Számítási modellek

7: Turing gépek

Algoritmus modellek

- Az 1930-as évektől megnőtt az igény az algoritmusok matematikai modelljének létrehozására.
- Több kísérlet:
  - Kurt Gödel: rekurzív függvények
  - Alonso Church: λ -kalkulus
  - Alan Turing: Turing gép
- Az 1930-as évek második felétől számos tétel született, amelyek ezeknek a modelleknek az azonos számítási erejét állapították meg.
- Később sok más számítási modellnél bebizonyosodott, hogy számítási erejük megegyezik a Turing gépekkel. Például:
  - 0-típusú grammatikák
  - veremautomata 2 vagy több veremmel
  - RAM
  - C, Java, Python, stb…

Church-Turing tézis

- Nem ismerünk olyan számítási modellt, amelyről tudnánk, hogy erősebb a Turing gépnél, és a több modellre bizonyított, hogy gyengébb, vagy ekvivalens.

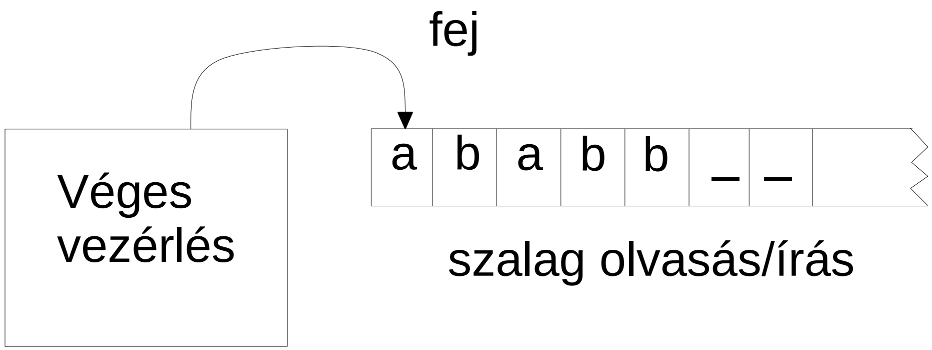
  A 30-as években megfogalmazásra került a következő:

- **Church-Turing tézis**: Minden formalizálható probléma, ami megoldható algoritmussal, az megoldható Turing géppel is.

- NEM TÉTEL!

Turing Gépek (TG)

- Alan Turing vezette be 1936-ban
- A fej tud írni és olvasni
- A fej kétirányú (balra vagy jobbra mozgatható)
- A szalag végtelen (jobbra)
- Az inputot végtelen sok „_“ üres karakter követi
- Bármikor elfogadhatja vagy elutasíthatja (nem csak az input végén)



Turing Gép (TG)

TG példa: TG $L = \{ a^n b^n c^n \mid n \geq 0 \}$ felsmeréséhez.

1 Olvasás (scan) jobbra, amíg el nem érjük _-t közben ellenőrizzük, hogy az input $\{a,b,c\}^*$-ban van-e. Ha nem, elutasítjuk.

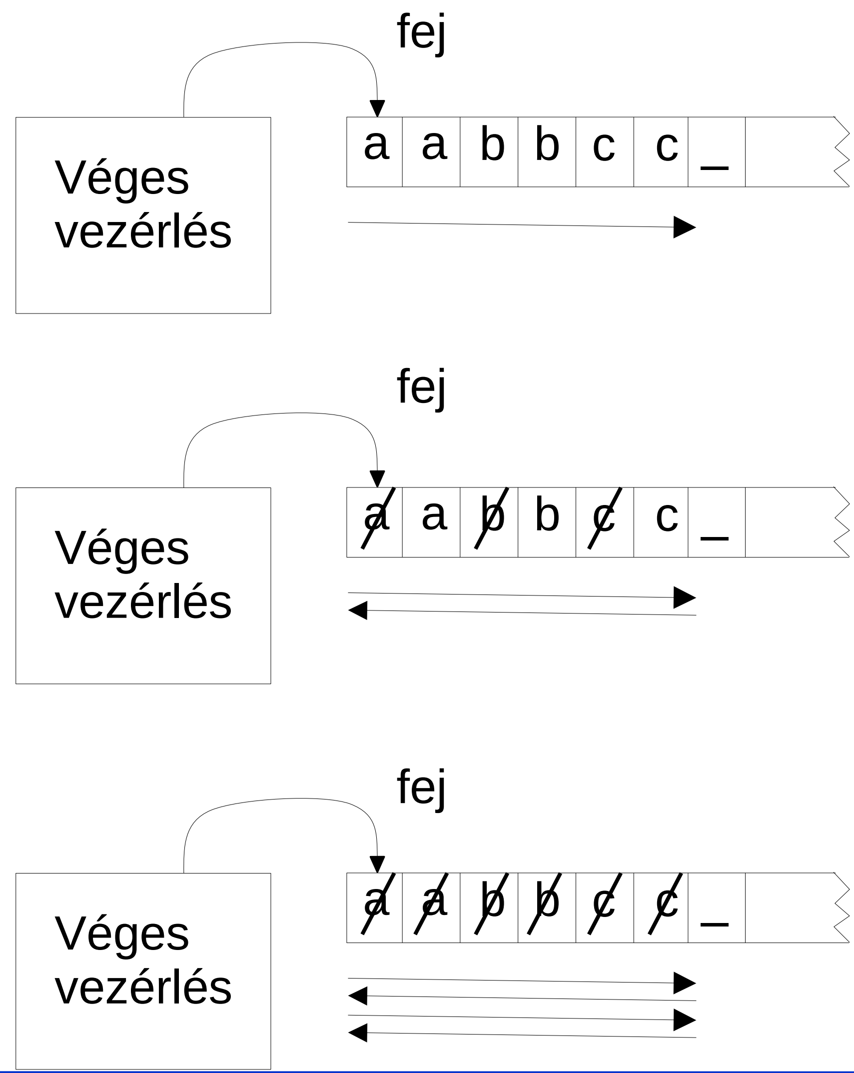
2 A fejet visszavisszük a szalag bal végére.

