

Számítási modellek

9: Redukció, kiszámíthatóság, bonyolultság

Redukálhatóság / Visszavezethetőség

- Ha tudjuk, hogy egy probléma eldönthetetlen (pl. $L_u = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ egy TG és } w \in L(M) \}$), akkor ezt fel tudjuk használni, hogy megmutassuk más problémákról, hogy eldönthetetlenek.
- $HALT = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ megáll } w \text{ inputtal} \}$.

Tétel: $HALT$ eldönthetetlen.

Biz. Megmutatjuk, hogy L_u redukálható $HALT$ -ra.

- Ellentmondáshoz tfh. $HALT$ eldönthető.
- Legyen H egy TG, ami eldönti $HALT$ -ot.
- Konstruálunk egy S TG-t, ami eldönti L_u -t.
- $S = \langle M, w \rangle$ inputtal
 1. Futtassuk H -t $\langle M, w \rangle$ inputtal, ami eldönti, hogy M megáll-e w -vel.
Ha nem, elutasítjuk.
 2. Szimuláljuk M -t w inputtal, amíg meg nem áll (megállás garantált H miatt).
 3. Ha M elfogadta, akkor elfogadjuk.
Ha M elutasította, akkor elutasítjuk.
- S eldönti L_u -t, ami ellentmondás. Tehát, H nem létezhet. Így $HALT$ eldönthetetlen. □

Redukálhatóság / visszavezethetőség

- Ha van két nyelvünk (vagy problémánk) A és B , akkor A **redukálható / visszavezethető** B -re azt jelenti, hogy B -t használhatjuk A megoldására.
- Ha A redukálható B -re, akkor B megoldásával megoldást kapunk A -ra.
 - B könnyű \rightarrow A könnyű.
 - A nehéz \rightarrow B nehéz.
(ezt a formát fogjuk használni)

E_{TM} eldönthetetlen

- Legyen $E_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ egy TG és } L(M) = \emptyset \}$

Tétel: E_{TM} eldönthetetlen.

Biz.: Ellentmondással. Megmutatjuk, hogy L_U redukálható E_{TM} -re.

- Tfh. E_{TM} eldönthető. Legyen R egy TG, ami eldönti E_{TM} -t.

- Konstruálunk egy S TG-t, ami eldönti L_U -t.

- $S = \langle M, w \rangle$ inputtal

- 1. Transzformáljuk M -t egy új M_w TG-re:

$M_w = \langle x \rangle$ inputtal

1. Ha $x \neq w$, elutasítjuk.
2. Máskülönben, futtassuk M -t w inputtal
3. Elfogadjuk, ha M elfogadja."

$$L(M_w) = \begin{cases} \{w\} & \text{if } x = w \\ \emptyset & \text{if } x \neq w. \end{cases}$$

2. Használjuk R -t, ami eldönti, hogy $L(M_w) = \emptyset$.

3. Ha igen [ekkor M elutasítja w -t] akkor elutasítjuk.

Ha nem [ekkor M elfogadja w -t] akkor elfogadjuk.

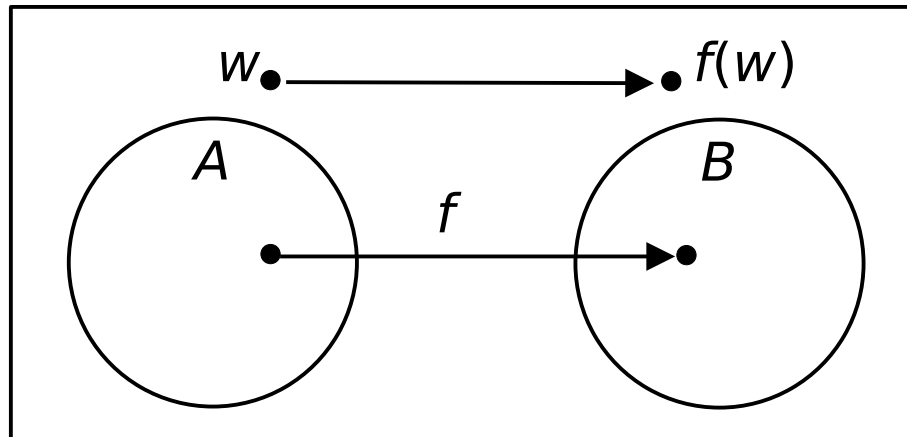
- S eldönti L_U -t, ami ellentmondás. Tehát, E_{TM} eldönthetetlen. \square

Számítási feladatok

- Az eldöntési problémák általánosításai a (ki)számítási problémák.
- Az $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ TG **kiszámítja** az $f: \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ függvényt, ha
 - minden $u \in \Sigma^*$ -beli szóra megáll, és ekkor
 - $f(u) \in \Gamma^*$ olvasható az utolsó szalagján.
- Az $f: \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ függvény **kiszámítható**, ha létezik TG M , amely kiszámítja az f függvényt.

