaz és az utolsó } 1\text{-est páros számú } 0 \text{ követi}\}$

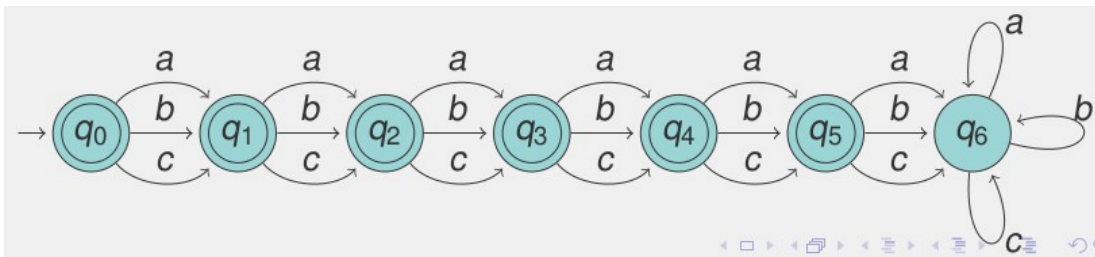
Véges Automata (VA)

Példa:

- Legyen $T = \{a, b, c\}$.
Adjunk egy VA-t, ami azokat a szavakat fogadja el, melyek hossza ≤ 5 .

Megoldás:

- Formálisan:
 $A = (\{q_0, \dots, q_6\}, \{a, b, c\}, \delta, q_0, \{q_0, \dots, q_5\})$,
 $\delta(q_i, t) = q_{i+1}$, for $i = 0, \dots, 5, t \in \{a, b, c\}$,
 $\delta(q_6, t) = q_6$, for $t \in \{a, b, c\}$
- Állapot-átmenet diagramm:

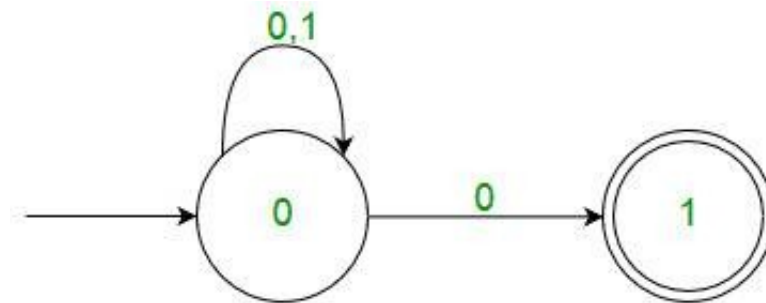


Állapot-átmenet táblázat:

	a	b	c
$\hookrightarrow q_0$	q_1	q_1	q_1
$\leftarrow q_1$	q_2	q_2	q_2
$\leftarrow q_2$	q_3	q_3	q_3
$\leftarrow q_3$	q_4	q_4	q_4
$\leftarrow q_4$	q_5	q_5	q_5
$\leftarrow q_5$	q_6	q_6	q_6
q_6	q_6	q_6	q_6

Determinisztikus és nemdeterminisztikus VA

- **Determinisztikus véges automata (DVA):** A δ függvény egyértékű, azaz $\forall (q, a) \in Q \times T$ pontosan egy s állapot van, amire $\delta(q, a) = s$.
- **Nemdeterminisztikus véges automata (NVA):** A δ függvény többértékű, azaz $\delta : Q \times T \rightarrow 2^Q$.
 - Több kezdeti állapot megengedett, $Q_0 \subseteq Q$ a kezdeti állapotok halmaza.
 - Megengedett, hogy $\delta(q, a) = \emptyset$ valamely (q, a) -ra, azaz a gép elakad.
 - ϵ -átmenet megengedett, azaz állapot-átmenet új szimbólum olvasása nélkül.



NVA példa

Determinisztikus és nemdeterminisztikus VA

- A nemdeterminizmus új tulajdonságai:
 - Több út is lehetséges (több választás minden lépésnél).
 - Az ϵ -átmenet egy átmenet az input olvasása nélkül.
 - Elfogadja az inputot, ha valamely út elfogadó állapotba vezet.

