

Számítási modellek

8: Eldönthetőség, Felismerhetőség

Objektumok kódolása sztringként

- Legyen O egy objektum (pl. automata, TG, polinom, gráf, stb.). Ekkor az O kódolását egy sztringként $\langle O \rangle$ -val jelöljük.
- Legyen $O_1, O_2, \dots, O_k$ objektumok egy listája. Ekkor ezek kódolását egyetlen sztringbe $\langle O_1, O_2, \dots, O_k \rangle$ -val jelöljük.
- Turing gépek leírása:
- Az algoritmusok magyar nyelvű leírását fogjuk használni, amikor TG-eket írunk le, tudva azt, hogy ezeket a leírásokat (elvileg) konvertálni tudjuk állapotokká, átmenetekké, stb.
- $M =$ “ w inputtal:
[Az algoritmus magyar nyelvű leírása]”

Példa

- TG M , amely felismeri $L = \{a^k b^k c^k : k \geq 0\}$ -t.
- $M =$ “ w inputtal:
 - 1) Ellenőrizzük, hogy $w \in a^*b^*c^*$ teljesül-e.
Ha nem, akkor utasítsuk el.
 - 2) Számoljuk meg az a -kat, b -ket és c -ket w -ben.
 - 3) Ha a számuk egyenlő, akkor fogadjuk el, egyébként, utasítsuk el.”
- High-level leírás rendben van.
- Nem kell szalagokat, állapotokat, stb. Kezelni.

TG-k kódolása

- Feltesszük, hogy $\Sigma = \{0,1\}$.
- Egy M TG **kódja** (jelölés: $\langle M \rangle$) a következő:
- Legyen $M = (Q, \{0,1\}, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$, ahol
 - $Q = \{p_1, \dots, p_k\}$, $\Gamma = \{X_1, \dots, X_m\}$, $D_1 = R$, $D_2 = S$, $D_3 = L$,
 - $k \geq 3$, $p_1 = q_0$, $p_{k-1} = q_{accept}$, $p_k = q_{reject}$,
 - $m \geq 3$, $X_1 = 0$, $X_2 = 1$, $X_3 = _$.
 - A $\delta(p_i, X_j) = (p_r, X_s, D_t)$ átmet elkódolva:
 $0^i 10^j 10^r 10^s 10^t$.
 - $\langle M \rangle$: elkódolt átmenetek listája, amelyben az átmenet kódokat 11-gyel választjuk el.
- Megjegyzés: $\langle M \rangle$ 0-val kezdődik és 0-val végződik és nem tartalmazza az 111-t részsstringként.
- $\langle M, w \rangle := \langle M \rangle 111w$

Elfogadási probléma determinisztikus véges automatákra (DVA)

- Legyen $A_{DVA} = \{ \langle B, w \rangle \mid B \text{ egy DVA és } B \text{ elfogadja } w\text{-t} \}$.

Tétel: A_{DVA} eldönthető.

Biz.: Adunk egy M_{A-DVA} TG-t, ami elfogadja A_{DVA} -t.

- $M_{A-DVA} =$ “s inputtal:
 - Ellenőrizzük, hogy az s input $\langle B, w \rangle$ alakú-e, ahol B egy DVA és w egy sztring. Ha nem, akkor utasítsuk el.
 - Szimuláljuk a B számítását w -vel.
 - Ha egy elfogadó állapotban fejeződik be, akkor fogadjuk el. Ha nem, akkor utasítsuk el.”

Elfogadási probléma nemdeterminisztikus VA-ra (NVA)

- Legyen $A_{NVA} = \{ \langle B, w \rangle \mid B \text{ egy NVA és } B \text{ elfogadja } w\text{-t} \}$.

Tétel: A_{DVA} eldönthető.

Biz.: Adunk egy M_{A-NVA} TG-t, ami eldönti A_{NFA} -t.