Redukálhatóság / visszavezethetőség

- $A \subseteq \Sigma^*$ **redukálható / visszavezethető** $B \subseteq \Gamma^*$ -re, ha van olyan $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ kiszámítható függvény, hogy $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$. Jelölés: $A \leq B$.



- Példa: $L_u \leq \bar{E}_{TM}$

A redukcióhoz a kiszámítható függvény:
 $f(\langle M, w \rangle) = \langle M_w \rangle$.

Mivel: $\langle M, w \rangle \in L_u \Leftrightarrow \langle M_w \rangle \in \bar{E}_{TM}$
(M elfogadja w -t $\Leftrightarrow L(M_w) \neq \emptyset$)

Emlékeztető: $M_w =$ "x inputtal

1. Ha $x \neq w$, elutasítjuk.
2. Máskülönben, futtassuk M -t w inputtal
3. Elfogadjuk, ha M elfogadja."

Redukció - tulajdonságok

Tétel: HA $A \leq B$ és B eldönthető, akkor A is eldönthető.

Biz.: TF. TG R eldönti B -t.

- Konstruálunk egy S TG-t, ami eldönti A -t:
- $S = "w$ inputtal
 1. Kiszámítjuk $f(w)$ -t
 2. Futtassuk R -t az $f(w)$ inputtal, hogy eldöntsük $f(w) \in B$
 3. Mikor R megáll, írjuk ki ugyanazt az eredményt mint R ."

Korollár: Ha $A \leq B$ és A eldönthetetlen, akkor B is eldönthetetlen.

Tétel: Ha $A \leq B$ és B T-felismerhető, akkor A is T-felismerhető.

Biz.: Mint fent.

Korollár: Ha $A \leq B$ és A nem T-felismerhető, akkor B sem T-felismerhető.

E_{TM} nem T-felismerhető

- Legyen $E_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ egy TG és } L(M) = \emptyset \}$

Tétel: E_{TM} nem T-felismerhető ($E_{TM} \notin RE$).

Biz.: Megmutatjuk, hogy $\bar{L}_u \leq E_{TM}$.

- A redukciós függvény $f(\langle M, w \rangle) = \langle M_w \rangle$
- Emlékeztető: $M_w =$ "x inputtal"
 1. Ha $x \neq w$, elutasítjuk
 2. egyébként futtassuk M -t w inputtal
 3. elfogadjuk, ha M elfogadja w -t."

$$L(M_w) = \begin{cases} \{w\} & \text{if } x = w \\ \emptyset & \text{if } x \neq w. \end{cases}$$

- $\langle M, w \rangle \in \bar{L}_u \iff \langle M_w \rangle \in E_{TM}$
- Ha E_{TM} T-felismerhető lenne, akkor \bar{L}_u is az lenne. Ellentmondás. \square

EQ_{TM} és \overline{EQ}_{TM} nem T-felismerhető

- Legyen $EQ_{TM} = \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid M_1, M_2 \text{ TG-k és } L(M_1) = L(M_2) \}$.

Tétel: EQ_{TM} és \overline{EQ}_{TM} nem T-felismerhető ($EQ_{TM}, \overline{EQ}_{TM} \notin RE$).

Biz.:

1.) $\overline{L}_u \leq EQ_{TM}$

2.) $\overline{L}_u \leq \overline{EQ}_{TM}$

- Minden w szóhoz legyen T_w a következő TG:

$T_w =$ "x inputtal"

1. ignoráljuk x-t

2. szimuláljuk M -t w inputtal

- 1.) Megadjuk az f függvényt, ami \overline{L}_u problémát ($\langle M, w \rangle$ formában adott) EQ_{TM} problémára ($\langle T_1, T_2 \rangle$ formában adott) képez:

- $f(\langle M, w \rangle) = \langle T_w, T_{reject} \rangle$, ahol T_{reject} egy TG, ami mindent elutasít.

- $\langle M, w \rangle \in \overline{L}_u \iff \langle T_w, T_{reject} \rangle \in EQ_{TM}$.