Determinisztikus és nemdeterminisztikus VA

- Alternatív jelölés: Az állapot-átmeneteket $qa \rightarrow p$ alakú szabályok formájában is megadhatjuk $p \in \delta(q, a)$ esetén.
- Legyen M_δ az $A = (Q, T, \delta, Q_0, F)$ NVA δ állapot-átmenet függvénye által a fenti módon adott szabályok halmaza.
- Ha minden (q, a) párra M_δ pontosan egy $qa \rightarrow p$ szabályt tartalmaz, akkor a VA determinisztikus, egyébként nemdeterminisztikus.

VA – redukció

- Legyen $A = (Q, T, \delta, Q_0, F)$ egy VA, legyenek $u, v \in QT^*$ szavak. Az A az u szót **egy lépésben (közvetlenül)** a v szóra **redukálja** (jelölés: $u \Rightarrow_A v$, vagy röviden $u \Rightarrow v$), ha van olyan $qa \rightarrow p \in M_\delta$ szabály (azaz $\delta(q, a) = p$) és olyan $w \in T^*$ szó, hogy $u = qaw$ és $v = pw$ teljesül.
- Az $A = (Q, T, \delta, Q_0, F)$ az u szót v szóra **redukálja** (jelölés: $u \Rightarrow_A^* v$, vagy röviden: $u \Rightarrow^* v$, ha
 - vagy $u = v$,
 - vagy \exists olyan szó $z \in QT^*$, amire $u \Rightarrow^* z$ és $z \Rightarrow v$.
- $A \Rightarrow^* \subseteq QT^* \times QT^*$ reláció a \Rightarrow reláció reflexív, tranzitív lezártja.

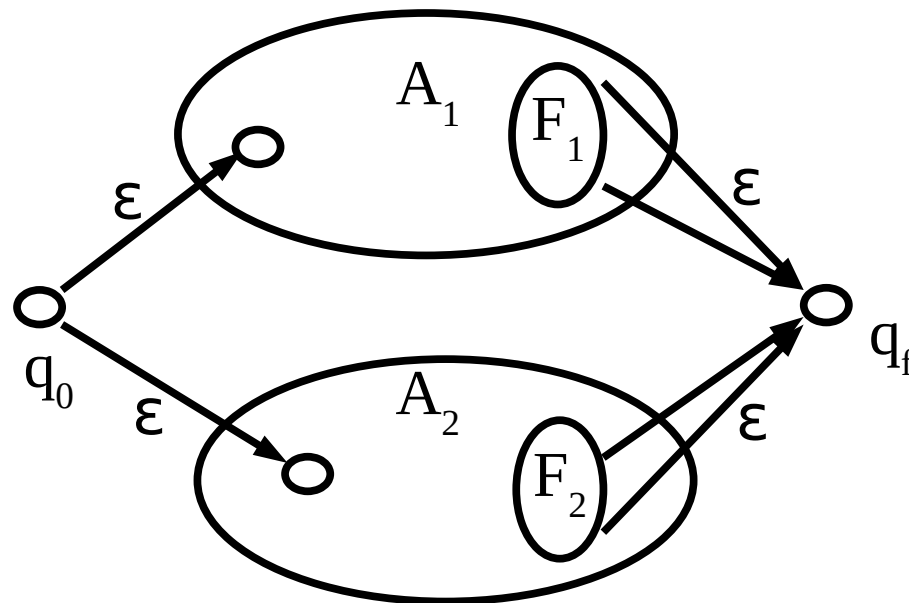
VA – elfogadott nyelv

- Az $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ NVA által **elfogadott/felismert nyelv**:
 $L(A) = \{u \in T^* \mid q_0 u \Rightarrow^* p \text{ valamely } q_0 \in Q_0\text{-ra és } p \in F\text{-re}\}.$
- Egy DVA A esetén egy kezdőállapot van $Q_0 = \{q_0\}$.
DVA A által elfogadott nyelv:
 $L(A) = \{u \in T^* \mid q_0 u \Rightarrow^* p \text{ valamely } p \in F\text{-re}\}.$

NVA $L_1 \cup L_2$ elfogadásához

Tétel: Ha L_1 és L_2 reguláris nyelvek, akkor $L_1 \cup L_2$ is reguláris nyelv.