- $M_{A-NVA} = "$ $\langle B, w \rangle$ inputtal:
 - Alakítsuk át a B NVA-t ekvivalens B' DVA-ra.
 - Indítsuk M_{A-DFA} TG-t $\langle B', w \rangle$ inputtal. [M_{A-DFA} eldönti A_{DFA} -t]
 - Fogadjuk el, ha M_{A-DFA} elfogadja.
 - Utasítsuk el, ha nem."
- Új elem: Használjuk az átalakítást és a korábban elkészített TG-t szubrutinként.

Üresség (emptiness) probléma DVA-ra

- Legyen $E_{DVA} = \{ \langle B \rangle \mid B \text{ egy DVA és } L(B) = \emptyset \}$.

Tétel: E_{DVA} eldönthető.

Biz.: Adunk egy M_{E-DVA} TG-t, ami eldönti E_{DVA} -t.

- $M_{E-DVA} = \text{"}\langle B \rangle \text{ inputra:}$
[Ötlet: Keressünk egy utat a kezdőállapotból egy elfogadó állapotba.]
 - Jelöljük meg a kezdőállapotot.
 - Ismételjük, amíg nem tudtunk új állapotot megjelölni:
 - Jelöljük meg minden állapotot, amelybe már korábban megjelölt állapotból vezetél (átmenet).
 - Fogadjuk el, ha nincs megjelölt elfogadó állapot.
 - Utasítsuk el, ha valamely elfogadó állapot meg van jelölve."

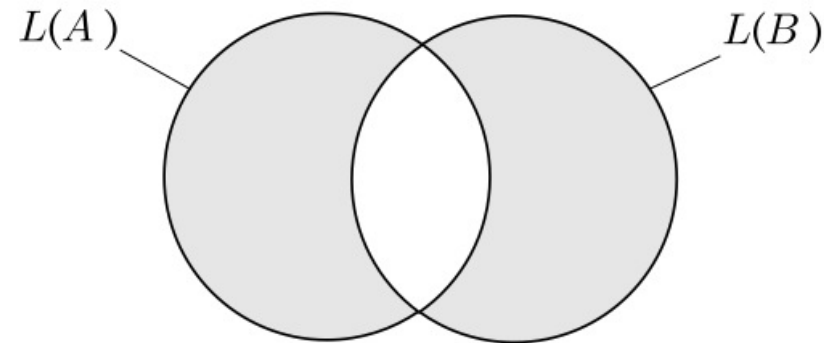
Ekvivalencia probléma DVA-ra

- Legyen $EQ_{DVA} = \{ \langle A, B \rangle \mid A, B \text{ DVA-k és } L(A) = L(B) \}$.

Tétel EQ_{DVA} eldönthető.

Biz.: Adunk egy M_{EQ-DVA} TG-t, ami eldönti EQ_{DVA} -t.

- $M_{EQ-DVA} = \langle A, B \rangle$ inputtal:
[Ötlet: Készítsünk egy C DVA-t, ami azokat a w szavakat fogadja el, ahol A és B különböznek.]
 - Készítsünk egy C DVA-t, melyre
$$L(C) = (L(A) \cap \overline{L(B)}) \cup (\overline{L(A)} \cap L(B))$$
 - Indítsuk M_{E-DVA} -t C inputtal.
 - Fogadjuk el, ha M_{E-DVA} elfogad.
 - Utasítsuk el, ha M_{E-DVA} elutasít.”



Elfogadási probléma környezetfüggetlen grammatikákra (CFG)

- Legyen $A_{CFG} = \{ \langle G, w \rangle \mid G \text{ egy CFG és } G \text{ generálja } w\text{-t} \}$.

Tétel: A_{CFG} eldönthető.

Biz.: Adunk egy M_{A-CFG} TG-t, ami eldönti A_{CFG} -t.