3 Olvasás (scan) jobbra, áthúzunk egy *a*-t, egy *b*-t, és egy *c*-t.

4 Ha minden szimbólum közül az utolsót áthúztuk, fogadjuk el.

5 Ha valamelyik szimbólum közül az utolsót áthúztuk, de más szimbólum közül nem, utasítsuk el.

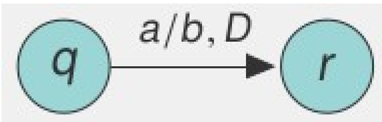
6 Ha áthúzatlan szimbólumok maradnak, visszamegyünk a szalag bal végére és ismételjük a 3 ponttól.



TG – Formális Definíció

- Egy **Turing gép (TG)** egy 7-es $M=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$, ahol Q, Σ, Γ véges halmazok
    - Q: állapotok halmaza
    - Σ: input ábécé (az üres szimbólum $\_ \notin \Sigma$)
    - Γ: szalag ábécé ($\Sigma \subseteq \Gamma$, $\_ \in \Gamma$)
    - $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ átmenet függvény
      (L = Left, R = Right)
        - determinisztikus
    - $q_0 \in Q$: kezdő állapot
    - $q_{accept} \in Q$: elfogadó állapot
    - $q_{reject} \in Q$: elutasító állapot, $q_{reject} \neq q_{accept}$.

- Átmenetdiagram:



megfelel $\delta(q, a) = (r, b, D)$ átmenetnek ($q, r \in Q$, $a, b \in \Gamma, D \in \{L, R\}$)

TG – Számítás

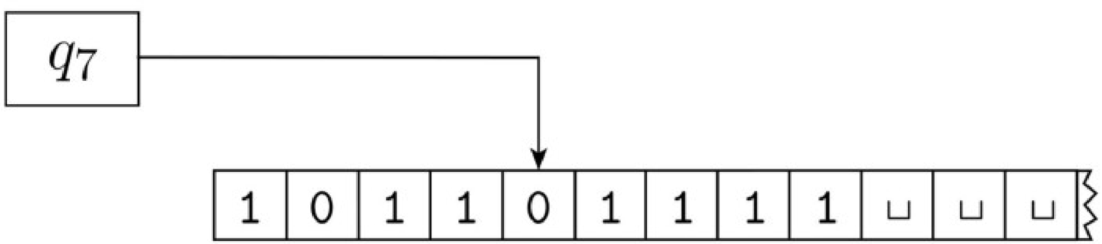
- Az $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ TG a következőkepp végzi a számítást.
- Az inputszó: $w = w_1w_2...w_n \in \Sigma^*$.
    - az inputszalag első n celláján helyezkedik el,
    - a többi cella üres (a _ szimbólumot tartalmazza).
- A legelső _ szimbólum jelzi az input végét.
- Az író-olvasó fej az inputszalag legbaloldalibb celláján áll.
- A számítás az átmenet függvény szerint történik.
    - Ha a fej elérte a szalag bal oldali végét, akkor egy helyben marad, függetlenül attól, hogy az átmenet függvény bal oldalra történő elmozdulást jelzett (L).
- A számítás befejeződik, ha M q_{accept} or q_{reject} állapotba lép.
  Ekkor M megáll.
- Ha egyik eset sem következik be, akkor M sohasem áll meg (loop).

TG – Elfogadás, elutasítás

- Egy M TG 3 lehetséges kimenete egy w inputtal:
  - Elfogadja (q_{accept} állapotba lép)
  - Elutasítja megállással (q_{reject} állapotba lép)
  - Elutasítja úgy, hogy sohasem áll meg (“loop”).

TG – Konfiguráció

- A TG **konfigurációja** egy *uqv* alakú szó, ahol $u,v \in \Gamma^*$ és $q \in Q$.
    - *uv*: a szalag aktuális tartalma
    - *q*: aktuális állapot
    - a fej *v* első szimbólumán áll
    - *v* utolsó szimbólumát csak _ szimbólumok követik a szalagon.
- Példa: $1011q_7 01111$



TG – Konfiguráció átmenet

- $C_1 \vdash C_2$, ha C_1 konfigurációból C_2 konfiguráció **egy lépésben** (közvetlenül) **elérhető**:
  Legyen $a, b, c \in \Gamma$ és $u, v \in \Gamma^*$. Legyen q_i, $q_j \in Q$.
  - $uaq_ibv \vdash uq_jacv$ ha $\delta(q_i,b) = (q_j,c,L)$,
  - $uaq_ibv \vdash uacq_jv$ ha $\delta(q_i,b) = (q_j,c,R)$.

- Speciális esetek:
  - A szalag bal oldali végén
    - $q_ibv \vdash q_jcv$ ha $\delta(q_i,b) = (q_j,c,L)$,
      (megakadályozza, hogy a TG leessen a szalag bal végén)
    - $q_ibv \vdash cq_jv$ ha $\delta(q_i,b) = (q_j,c,R)$.
  - Az input jobb oldali végén
    - uaq_i ekvivalens a $uaq_i\_$ konfigurációval.

TG – Elfogadás, Elutasítás, Megállás

- Az M TG **kezdőkonfigurációja** w inputtal: q_0w.
- **Elfogadó konfiguráció:** a konfiguráció állapota q_{accept}.
- **Elutasító konfiguráció:** a konfiguráció állapota q_{reject}.
- Elfogadó és elutasító konfigurációk **megállási konfigurációk**
  - Nem vezetnek további konfigurációkhoz.
- δ megadható mint: $\delta: Q' \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$, ahol $Q' = Q \setminus \{q_{accept}, q_{reject}\}$.

TG – elfogadott nyelv

- Egy M TG a w inputszót **elfogadja**, ha létezik olyan $C_1, C_2, \ldots, C_k$ konfiguráció-sorozat, ahol

  1. C_1 az M kezdő konfigurációja w inputtal,

  2. $C_i \vdash C_{i+1}$, $1 \leq i \leq k - 1$ és

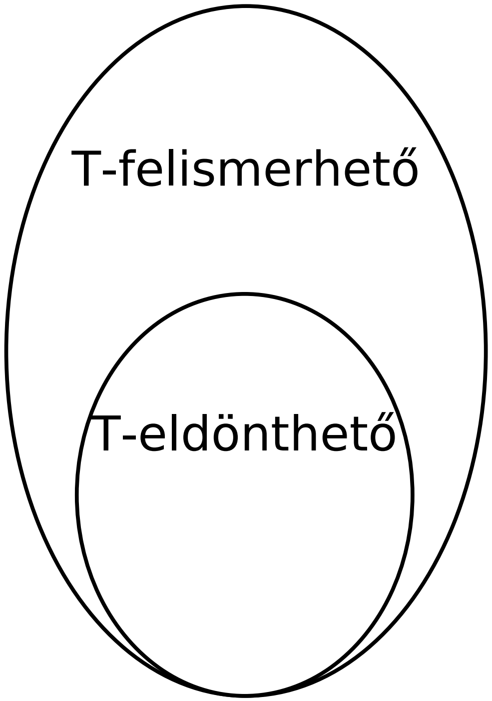
  3. C_k egy elfogadó konfiguráció.