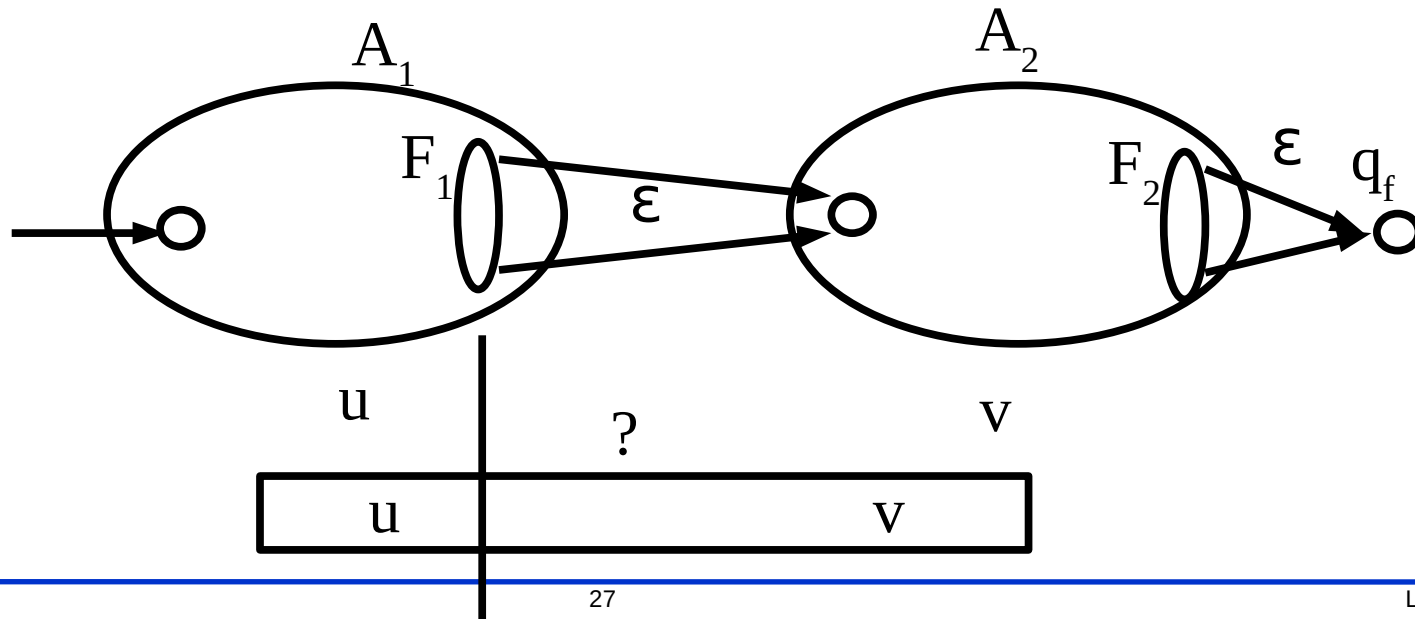
Biz. (vázlat): Legyen A_1 egy DVA, ami elfogadja L_1 -t, A_2 egy DVA, ami elfogadja L_2 -t. A következő NVA elfogadja $L_1 \cup L_2$ -t.



NFA L_1L_2 elfogadásához

Tétel: Ha L_1 és L_2 reguláris nyelvek, akkor L_1L_2 is reguláris nyelv.