- $M_{A-CFG} = \langle \langle G, w \rangle \text{ inputra:}$
 - Alakítsuk át Chomsky normálformára.
 - Próbáljuk ki az összes $\max(1, 2|w| - 1)$ lépésből álló levezetést.
 - Fogadjuk el, ha valamelyik w -t generálja.
 - Utasítsuk el, ha nem.
- Chomsky normálforma (CNF) csak alábbi alakú szabályok vannak:
 - $A \rightarrow BC$
 - $B \rightarrow b$
 - $S \rightarrow \varepsilon$
- Lemma 1: Minden CFG átalakítható CNF-re.
- Lemma 2: Ha G CNF-ben van és $w \in L(G)$, akkor w minden levezetése $\max(1, 2|w| - 1)$ lépésből áll.

Üresség probléma CFG-re

- Legyen $E_{CFG} = \{ \langle G \rangle \mid G \text{ egy CFG és } L(G) = \emptyset \}$.

Tétel: E_{CFG} eldönthető.

Biz.: Adunk egy M_{E-CFG} TG-t, amely eldönti E_{CFG} -t.

- $M_{E-CFG} = \langle \langle G \rangle \rangle$ inputtal:
[Ötlet: dolgozzunk a terminálisokból indulva visszafelé]
 - Jelöljük meg a terminálisok összes előfordulását G -ben.
 - Ismételjük, amíg nem tudunk új szimbólumot megjelölni
 - Jelöljük meg az A nemterminális összes előfordulását, ha $A \rightarrow B_1 B_2 \dots B_k$ egy szabály és már minden B_i meg van jelölve.
 - Utasítsuk el, ha a kezdőszimbólum meg van jelölve.
 - Fogadjuk el, ha nincs."

Ekvivalencia probléma CFG-re

- Legyen $EQ_{CFG} = \{ \langle G, H \rangle \mid A, B \text{ CFG-k és } L(G) = L(H) \}$.

Tétel: EQ_{CFG} nem eldönthető.

Megjegyzés: CF nyelvek nem zártak a komplementer és a metszet műveletekre.

Biz.: l. Sipser, 5.1. exercise

Nem Turing-felismerhető nyelvek létezése

- Minden $i \geq 1$ -re, legyen w_i az i -edik eleme a $\{0,1\}^*$ halmaznak, amely rendezett hossz szerint és lexikografikusan, azaz $\{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots\}$.
- Jelölje M_i azt a TG-t aminek a kódja w_i (l. 4. fólia: TG-k kódolása. Ha w_i nem a kódja semmilyen TG-nek, akkor M_i egy tetszőleges TG, ami semmit sem fogad el).

Tétel: Létezik olyan nyelv, ami nem Turing-felismerhető.

Biz.:

- Egy TG egy nyelvet ismer fel.
- A TG-k száma megszámlálhatóan végtelen (a TG-k kódolása egy injekció $\{0,1\}^*$ -be, amelynek számossága megszámlálhatóan végtelen).
- A nyelvek száma $\{0,1\}$ felett, azaz $|\{L \subseteq \{0,1\}^*\}|$ nem megszámlálhatóan végtelen (continuum kardinalitású).



Egy nem Turing-felismerhető nyelv: L_d

Tétel: Legyen $L_d = \{w_i : w_i \notin L(M_i)\}$ (L_d a diagonális nyelv).
 L_d nem Turing-felismerhető, azaz $L_d \notin RE$.

Biz.: Georg Cantor **diagonalizálási** módszere.

- Tekintsük a T bit táblát, amelyre $T(i,j) = 1 \Leftrightarrow w_j \in L(M_i)$ ($i,j \geq 1$).
- Legyen z a végtelen hosszúságú bitsorozat T átlójában és $\bar{z}$ a bitenkénti komplementere z -nek.
- Minden $i \geq 1$ -re, T az i -edik sora az $L(M_i)$ nyelv karakterisztikus vektora.
- $\bar{z}$ az L_d nyelv karakterisztikus vektora.
- Ha L_d felismerhető lenne egy D TG-vel, akkor D karakterisztikus vektora egy sor lenne T -ben.
- $\bar{z}$ különbözik T minden sorától, így L_d különbözik minden RE beli nyelvtől. $\square$