- Azon szavak halmazát, melyet M elfogad/felismer, az M által **elfogadott/felismert nyelv**nek nevezzük és $L(M)$-mel jelöljük, azaz
  - $L(M) = \{ w \mid M \text{ elfogadja } w\text{-t}\}$.

TG – Felismerés, Eldöntés

- Egy M TG **felismeri** L-t, ha $L = L(M)$.
- Egy L nyelv **Turing-felismerhető**, ha $L = L(M)$ valamely M TG-re.
- Turing-felismerhető nyelvek a **rekurzívan felsorolható** nyelvek.

- Egy M TG egy **eldöntő**, ha M minden inputtal megáll.
- M **eldönti** L-t, ha $L=L(M)$ és M egy eldöntő.
- Egy L nyelv **Turing-eldönthető**, ha $L = L(M)$ valamely M eldöntő TG-re.
- Turing-eldönthető nyelvek a **rekurzív** nyelvek.

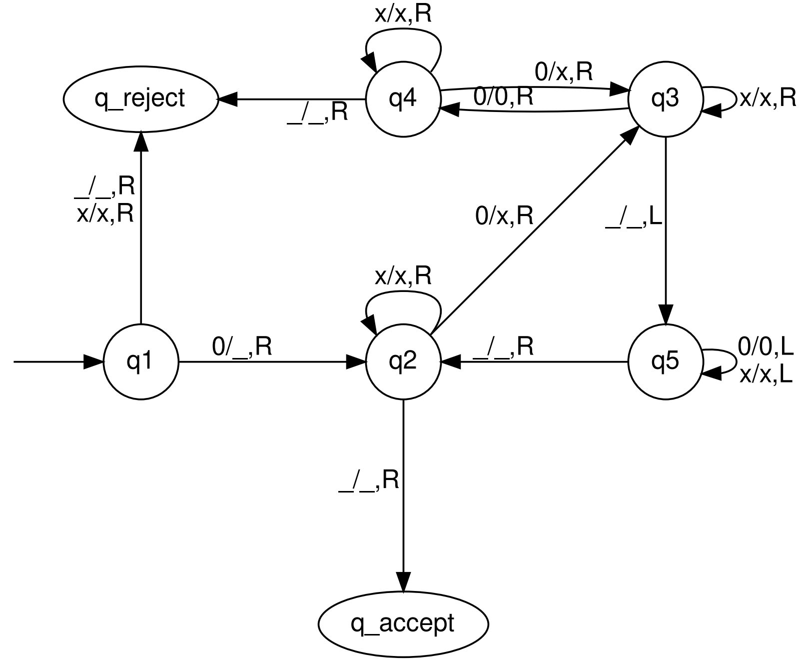


Eldöntő TG Példa

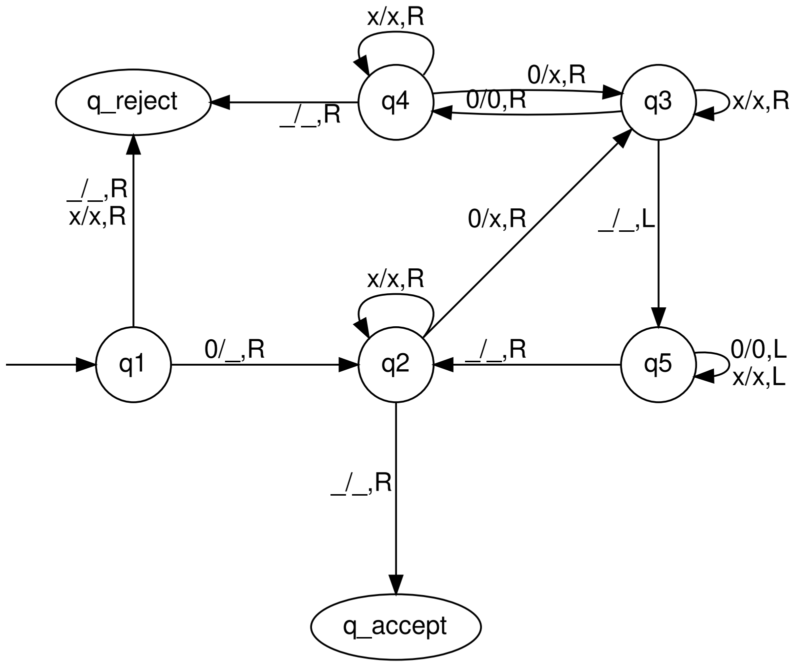
- Példa: TG *M*, amely eldönti $L = \{0^{2^n} | n \geq 0\}$ -t.
- *M* a *w* inputtal:

  1. Olvassuk (scan) a szalagot balról jobbra és húzzunk át minden második 0-t.
  2. Ha az 1. pontban a szalag egyetlen 0-t tartalmazott, elfogadjuk.
  3. Ha az 1. pontban a szalag több mint egy 0-t tartalmazott és a 0-k száma páratlan volt, elutasítjuk.
  4. Vigyük vissza a fejet a szalag bal végéhez.
  5. Go to 1.