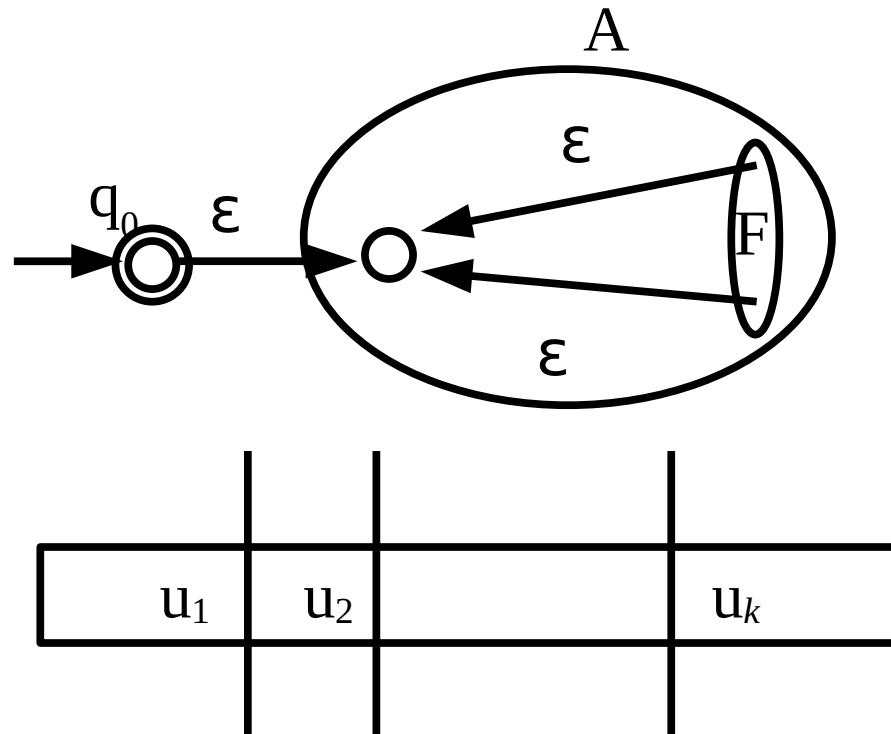
Biz. (vázlat): Legyen A_1 egy DVA, ami elfogadja L_1 -t, A_2 egy DVA, ami elfogadja L_2 -t. A következő NVA elfogadja L_1L_2 -t.



NFA L^* elfogadásához

Tétel: Ha L egy reguláris nyelv, akkor L^* is reguláris nyelv.

Biz. (vázlat): Legyen A egy DVA, ami elfogadja L -t,
A következő NVA elfogadja L^* -t.



A NVA számítási ereje

- **Tétel:** Minden $A = (Q, T, \delta, Q_0, F)$ NVA-hoz konstruálható egy DVA $A' = (Q', T, \delta', q'_0, F')$, úgy hogy $L(A) = L(A')$ teljesül.
- Ötlet: A DVA nyomon követi a lehetséges állapotok részhalmazát az NVA-ban
- Megjegyzés: Legrosszabb esetben $|Q'| = 2^{|Q|}$.

A NVA számítási ereje

Biz.:

- Legyen $Q' = 2^Q$, azaz Q' a Q halmaz összes részhalmának halmaza ($|Q'| = 2^{|Q|}$).
- Legyen $\delta' : Q' \times T \rightarrow Q'$ következőképp definiált:
 $\delta'(q', a) = \bigcup_{q \in q'} \delta(q, a)$.
- Legyen $q'_0 = Q_0$ és $F' = \{q' \in Q' \mid q' \cap F \neq \emptyset\}$
- $L(A) \subseteq L(A')$ bizonyításához, bebizonyítjuk Lemma 1-t. $L(A') \subseteq L(A)$ -hoz Lemma 2-t.
- Előbb egy példa.

NVA – DVA

Példa:

- Legyen $A = (Q, T, \delta, Q_0, F)$ egy NVA, ahol
 $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $T = \{a, b\}$, $Q_0 = \{q_0\}$, $F = \{q_2\}$.
 δ következőképpen adott:
 $\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1\}$, $\delta(q_0, b) = \{q_1\}$,
 $\delta(q_1, a) = \emptyset$, $\delta(q_1, b) = \{q_2\}$,
 $\delta(q_2, a) = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\delta(q_2, b) = \{q_1\}$.
Adjunk egy A' DVA-t, ami ekvivalens A -val.