T	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	...	$\langle D \rangle$	...
M_1	<u>1</u>	0	1		1	
M_2	0	<u>1</u>	1	...	0	...
M_3	1	0	<u>0</u>		1	
$\vdots$		$\vdots$		$\ddots$		
D	0	0	1		<u>?</u>	
$\vdots$		$\vdots$				$\ddots$

$$\bar{z} = 001\dots$$

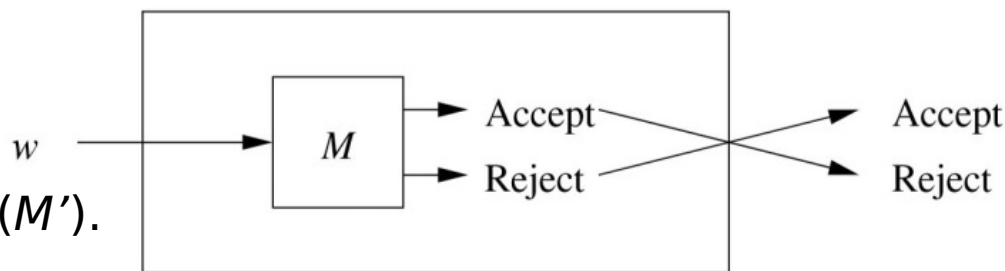
Rekurzív nyelvek R

- Egy L nyelv **rekurzív** ($L \in R$), ha $L = L(M)$ valamely M **eldöntő** TG-re.

Tétel: Ha $L \in R$, akkor $\bar{L} \in R$.

Biz.:

- Legyen $L = L(M)$ valamely M TG-re, amely megáll minden inputtal. Konstruálunk egy M' TG-t, ú.h. $\bar{L} = L(M')$.



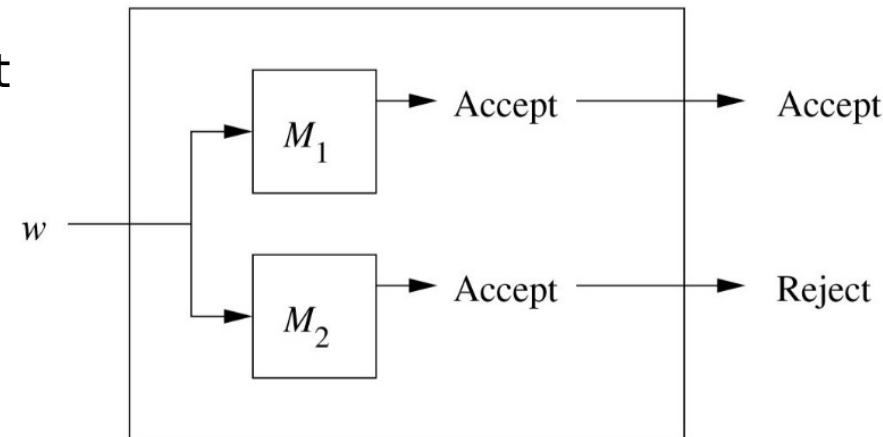
- M elfogadó állapotai lesznek M' elutasító állapotai.
- M' -nek lesz egy új elfogadó állapota: r (r -ből nincs további átmenet).
- M minden q nem elfogadó állapotára és a input szimbólumára, ahol nincs átmenet (q,a) -ra M -ben (M elfogadás nélkül megáll), adjunk (q,a) -hoz átmenetet az r állapotba.
- Mivel M megáll minden input szóval, M' is megáll minden input szóval.
- M' pontosan akkor fogad el egy w szót, ha M nem fogadja el w -t. Így az M' által elfogadott nyelv $\bar{L}$. $\square$

Rekurzívan felsorolható nyelvek (RE) komplementere

Tétel: Ha $L \in RE$ és $\bar{L} \in RE$, akkor $L \in R$ (és $\bar{L} \in R$).