- Formális leírás:
  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, q_{accept}, q_{reject})$:
  - $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_{accept}, q_{reject}\}$,
  - $\Sigma = \{0\}$, $\Gamma = \{0, x, \_\}$.
  - δ az állapot átmenet diagrammal adott:



Eldöntő TG Példa



- Példa: TG *M*, amely eldönti

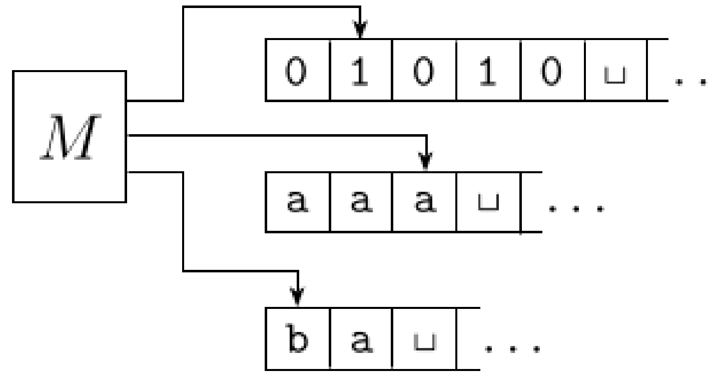
$$L = \{0^{2^n} | n \geq 0\}.$$

- *M* futása a 0000 inputtal:

$q_1 0000$	$\sqcup q_5 \mathrm{x} 0 \mathrm{x} \sqcup$	$\sqcup \mathrm{x} q_5 \mathrm{x}\mathrm{x} \sqcup$
$\sqcup q_2 000$	$q_5 \sqcup \mathrm{x} 0 \mathrm{x} \sqcup$	$\sqcup q_5 \mathrm{x}\mathrm{x}\mathrm{x} \sqcup$
$\sqcup \mathrm{x} q_3 00$	$\sqcup q_2 \mathrm{x} 0 \mathrm{x} \sqcup$	$q_5 \sqcup \mathrm{x}\mathrm{x}\mathrm{x} \sqcup$
$\sqcup \mathrm{x} 0 q_4 0$	$\sqcup \mathrm{x} q_2 0 \mathrm{x} \sqcup$	$\sqcup q_2 \mathrm{x}\mathrm{x}\mathrm{x} \sqcup$
$\sqcup \mathrm{x} 0 \mathrm{x} q_3 \sqcup$	$\sqcup \mathrm{x}\mathrm{x} q_3 \mathrm{x} \sqcup$	$\sqcup \mathrm{x} q_2 \mathrm{x}\mathrm{x} \sqcup$
$\sqcup \mathrm{x} 0 q_5 \mathrm{x} \sqcup$	$\sqcup \mathrm{x}\mathrm{x}\mathrm{x} q_3 \sqcup$	$\sqcup \mathrm{x}\mathrm{x} q_2 \mathrm{x} \sqcup$
$\sqcup \mathrm{x} q_5 0 \mathrm{x} \sqcup$	$\sqcup \mathrm{x}\mathrm{x} q_5 \mathrm{x} \sqcup$	$\sqcup \mathrm{x}\mathrm{x}\mathrm{x} q_2 \sqcup$
		$\sqcup \mathrm{x}\mathrm{x}\mathrm{x} \sqcup q_{\mathrm{accept}}$

TG Változatok – Többszalagos TG

- Többszalagos TG:
  - Minden szalag saját író-olvasó fejjel rendelkezik.
  - Kezdetben az input az 1. szalagon van, a többi szalag üres.



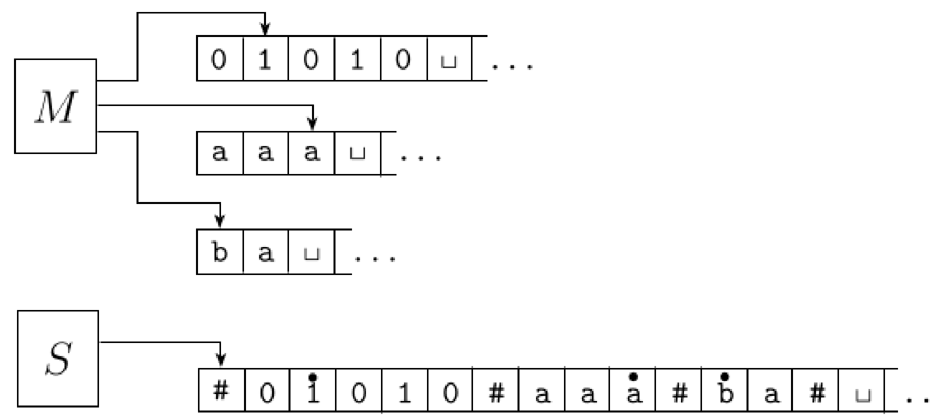
  - Az átmenet függvény lehetővé teszi a szalagokról való egyidejű olvasást, a szalagokra történő egyidejű írást, és az író-olvasó fejek egyidejű léptetése:
    - $\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$,
      ahol k a szalagok száma,
      S: "stay put" a fej helyben marad. Helyettesíthető egy jobbra lép, majd egy balra lép átmenettel.
    - azaz $\delta(q_i, a_1, \ldots , a_k) = (q_j, b_1, \ldots. , b_k, L, R, \ldots , L)$

Egyszalagos, Többszalagos TG

Tétel: Minden többszalagos TG-hez konstruálható azzal ekvivalens egyszalagos TG.

Biz.: Egy többszalagos *M* TG átalakítása egy ekvivalens egyszalagos *S* TG-pé.

- *S* szimulálja *M*-et úgy, hogy *S* egyetlen szalagján tárolja az *M* gép $k \geq 2$ darab szalagjának tartalmát blokkokban. A blokkok egy új # szimbólumma vannak elválasztva.



- Az *M* gép *k* szalagjának tartalma *S* egy szalagján: #*w*#_#_#_..._#, ahol *w* az *M* első szalagjának tartalma.
- A fejek pozícióit pontozott szimbólumokkal tartjuk nyilván (a pontozott szimbólumok újonnan bevezetett szimbólumok).