Megoldás:

- DVA: $A' = (Q', T, \delta', q'_0, F')$, ahol
 $Q' = \{\emptyset, \{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}$,
 $q'_0 = \{q_0\}$,
 $F' = \{\{q_2\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}$,
folyt. következő fólia

NVA – DVA

Példa (folyt.):

- δ :
$$\begin{aligned} \delta(q_0, a) &= \{q_0, q_1\}, & \delta(q_0, b) &= \{q_1\}, \\ \delta(q_1, a) &= \emptyset, & \delta(q_1, b) &= \{q_2\}, \\ \delta(q_2, a) &= \{q_0, q_1, q_2\}, & \delta(q_2, b) &= \{q_1\}. \end{aligned}$$

- δ' :
$$\begin{aligned} \delta'(\emptyset, a) &= \emptyset, & \delta'(\emptyset, b) &= \emptyset, \\ \delta'(\{q_0\}, a) &= \{q_0, q_1\}, & \delta'(\{q_0\}, b) &= \{q_1\}, \\ \delta'(\{q_1\}, a) &= \emptyset, & \delta'(\{q_1\}, b) &= \{q_2\}, \\ \delta'(\{q_2\}, a) &= \{q_0, q_1, q_2\}, & \delta'(\{q_2\}, b) &= \{q_1\}, \\ \delta'(\{q_0, q_1\}, a) &= \{q_0, q_1\}, & \delta'(\{q_0, q_1\}, b) &= \{q_1, q_2\}, \\ \delta'(\{q_0, q_2\}, a) &= \{q_0, q_1, q_2\}, & \delta'(\{q_0, q_2\}, b) &= \{q_1\}, \\ \delta'(\{q_1, q_2\}, a) &= \{q_0, q_1, q_2\}, & \delta'(\{q_1, q_2\}, b) &= \{q_1, q_2\}, \\ \delta'(\{q_0, q_1, q_2\}, a) &= \{q_0, q_1, q_2\}, & \delta'(\{q_0, q_1, q_2\}, b) &= \{q_1, q_2\}. \end{aligned}$$

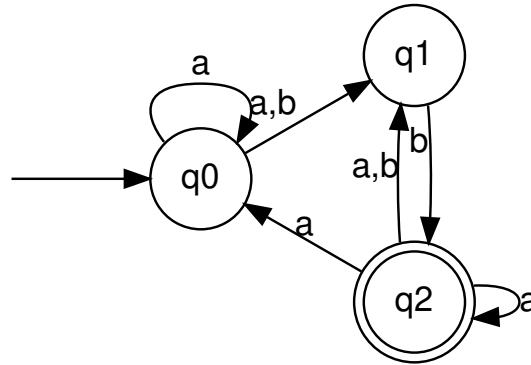
NVA – DVA

Példa (folyt.):

NVA

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a) &= \{q_0, q_1\}, & \delta(q_0, b) &= \{q_1\}, \\ \delta(q_1, a) &= \emptyset, & \delta(q_1, b) &= \{q_2\}, \\ \delta(q_2, a) &= \{q_0, q_1, q_2\}, & \delta(q_2, b) &= \{q_1\}. \end{aligned}$$