Biz.:

- Legyen $L = L(M_1)$ és $\bar{L} = L(M_2)$. M_1 -t és M_2 -t párhuzamosan szimuláljuk egy M TG-vel.
- Legyen M egy 2-szalagos TG.
 - M az 1. szalagon szimulálja M_1 -t,
 - M a 2. szalagon szimulálja M_2 -t.
 - M állapotai megfelelnek $Q_1 \times Q_2$ állapotpároknak (M_1 és M_2 állapotai)
- Ha M inputja $w \in L$, akkor M_1 elfogadja w -t és megáll. Ekkor M elfogadja w -t és megáll.
- Ha M inputja $w \in \bar{L}$, akkor M_2 elfogadja w -t és megáll. Ekkor M elutasítja w -t és megáll. Így M minden inputtal megáll és $L(M) = L$.



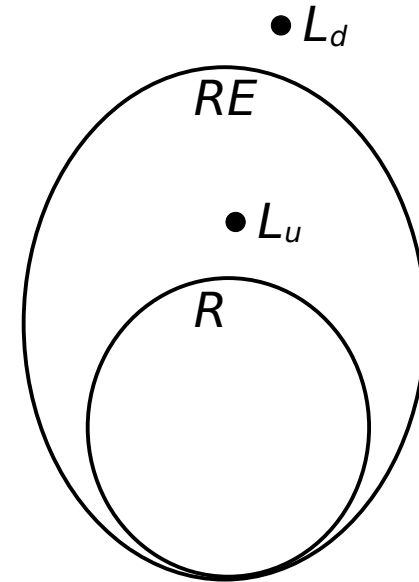
R és RE

- Univerzális nyelv: $L_u = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ egy TG és } w \in L(M) \}$.

Tétel: $L_u \in RE \setminus R$.

Biz.:

- L_u rekurzívan felsorolható (Turing-felismerhető):
- Konstruálunk egy U TG-t, ami felismeri L_u -t.
 U -t az univerzális TG-nek nevezzük.
- Legyen U egy többszalagos TG, ú.h.
 - 1. szalag tartalmazza az inputot, ami M és w kódolása.
 M és w ezen az előadáson bemutatott kódolását használjuk.
 - 2. szalagot M szalagjának szimulálására használjuk.
A 2. szalagot w -vel inicializáljuk.
A 2. szalagon a fejet az első szimulált cellára visszük.
 - 3. szalagot M állapotainak tárolásához használjuk.
A 3. szalagot M kezdőállapotával inicializáljuk.
 - 4. szalagot munkaszalagként használjuk.



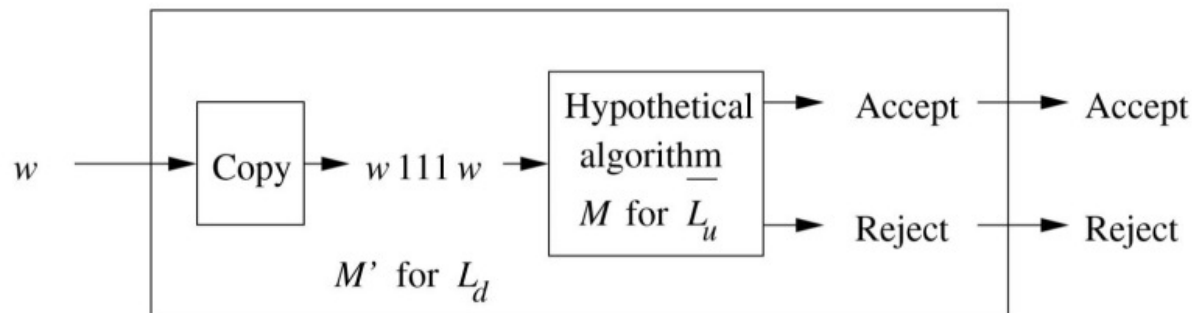
R és RE

Biz. (folyt.):