- Ha EQ_{TM} T-felismerhető lenne, akkor \overline{L}_u is az lenne. Ellentmondás.

- 2.) Hasonlóan, $f(\langle M, w \rangle) = \langle T_w, T_{accept} \rangle$, ahol T_{accept} egy TG, ami mindent elfogad.

- $\langle M, w \rangle \in \overline{L}_u \iff \langle T_w, T_{accept} \rangle \in \overline{EQ}_{TM}$.

- Ha \overline{EQ}_{TM} T-felismerhető lenne, akkor \overline{L}_u is az lenne. Ellentmondás. \square

Bonyolultságelmélet - időbonyolultsági osztályok

- Milyen hatékonyan dönthető el az adott probléma?
- $\text{TIME}(f(n)) = \{ L \mid L \text{ eldönthető } O(f(n)) \text{ időigényű determinisztikus TG-pel} \}$
- $\text{NTIME}(f(n)) = \{ L \mid L \text{ eldönthető } O(f(n)) \text{ időigényű nondeterminisztikus TG-pel} \}$
- $P = \bigcup_{k \geq 0} \text{TIME}(n^k)$
- $NP = \bigcup_{k \geq 0} \text{NTIME}(n^k)$
- Nyilvánvaló: $P \subseteq NP$
- Sejtés: $P \neq NP$
- A P vs. NP probléma a “7 Milleneumi Probléma” egyike.
 - Igazolásáért vagy cáfolatáért az Intézet 1M \$-t fizet a Clay Institute.

Bonyolultságelmélet - NP-beli problémák

- NP: bonyolultsági osztály, amely azon L nyelveket tartalmazza, melyekhez létezik L -t **polinom időben eldöntő nemdeterminisztikus** TG.
- Másik definíció: Az NP a determinisztikus TG-pel **polinom időben ellenőrizhető** döntési problémák halmaza.
- Precíz tétellé tehető:
Egy döntési probléma (nyelv) akkor és csak akkor NP-beli, ha minden igen-inputhoz megadható polinom méretű és polinom időben ellenőrizhető **tanú** c (ami igazolja, hogy c valóban igen-input).
- coNP: bonyolultsági osztály, amely azon nyelveket tartalmazza, melyeknek komplementere NP-beli.
 - Nem tudjuk, hogy coNP különbözik-e NP-től.

Polinom idejű redukció

- Az $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ függvény **polinom időben kiszámítható**, ha van olyan TG, ami polinom időben kiszámítja.
- $L' \subseteq \Sigma^*$ **polinom időben redukálható / visszavezethető** $L'' \subseteq \Gamma^*$ -ra, ha van olyan $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ polinom időben kiszámítható függvény, hogy $w \in L' \Leftrightarrow f(w) \in L''$.
Jelölés: $L' \leq_p L''$.
- A polinom idejű redukciót (vagy visszavezetést) **Karp-redukciónak** (vagy **Karp-visszavezetésnek**) is nevezik.

C-teljesség

- Informálisan: ha egy A problémát tudunk redukálni egy B problémára, akkor B legalább olyan nehéz, mint A .
A legnehezebb problémák (egy bonyolultsági osztályban) azok, melyekre minden probléma redukálható.
- Legyen C egy bonyolultsági osztály. Egy L nyelv **C-nehéz** (\leq_p **polinom idejű redukcióra** nézve), ha minden $L' \in C$ esetén $L' \leq_p L$.
- Legyen C egy bonyolultsági osztály. Egy L nyelv **C-teljes**, ha L C-nehéz és $L \in C$.

NP-teljesség

- Ha speciálisan $C = NP$:
- Egy L nyelv NP-teljes, ha
 - $L \in NP$ és
 - L NP-nehéz, azaz minden $L' \in NP$ esetén $L' \leq_p L$
 - \leq_p : polinom idejű redukció
- Megjegyzés: Úgy is fogalmazhatunk, hogy az L eldöntési probléma NP-teljes.
- **Tétel:** Legyen L egy NP-teljes probléma.
Ha $L \in P$, akkor $P = NP$.

P vs. NP

- Az előző tétel szerint, ha valaki találna egy NP-teljes problémára polinom idejű determinisztikus algoritmust, azzal bizonyítaná, hogy $P = NP$.
- Egyetlen NP-teljes problémára sem ismert polinom idejű determinisztikus algoritmus és ha $P \neq NP$, ilyen nem is fogunk találni.
- Az NP-teljes problémákra úgy tekinthetünk, mint eldönthető, de hatékonyan nem eldönthető problémákra.