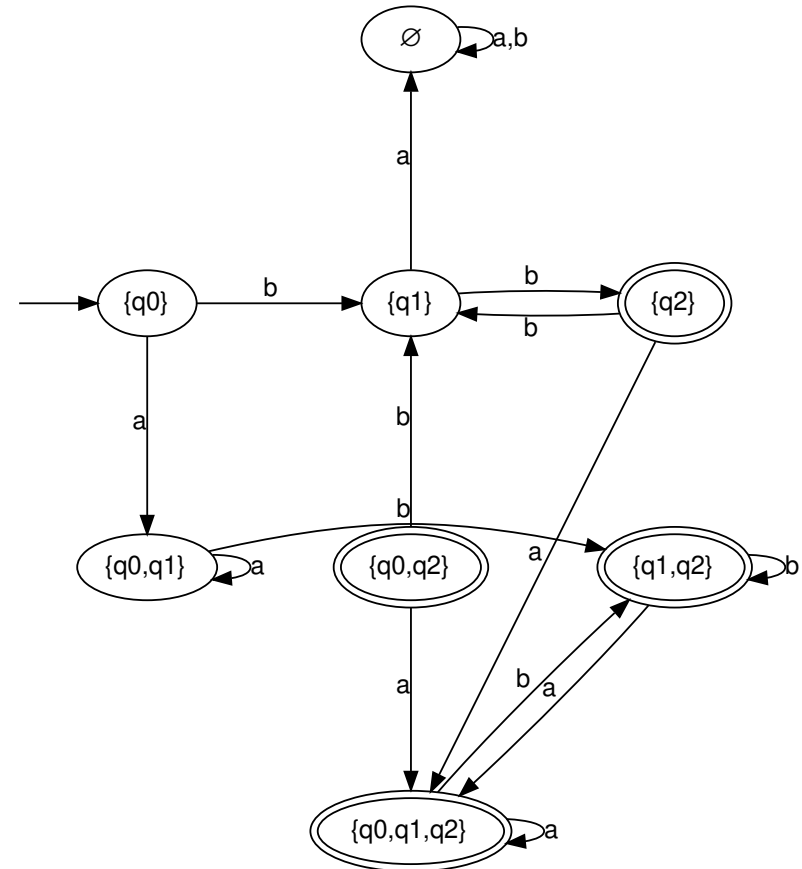
$$F = \{q_2\}$$



DVA

$$\begin{aligned} \delta'(\{\emptyset\}, a) &= \emptyset, & \delta'(\{\emptyset\}, b) &= \emptyset, \\ \delta'(\{q_0\}, a) &= \{q_0, q_1\}, & \delta'(\{q_0\}, b) &= \{q_1\}, \\ \delta'(\{q_1\}, a) &= \emptyset, & \delta'(\{q_1\}, b) &= \{q_2\}, \\ \delta'(\{q_2\}, a) &= \{q_0, q_1, q_2\}, & \delta'(\{q_2\}, b) &= \{q_1\}, \\ \delta'(\{q_0, q_1\}, a) &= \{q_0, q_1\}, & \delta'(\{q_0, q_1\}, b) &= \{q_1, q_2\}, \\ \delta'(\{q_0, q_2\}, a) &= \{q_0, q_1, q_2\}, & \delta'(\{q_0, q_2\}, b) &= \{q_1\}, \\ \delta'(\{q_1, q_2\}, a) &= \{q_0, q_1, q_2\}, & \delta'(\{q_1, q_2\}, b) &= \{q_1, q_2\}, \\ \delta'(\{q_0, q_1, q_2\}, a) &= \{q_0, q_1, q_2\}, & \delta'(\{q_0, q_1, q_2\}, b) &= \{q_1, q_2\}. \end{aligned}$$

$$F' = \{\{q_2\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}$$



A NVA számítási ereje

Lemma 1:

- Minden $p, q \in Q$, $q' \in Q'$ és $u, v \in T^*$ esetén, ha $qu \Rightarrow^*_A pv$ és $q \in q'$, akkor $\exists p' \in Q'$, hogy $q'u \Rightarrow^*_{A'} p'v$ és $p \in p'$.

Biz.:

- Indukció a redukciós lépések száma n szerint $qu \Rightarrow^*_A pv$ redukcióban.
- $n=0$: az állítás triviálisan teljesül, $p'=q'$.