Egyszalagos, Többszalagos TG

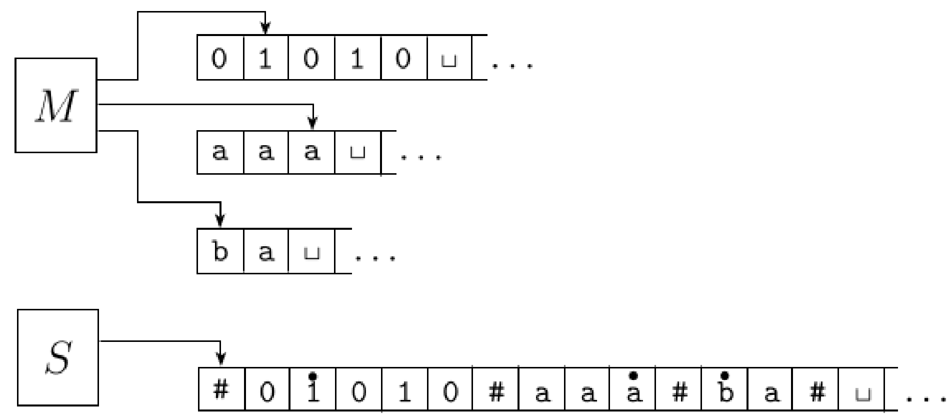
Biz. (folyt.):

- *S* működése:
- 1. *M* minden lépéséhez:

  a: Pásztázzuk végig (scan)
  a szalagot, hogy megtaláljuk
  a pontozott szimbólumokat.

  b: Pásztázzuk végig (scan)
  újra, hogy aktualizáljunk
  az *M* gép δ-jának megfelelően.

  c: Shifteljünk, hogy helyet
  csináljunk, ha kell.



- 2. Elfogadjuk/elutasítjuk ha *M* azt teszi. $\square$

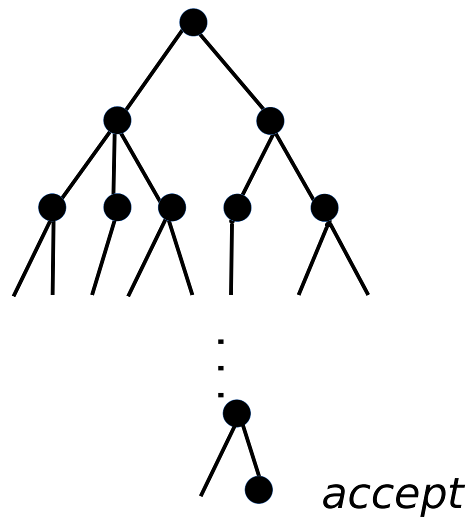
Nemdeterminisztikus TG

- Egy **nemdeterminisztikus TG** (NTG) hasonló a determinisztikus TG-hez, kivéve az átmeneti függvényét $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$.

Tétel: Minden *N* NTG-hez van azzal ekvivalens determinisztikus TG *M*.

Biz.: Ötlet:

- Egy NTM *N* számítása *w* inputtal reprezentálható egy fával (számítási fa)
  - A csomópontok megfelelnek a konfigurációknak,
  - A gyökér megfelel a kezdő konfigurációnak.
- *M* próbálja az *N* nemdeterminisztikus számításának összes lehetséges ágát. (BFS)
- Ha *M* elér egy elfogadó állapotot egy ágon, *M* elfogad és megáll. Különben, *M* nem áll meg. $\square$

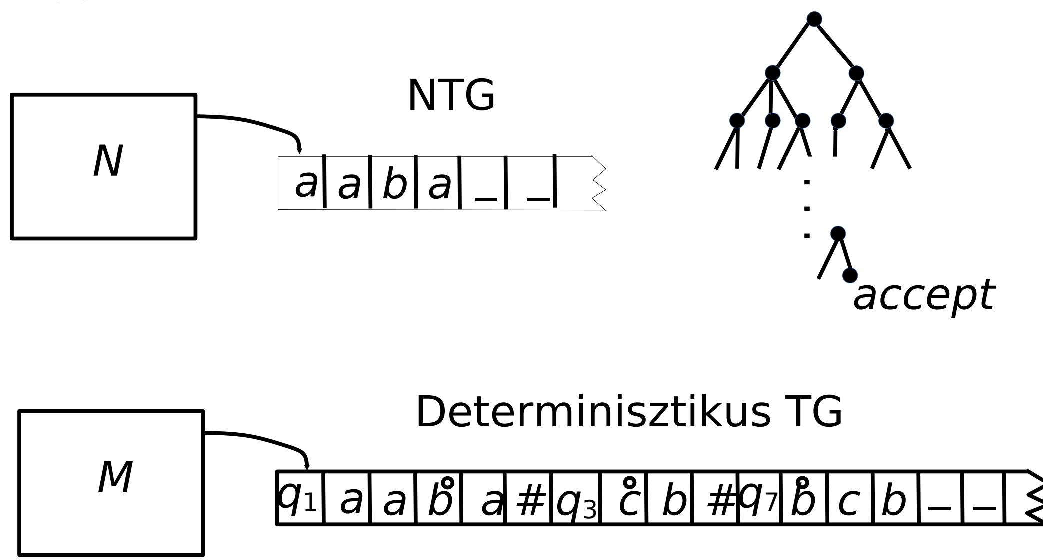


Nemdeterminisztikus TG

Tétel: Minden *N* NTG-hez van azzal ekvivalens determinisztikus TG *M*.

Biz.:

- *M* szimulálja *N*-t úgy, hogy minden egyes szál szalagját külön „blokkban” tárolja a szalagon.
  A blokkok egy új # szimbólummal vannak elválasztva.
- Minden blokkban tárolja a fej pozícióját és
- a szálhoz tartozó állapotot.
- Ha egy szál elágazik, *M* lemásolja a blokkot.
- Ha egy szál elfogad, *M* elfogad. □