Cook-Levin tétel

- Kielégíthetőségi (satisfiability) probléma:
 $SAT = \{w \mid w \text{ kielégíthető nulladrendű KNF} \}$
- Példa: KNF:
 $(\neg X_1 \vee X_3) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_3 \vee X_4 \vee X_5) \wedge (X_1 \vee X_2 \vee \neg X_4).$
- **Tétel** (Cook-Levin): SAT NP-teljes.
- **Tétel**: Ha L NP-teljes, $L \leq_p L'$ és $L' \in NP$, akkor L' NP-teljes.
- A következő problémák NP-teljessége ezen tétel alapján bizonyítható.

k-SAT

- A minden tagban pontosan k különböző literált tartalmazó KNF-eket k -KNF-nek nevezzük ($k \geq 1$).
- Példa: 3-KNF:
 $(\neg X_1 \vee X_3 \vee X_5) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_3 \vee X_4) \wedge (X_1 \vee X_2 \vee \neg X_4)$.
- k -SAT = $\{w \mid w \text{ kielégíthető } k\text{-KNF}\}$
- **Tétel:** 3-SAT NP-teljes.
- **Biz.:** Ötlet: A SAT \leq_p 3-SAT redukcióhoz alakítsunk minden $X_1 \vee \dots \vee X_n$ tagot $n-2$ tag konjunkciójára:
 $(X_1 \vee X_2 \vee Y_2) \wedge$
 $(\neg Y_2 \vee X_3 \vee Y_3) \wedge$
 $(\neg Y_3 \vee X_4 \vee Y_4) \wedge \dots \wedge$
 $(\neg Y_{n-3} \vee X_{n-2} \vee Y_{n-2}) \wedge$
 $(\neg Y_{n-2} \vee X_{n-1} \vee X_n)$, ahol Y_2, \dots, Y_{n-2} új változók.
Ez a 3-KNF pontosan akkor lesz kielégíthető, amikor az eredeti KNF.
Az összes tag átalakítása után kapott formula legfeljebb háromszor olyan hosszú, mint az eredeti, azaz a hossznövekedés polinomiális.
- Megjegyzés: 2-SAT $\in P$.

3-Színezhetőség

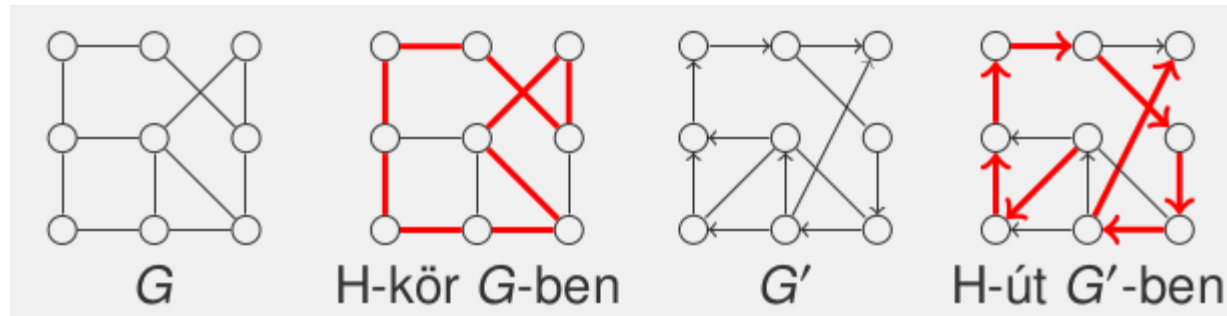
- Legyen $k \geq 1$. Egy gráf **k -színezhető**, ha csúcsai k színnel színezhetők úgy, hogy a szomszédos csúcsok színei különbözőek.
- Példa: Egy 5 csúcsból álló kör 3-színezhető, de nem 2-színezhető.
- k -Színezés = $\{ \langle G \rangle \mid G \text{ gráf } k\text{-színezhető} \}$.
- **Tétel:** 3-Színezés NP-teljes.
- Megjegyzés: 2-Színezés $\in P$.