- M egy átmenetének szimulálása:
 - U megkeresi az 1. szalagon az átmenetet M aktuális állapotára (a 3. szalagon tárolva) és M aktuális szalagszimbólumára (a 2. szalagon tárolva).
 - Ezután U eltárolja az új állapotot a 3. szalagon, U megváltoztatja a szalag szimbólumot a 2. szalagon, U balra vagy jobbra lépteti M író/olvasó fejét a 2. szalagon az átmenet szerint.
 - Ha M végállapotába lép, jelezve, hogy M elfogadja w -t, akkor U elfogadja a $\langle M, w \rangle$ -t és megáll.
- Így, $L(U) = L_u$.
- $\Rightarrow L_u \in RE$

R és RE

Biz. (folyt.):



- L_u nem rekurzív:
- TF. ellentmondáshoz, hogy L_u rekurzív. Ekkor L_u komplementere $\bar{L}_u$ is az.
- Akkor létezni kell egy M TG-nek, amely eldönti $\bar{L}_u$ -t.
- Ekkor át tudjuk alakítani M -et egy M' TG-re, amely elfogadja L_d -t:
 - M' a w inputját $\langle w, w \rangle$ párrá alakítja.
 - M' szimulálja M -et $\langle w, w \rangle$ inputtal, feltételezve, hogy az első w egy M_i TG kódolása, a második w pedig egy w_i bináris sztring kódolása.
 - M eldönti $\bar{L}_u$ -t, így M pontosan akkor fogadja el $\langle w, w \rangle$ -t ha M_i nem fogadja el w_i -t.
- Így M' pontosan akkor fogadja el w -t ha $w \in L_d$.
De korábban megmutattuk, hogy nem létezik olyan TG, amely felismeri L_d -t. Következésképpen M nem létezik.
- $\Rightarrow L_u \notin R$. □

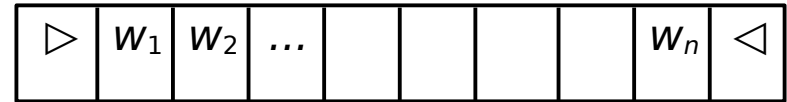
Megállási probléma

- Turing eredeti munkájában a TG-pel történő elfogadást / számítást megállással, nem feltétlenül végállapotban való megállással fogalmazta meg.
- Egy M TG-hez legyen $H(M)$ azon w input szavak halmaza, amelyekkel M megáll (végállapotban vagy nem végállapotban).
- A **megállási probléma**:
 $HALT = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in H(M) \}.$
- **Tétel:** $HALT \in RE \setminus R.$
Biz.: L_u -hoz hasonlóan.
- Hasonló érvek használhatók annak megmutatására, hogy szoftver verifikációval kapcsolatos számos gyakorlati probléma nem eldönthető. Például nem eldönthető, hogy egy program végtelen ciklusba kerül-e.

R és $\mathcal{L}_1$

- Egy **lineárisan korlátolt automata (LKA)**

egy nemdeterminisztikus TG, melynél



- az input ábécé Σ tartalmaz két speciális szimbólumot
 $\triangleright$ (bal végjel/endmarker) és $\triangleleft$ (jobb végjel/endmarker).
- Az input $\triangleright(\Sigma \setminus \{\triangleright, \triangleleft\})^*\triangleleft$ alakú.
- $\triangleright$ és $\triangleleft$ nem írhatók felül.
- A fej nem lehet sem $\triangleright$ -tól balra, sem $\triangleleft$ -tól jobbra.
- A fej kezdőpozíciója a jobb szomszédja annak a cellának, ami $\triangleright$ -t tartalmazza.
- Egy LKA egy olyan NTG, amely korlátos munkaterülettel rendelkezik.
- Nevét egy vele ekvivalens modellről kapta, amelyben a rendelkezésre álló tár az input hosszának konstansszorososa (lineáris függvénye).

R és $\mathcal{L}_1$

Tétel:

- (1) Minden G 1-es típusú grammatikához megadható egy LKA A , melyre $L(A) = L(G)$.
- (2) Minden A LKA-hoz megadható egy G 1-es típusú grammatika, melyre $L(G) = L(A)$.