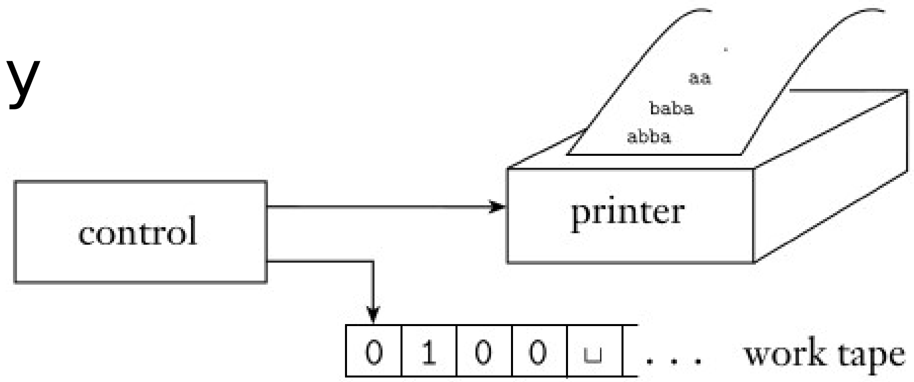


Következmények

- **Korollár**: Egy nyelv Turing-felismerhető, akkor és csak akkor, ha van azt felismerő többszalagos TG.
- **Korollár**: Egy nyelv Turing-felismerhető, akkor és csak akkor, ha van azt felismerő nemdeterminisztikus TG.
- **Megjegyzés**: Az előző tétel bizonyítását módosíthatjuk úgy, hogy ha *N* a nemdeterminisztikus számítás minden ágán megáll, akkor *M* is megáll. Egy NTG *N* egy **eldöntő** ha *N* minden inputra minden ágon megáll.
- **Korollár**: Egy nyelv akkor és csak akkor eldönthető, ha van azt eldöntő nemdeterminisztikus TG.

Turing Enumerátor

- Egy **Turing Enumerátor** egy determinisztikus TG egy nyomtatóval.



- Egy üres szalaggal kezd és ki tudja nyomtatni a $w_1, w_2, w_3, \ldots$ szavakat. Lehetséges, hogy örökké fut.
- A felsorolt **nyelv** azon **szavak halmaza, melyeket kinyomtat**. (Egy generátor, nem egy felismerő.)
- E enumerátorhoz: $L(E) = \{w \mid E \text{ kinyomtatja } w\text{-t}\}$.

Turing Enumerátor

Tétel: Egy L nyelv akkor és csak akkor Turing-felismerhető, ha $L=L(E)$ valamely E Turing enumerátorra.

Biz.:

- (←) E enumerátor konvertálása ekvivalens M TG-re.
  - M működése w inputtal:
    - Szimuláljuk E-t (üres inputtal).
    - Amikor E kiír egy x szót, ellenőrizzük, hogy $x=w$.
    - Elfogadjuk, ha =, máskülönben folytatjuk a szimulálációt.
- (→) TM M konvertálása ekvivalens E enumerátorra.
  - E = Szimuláljuk M-et minden $w_i \in \Sigma^*=\{\varepsilon,0,1,00,01,10,11,\ldots\}$ szóra
    - Amikor M elfogadja w_i-t, kiírjuk w_i-t.
    - Folytassuk a következő w_i-vel.
  - Probléma: Mi van, ha M sohasem áll meg w-vel?
  - Megoldás: Szimuláljuk M TG i lépését $w_1,w_2,\ldots,w_i$ szavakkal, $i=1,2,\ldots$ Kiírjuk azokat w_j-ket, $j\leq i$, amelyeket elfogad M. □

TG és 0. Típusú Grammatikák

Tétel: Minden 0. típusú G grammatikához megadható egy NTG, amely felismeri az $L(G)$-t.

Biz.:

- Legyen M egy TG 3 szalaggal,
  - az első szalag az M inputját tartalmazza,
  - a második szalag tartalmazza G szabályait,
  - a harmadik szalagon mindig van egy α sztring (kezdetben a G kezdőszimbóluma).
- 1. M nemdeterminisztikusan választ egy $p \rightarrow q$ szabályt és egy pozíciót α-ban.
- 2. Ha a pozíció p-vel kezdődik, azaz $\alpha = xpy$, akkor kicseréli ki p-t q-ra, az új α sztring xqy lesz.
- 3. Ha az 1. és 3. szalag tartalma egyenlő, akkor M megáll q_{accept} állapottal. Máskülönben, ismételjük 1-től.
- Világos, $L(M) = L(G)$ $\square$

Korollár: Az előző tétel alapján egy determinisztikus TG is megadható.

TG és 0. Típusú Grammatikák

Tétel: Minden $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ determinisztikus TG-hez megadható egy G grammatika, amely $L(M)$ nyelvet generálja.

Biz.:

- G mondatformái M konfigurációit kódolják.
  G az ellenkező irányba halad.
  Nemdeterminisztikusan létrehoz egy elfogadó konfigurációt, majd abból megpróbál egy kezdő konfigurációt levezetni.
- Legyen $G = ((\Gamma \setminus \Sigma) \cup Q \cup \{S, A, \triangleright, \triangleleft\}, \Sigma, P, S)$, ahol P:

  1) $S \to \triangleright A q_{accept} A \triangleleft$

  2) $A \to aA \mid \varepsilon \quad (\forall\, a \in \Gamma)$

  3) $bq' \to qa$, ha $\delta(q, a) = (q', b, R)$

  4) $q'b \to qa$, ha $\delta(q, a) = (q', b, S)$

  5) $q'cb \to cqa$, if $\delta(q, a) = (q', b, L)$ $(\forall\, c \in \Gamma)$

  6) $\_\triangleleft \to \triangleleft$, $\triangleleft \to \varepsilon$, $\triangleright\_ \to \triangleright$, $\triangleright q_0 \to \varepsilon$

TG és 0. Típusú Grammatikák

Biz. (folyt.):