A NVA számítási ereje

Biz. (Lemma 1, folyt.):

- $n \rightarrow n+1$:
TF., az állítás igaz minden $\leq n$ lépésből álló redukcióra.
- Legyen $qu \Rightarrow^*_A pv$ egy $n + 1$ lépésből álló redukció.
Ekkor valamely $q_1 \in Q$ és $u_1 \in T^*$ -re teljesül
 $qu \Rightarrow_A q_1u_1 \Rightarrow^*_A pv$.
- Tehát $\exists a \in T$, amire $u = au_1$ és $q_1 \in \delta(q, a)$.
- Mivel $q \in q'$ -re $\delta(q, a) \subseteq \delta'(q', a)$,
 q_1 megadható mint $q'_1 = \delta'(q', a)$.
- Következésképp, $q'u \Rightarrow_{A'} q'_1u_1$, ahol $q_1 \in q'_1$.
- Az indukciós feltétel alapján,
 $\exists p' \in Q'$, amire $q'_1u_1 \Rightarrow^*_{A'} p'v$ és $p \in p'$, ami bizonyítja az állítást. \square

A NVA számítási ereje

Biz. (Tétel, folyt.):

- Legyen $u \in L(A)$, azaz $q_0u \Rightarrow^*_A p$, valamely $q_0 \in Q_0$ -ra és $p \in F$ -re.
- Lemma 1 alapján $\exists p'$, amire $q'_0u \Rightarrow^*_{A'} p'$, ahol $p \in p'$.
- F' definíciója szerint, $p \in p'$ -ből és $p \in F$ -ből következik, hogy $p' \in F'$, ami bizonyítja, hogy $L(A) \subseteq L(A')$.
- $L(A') \subseteq L(A)$ -hoz bizonyítjuk Lemma 2-t.

A NVA számítási ereje

Lemma 2:

- Minden $p', q' \in Q', p \in Q$ és $u, v \in T^*$ esetén,
 - ha $q'u \Rightarrow^*_{A'} p'v$ és $p \in p'$,
 - akkor $\exists q \in Q$, amelyre $qu \Rightarrow^*_{A} pv$ és $q \in q'$.

Biz.:

- Indukció a redukció lépéseinek száma n alapján.
- $n = 0$: Az állítás triviálisan érvényes.

A NVA számítási ereje

Biz. (Lemma 2, folyt.):

- $n \rightarrow n+1$: TF. Az állítás igaz minden $\leq n$ lépésből álló redukcióra.
- Legyen $q'u \Rightarrow_{A'}^* p'v$ egy $n + 1$ lépésből álló redukció. Ekkor $q'u \Rightarrow_{A'}^* p'_1v_1 \Rightarrow_{A'} p'v$, ahol $v_1 = av$, valamely $p'_1 \in Q'$ -ra és $a \in T$ -re.
- Ekkor $p \in p' = \delta'(p'_1, a) = \bigcup_{p_1 \in p'_1} \delta(p_1, a)$.
- Következésképpen, $\exists p_1 \in p'_1$, amelyre $p \in \delta(p_1, a)$.
- Erre a p_1 -re teljesül, hogy $p_1v_1 \Rightarrow_A pv$.
- Az indukciós feltétel alapján, $qu \Rightarrow_{A'}^* p_1v_1$, valamely $q \in q_0$ -ra, amiből következik az állítás. \square

A NVA számítási ereje

Biz. (Tétel, folyt.):

- Legyen $q'_0 u \Rightarrow^*_{A'} p'$ és $p' \in F$.
- F' definíciója alapján $\exists p \in p'$, amelyre $p \in F$.
- Ekkor, Lemma 2 alapján, valamely $q_0 \in q'_0$ -ra teljesül, hogy $q_0 u \Rightarrow^*_A p$.
- Ez bizonyítja a tétel állítását. \square

Következmények

Korollár 1:

- A reguláris nyelvek osztálya \mathcal{L}_3 zárt a komplementálás operációjára.

Biz.:

- Legyen L egy nyelv, amelyet egy $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ VA felismer/elfogad.
- Ekkor a $\bar{L} = T^* - L$ nyelv felismerhető az $\bar{A} = (Q, T, \delta, q_0, Q - F)$ VA-val.

Következmények

Korollár 2:

- A reguláris nyelvek osztálya \mathcal{L}_3 zárt a metszet operációra.

Biz.:

- Tudjuk, hogy \mathcal{L}_3 zárt az unió operációra.
- $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$.
- Korollár 1 alapján következik az állítás.