Biz.:

- (1) Az előző előadáson láttuk, hogy minden G 0. típusú grammatikához lehet konstruálni egy NTG-t, ami $L(G)$ -t felismeri.
- A konstrukció a 3. szalagján nemdeterminisztikusan szimulált egy G -beli levezetést, az iterációk végén ellenőrizte, hogy a 3. szalagon lévő mondatforma megegyezik-e az 1. szalagon lévő w inputtal.
- Ha G 1-es típusú, azaz hossznemcsökkentők a szabályai, akkor a 2. szalagon lévő mondatforma hossza sose haladhatja meg $|w|$ -t, így ez az NTG egy LKA.

R és $\mathcal{L}_1$

Biz. (folyt.):

- (2) Minden A LKA-hoz megadható egy G 1-es típusú grammatika, melyre $L(G) = L(A)$.
- Módosítjuk egy kicsit az előző előadás konstrukcióját.
- Legyen $\Gamma' := \Gamma \setminus \{\triangleright, \triangleleft\}$ és $G = ((\Gamma \setminus \Sigma) \cup Q \times \Gamma' \cup \{S, A\}, \Sigma, P, S)$.
 - 1) $S \rightarrow \triangleright A(q_{\text{accept}}, a) A \triangleleft \mid \triangleright A(q_{\text{accept}}, a) \triangleleft \mid \triangleright (q_{\text{accept}}, a) A \triangleleft \mid \triangleright (q_{\text{accept}}, a) \triangleleft \quad (\forall a \in \Gamma')$
 - 2) $A \rightarrow aA \mid a \quad (\forall a \in \Gamma')$
 - 3) $b(q', c) \rightarrow (q, a)c$ if $(q', b, R) \in \delta(q, a) \quad (\forall c \in \Gamma')$
 - 4) $(q', b) \rightarrow (q, a)$ if $(q', b, S) \in \delta(q, a)$
 - 5) $(q', c)b \rightarrow c(q, a)$ if $(q', b, L) \in \delta(q, a) \quad (\forall c \in \Gamma')$
 - 6) $\triangleright(q_0, a) \rightarrow \triangleright a \quad (\forall a \in \Gamma')$
- 1-2. generálunk egy tetszőleges elfogadó konfigurációt. Mivel A LKA, ezért u elfogadásához elég olyan hosszút, mint u . Ezután a mondatforma hossza fix.
- 3-5. a konfigurációátmeneteket a grammatikában fordított irányban szimuláljuk.

R és $\mathcal{L}_1$

Biz. (folyt.):

- 1) $S \rightarrow \triangleright A(q_{\text{accept}}, a) A \triangleleft \mid \triangleright A(q_{\text{accept}}, a) \triangleleft \mid \triangleright (q_{\text{accept}}, a) A \triangleleft \mid \triangleright (q_{\text{accept}}, a) \triangleleft \quad (\forall a \in \Gamma')$
- 2) $A \rightarrow aA \mid a \quad (\forall a \in \Gamma')$
- 3) $b(q', c) \rightarrow (q, a)c$ if $(q', b, R) \in \delta(q, a) \quad (\forall c \in \Gamma')$
- 4) $(q', b) \rightarrow (q, a)$ if $(q', b, S) \in \delta(q, a)$
- 5) $(q', c)b \rightarrow c(q, a)$ if $(q', b, L) \in \delta(q, a) \quad (\forall c \in \Gamma')$
- 6) $\triangleright(q_0, a) \rightarrow \triangleright a \quad (\forall a \in \Gamma')$

- 6. Mivel a grammatika hossz-nemcsökkentő kell legyen technikailag szükségünk van $Q \times \Gamma'$ -beli jelekre, ezekből az utolsó lépésig mindig pontosan egy van a mondatformában.
- Minden $a \in \Sigma \setminus \{\triangleright, \triangleleft\}$, $w \in (\Sigma \setminus \{\triangleright, \triangleleft\})^*$ -ra vagy $a = _$, $w = \varepsilon$ -ra, megmutatható a levezetés hosszára vonatkozó indukcióval, hogy valamely