1) $S \to \triangleright A q_{accept} A \triangleleft$

2) $A \to aA \mid \varepsilon \;\; (\forall\, a \in \Gamma)$

3) $bq' \to qa$, ha $\delta(q, a) = (q', b, R)$

4) $q'b \to qa$, ha $\delta(q, a) = (q', b, S)$

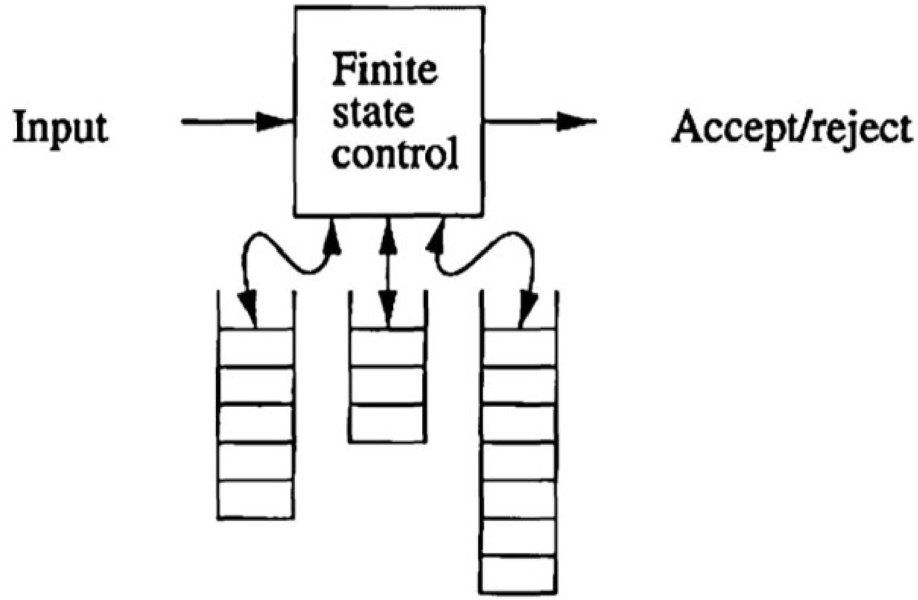
5) $q'cb \to cqa$, if $\delta(q, a) = (q', b, L) \quad (\forall\, c \in \Gamma)$

6) $\_\triangleleft \to \triangleleft$, $\triangleleft \to \varepsilon$, $\triangleright\_ \to \triangleright$, $\triangleright q_0 \to \varepsilon$

- 1)-2) létrehoz egy elfogadó konfigurációt.
- 3)-5) a konfiguráció átmeneteket fordított irányban szimulálja. Azaz, ha pl. $\alpha cqa\beta \vdash \alpha q'cb\beta$ egy $\delta(q, a) = (q', b, L)$ szabály szerint, akkor G-ben az 5-ös pont szerint, $q'cb$ átíródhat cqa-ra.
- 6) Ha a mondatforma egy kezdőkonfiguráció (esetleg néhány extra _ karakterrel), akkor ezek a szabályok törlik a felesleges szimbólumokat.
- Indukcióval a levezetés hossza alapján megmutatható, hogy $q_0 w \vdash^* \alpha q_{accept} \beta$ a.cs.a. $S \Rightarrow^* \triangleright \alpha q_{accept} \beta \triangleleft \Rightarrow^* \triangleright\_^i q_0 w\_^j \triangleleft \Rightarrow^* w$. $\square$

Többvermű gépek

- Egy ***k*-vermű gép** egy determinisztikus veremautomata *k* veremmel.
- Állapotok véges halmaza.
- Véges input ábécé.
- Véges verem ábécé, ugyanaz minden veremre.
- A többvermű gép átmenete függ:
    - az állapottól,
    - az olvasott input szimbólumtól,
    - minden verem tetején lévő veremszimbólumtól.



Többvermű gépek

- A többvermű gép egy **állapot-átmenet** során:
  - állapotot vált,
  - az egyes vermek tetején lévő legfelső veremszimbólumot valahány (a 0-t is beleértve) veremszimbólummal helyettesíti.
- Konfiguráció- (állapot-)átmenet:
  - $\delta(q, a, X_1,\ldots,X_k) = (p, y_1,\ldots,y_k)$.
    - q állapotban X_i szimbólummal az i-edik verem tetején, $i = 1,\ldots,k$, a szimbólumot olvas,
    - p állapotba megy és kicseréli az X_i szimbólumot az i-edik verem tetején y_i-re, minden $i = 1,\ldots,k$-ra.
- A többvermű gép a végállapotába jutva fogadja el az egyes szavakat.
- Feltesszük, hogy az input végén (nem része annak) van egy speciális $ szimbólum, amelyet **végjelzőnek** (endmarker) is hívunk. A $ jelzi az input összes betűjének a feldolgozását.

Többvermű gép vs. TG

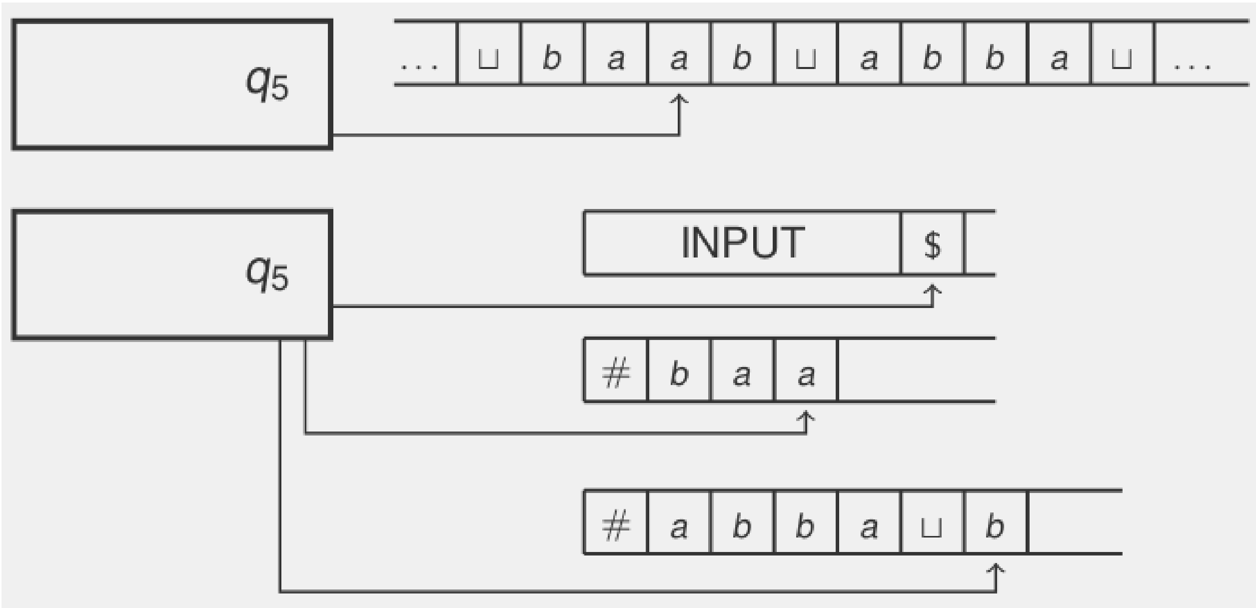
Tétel: Ha egy L nyelv felismerhető egy k-vermű géppel, akkor adható egy TG, ami felismeri L-t.