$x \in \Gamma'$, $\alpha, \beta \in (\Gamma')^* : \triangleright q_0 a w \triangleleft \vdash^* \triangleright \alpha q_{\text{accept}} x \beta \triangleleft$ akkor és csak akkor ha
 $S \Rightarrow^* \triangleright \alpha (q_{\text{accept}}, x) \beta \triangleleft \Rightarrow^* \triangleright (q_0, a) w \triangleleft \Rightarrow \triangleright a w \triangleleft.$

□

R és $\mathcal{L}_1$

Tétel: Ha A egy LKA, akkor $L(A)$ eldönthető.

Biz.:

- Legyen w egy input szó, $|w|=n$. A lineáris korlátoltság miatt a lehetséges konfigurációk száma egy w inputra legfeljebb $m(w) = |Q| \cdot n \cdot |\Gamma|^n$.
- Minden számítás, ami hosszabb mint $m(w)$, végtelen cikluhoz vezet.
- Legyen M' egy TG, amely $\langle A, w \rangle$ inputtal, ahol A egy LKA és w egy sztring
 - 1) Szimulálja A -t w -vel $\leq m(w)+1$ lépésen át
 - 2) Ha A elfogad/elutasít ezen pont előtt, M' elfogad/elutasít mint A .
 - 3) Máskülönben elutasít.
- Nyilván $L(M') = L(A)$ és M' eldönti $L(A)$ -t. $\square$

R és $\mathcal{L}_1$

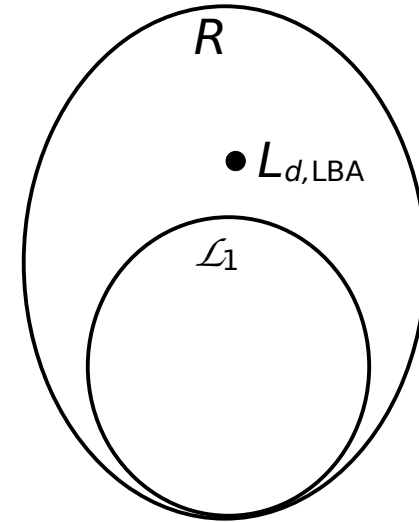
Tétel: $\mathcal{L}_1 \subset R$.

Biz.:

- Az előző 2 tétel alapján $\mathcal{L}_1 \subseteq R$.
- Legyen $L_{d,LBA} = \{ \langle A \rangle : A \text{ egy LBA és } \langle A \rangle \notin L(A) \}$.
- $L_{d,LBA}$ eldönthető:
 - LKA A -hoz legyen S egy TG, amely
 - q_{accept} állapotba megy, ha $\langle A \rangle \notin L(A)$ és
 - q_{reject} állapotba megy, ha $\langle A \rangle \in L(A)$.

Mivel $L(A)$ eldönthető, S mindig megáll. $\Rightarrow L_{d,LBA} \in R$.

- $L_{d,LBA}$ nem felismerhető LKA-val with LBA ($\Rightarrow L_{d,LBA} \notin \mathcal{L}_1$)
 - Cantor diagonalizáció módszerével
 - TF. ellentmondáshoz, hogy $L_{d,LBA}$ felismerhető egy S LKA-val, azaz $L(S) = L_{d,LBA}$.
 - ha $\langle S \rangle \in L_{d,LBA} = L(S)$, akkor S elfogadja $\langle S \rangle$ -t, így $\langle S \rangle \notin L_{d,LBA}$, ellentmondás,
 - ha $\langle S \rangle \notin L_{d,LBA} = L(S)$, akkor S nem fogadja el $\langle S \rangle$ -t, így $\langle S \rangle \in L_{d,LBA}$, ellentmondás. $\square$



References

- Michael Sipser: Introduction to the Theory of Computation. 3rd edition, 2012.