Biz.: Egy k-vermű gépet egy (k+1) szalagos TG-pel könnyen tudunk szimulálni:

- az első szalagon tároljuk az inputot,
- a többi k szalag a k verem tartalmát tárolja.
- Ha egy lépésben j darab betűt írunk az egyik veremre, akkor azt szimulálhatjuk a TG-pel j lépésben, betűről betűre. $\square$

Többvermű gép vs. TG

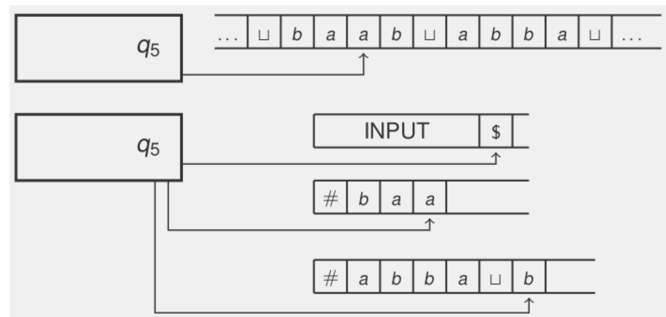
- **Tétel**: Ha egy *L* nyelv felismerhető egy *M* TG-el, akkor adható egy 2-vermű gép *S*, amely felismeri *L*-t.
- **Biz.**: Ötlet: Az egyik verem a TM fejétől balra lévő szimbólumokat tárolja, a másik verem a fejtől jobbra lévő szimbólumokat.



Többvermű gép vs. TG

Biz. (folyt.):

- Kezdetben, az *S* veremei a # verem szimbólummal indulnak
  - # nem eleme *M* szalagábécéjének.
  - # csak a verem aljának jelzésére szolgál.
- Tegyük fel, hogy *S* bemenetén ott van a *w* szó.

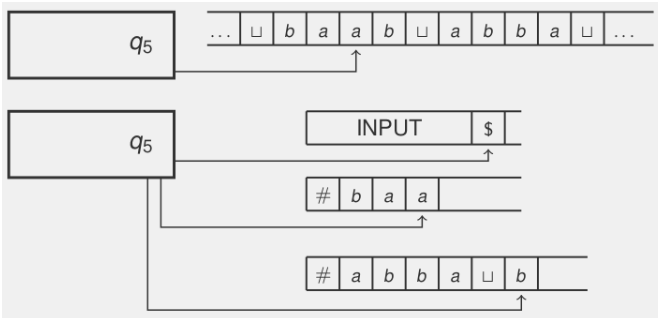


- *S* a *w* szót az első vermébe másolja.
  S befejezi a másolást,
  ha $-t olvasta ($ jelzi az input végét).
- *S* egyenként kiveszi a szimbólumokat az 1.veremből és a 2. verembe helyezi (ε -átmenetekkel).
  Ekkor az 1. verem üres lesz, a 2. verem *w*-t tartalmazza,
  w első betűje lesz a verem tetején.
- *S* az *M* kezdeti állapotának megfelelő állapotba lép.

Többvermű gép vs. TG

Biz. (folyt.):

- *S* az *M* átmenetét a következőképp szimulálja:
- Feltesszük, hogy *S* ismeri *M* állapotát, amelyet *q*-val jelölünk. Ehhez *M* minden *q* állapotához *S*-nek saját megfelelő állapota van.
- *S* ismeri az *X* szimbólumot, amelyet éppen olvas *M*:
  X az *S* második veremének teteje.
  Kivétel, ha a második verem csak #-t (veremvég szimbólum) tartalmaz, ekkor *M* egy _ üres szimbólumra ért.

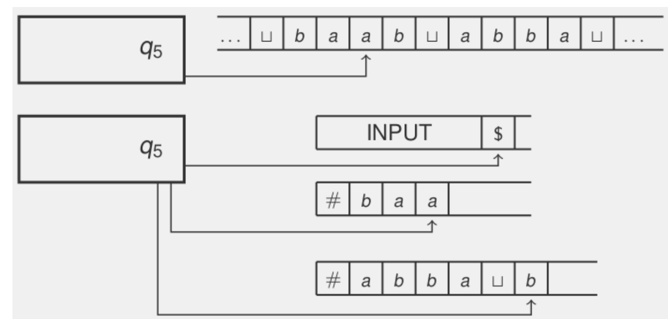


- Így *S* ismeri *M* következő átmenetét.
  S a következő állapotába lép *M* következő állapotának megfelelően.

Többvermű gép vs. TG

Biz. (folyt.):

- Elég csak a balra és a jobbra lépéssel foglalkoznunk.
- Ha *M* egy *X* szimbólumot *Y*-ra cserél és jobbra lép, akkor *S* az *Y*-t az 1. verembe helyezi, és eltávolítja *X*-et a 2. verem tetejéről, azaz *Y* az *M* fejétől balra van.
  Két speciális eset van:
  - Ha a 2. verem csak a # veremalja szimbólumot tartalmazza és így *X* = _ , akkor a 2. verem tartalma nem változik, (*M* még egy _ felé lép jobbra.)
  - Ha *Y* = _ és az 1. verem tetején # van, akkor az 1. verem tartalma változatlan marad. (*M* fejétől balra már csak _ szimbólumok vannak.)



Többvermű gép vs. TG

Biz. (folyt.):

- Ha *M* az *X* szimbólumot *Y*-ra cseréli, és balra mozog, akkor *S* eltávolítja az 1. verem legfelső szimbólumát – nevezzük *Z*-nek –, és a 2. verem tetején lévő *X*-t *ZY*-ra cseréli.
    - Azaz, az *M* fejétől korábban balra lévő szimbólum *Z* lesz a fej alatt. Kivétel az az eset, amikor *Z* a # veremalja szimbólum. Ekkor _*Y* kerül a 2. verem tetejére, és semmit nem távolít el az 1. veremből.
- *S* elfogad, ha *M* új állapota elfogadó állapot, egyébként *S* az *M* következő lépését szimulálja. □

References

- Michael Sipser: Introduction to the Theory of Computation. 3rd edition, 2012.