Klikk, független csúcshalmaz

- A G egyszerű, irányítatlan gráf egy teljes részgráfját **klikknek**, egy üres részgráfját **független csúcshalmaznak** nevezzük.
- Legyen $S \subseteq V(G)$ és $e \in E(G)$. Ha $S \cap e \neq \emptyset$, akkor a S csúcshalmaz **lefogja** e -t. Ha S minden $e \in E(G)$ élt lefog, akkor S egy **lefogó csúcshalmaz**.
- $\text{Klikk} = \{ \langle G, k \rangle \mid G\text{-nek van } k \text{ méretű klikkje} \}$
- $\text{Független csúcshalmaz} = \{ \langle G, k \rangle \mid G\text{-nek van } k \text{ méretű független csúcshalmaza} \}$
- $\text{Lefogó csúcshalmaz} = \{ \langle G, k \rangle \mid G\text{-nek van } k \text{ méretű lefogó csúcshalmaza} \}$
- **Tétel:** Független csúcshalmaz, Klikk, Lefogó csúcshalmaz NP-teljes.

Írányítatlan/írányított Hamilton út/kör

- Adott egy G gráf. Egy a G összes csúcsát pontosan egyszer tartalmazó utat **Hamilton út**nak, egy a G összes csúcsát pontosan egyszer tartalmazó kört **Hamilton kör**nek nevezünk. Ha a gráf irányított, a Hamilton útnak/körnek irányítottnak kell lennie. Jelölés: H-út/H-kör.



- $HÚ = \{ \langle G, s, t \rangle \mid \text{van a } G \text{ irányított gráfban } s\text{-ből } t\text{-be H-út} \} .$
- $IHÚ = \{ \langle G, s, t \rangle \mid \text{van a } G \text{ irányítatlan gráfban } s\text{-ből } t\text{-be H-út} \} .$
- $IHK = \{ \langle G \rangle \mid \text{van a } G \text{ irányítatlan gráfban H-kör} \} .$
- **Tétel:** HÚ, IHÚ, IHK NP-teljes.

Utazóügynök probléma (TSP)

- Optimalizálási verzió: Adott egy élsúlyozott irányítatlan gráf G nemnegatív élsúlyokkal. Határozzuk meg a legkisebb összsúlyú H-kört (ha van).
- Eldöntési verzió:
$$\text{TSP} = \{ \langle G, k \rangle \mid G\text{-ben van } \leq k \text{ súlyú H-kör} \} .$$
- **Tétel:** TSP NP-teljes.

NP lehetséges szerkezete

- NP-köztes nyelv: L NP-köztes, ha $L \in NP$, $L \notin P$ és L nem NP-teljes.
- **Ladner tétele:** Ha $P \neq NP$, akkor létezik NP-köztes nyelv.
- Az alábbi problémáknak se a P-belisége, se NP-nehézsége nem ismeretes (így NP-köztes jelöltek):
 - Gráfizomorfizmus = $\{ \langle G, G' \rangle \mid G \text{ és } G' \text{ irányítatlan izomorf gráfok} \}$.
 - Prímfaktorizáció: adjuk meg egy egész szám prímtényező felbontását [számítási feladat].
 - Kapuminimalizálás: adott digitális áramkört minimális számú logikai kapuval megvalósítani [számítási feladat].

Tárbonyolultság - Az offline Turing gép

- A tárbonyolultság mérésének problémája:
Első megközelítésben a tárigény a működés során felhasznált (vagyis a fejek által meglátogatott) cellák száma.
Probléma: az input hossza így mindig alsó korlát lesz a tárigényre.
- Az **offline Turing gép (OTG)** egy olyan TG, melynek
 - az első szalagja csak olvasható, a többi írható is.
 - Első szalagját bemeneti szalagnak, további szalagjait munkaszalagoknak nevezzük.
- A **nemdeterminisztikus offline Turing gép (NOTG)** ugyanilyen, csak a gép nemdeterminisztikus.
- **Állítás:** Minden TG-hez megadható vele ekvivalens offline TG.

Az offline Turing gépek tárigénye

- A **számító offline Turing gép** olyan legalább 2 szalagos számító TG, melynek az első szalagja csak olvasható, az utolsó szalagja csak írható. Első szalagját bemeneti, utolsó szalagját kimeneti, többi szalagját munkaszalagnak nevezzük.
- Egy OTG **többlet tárigénye** egy adott inputra azon celláknak a száma, melyeken a működés során valamelyik munkaszalag feje járt.
- Egy offline TG **$f(n)$ többlet tárkorlátos**, ha bármely u inputra legfeljebb $f(|u|)$ a többlet tárigénye.
- Számító OTG-re hasonlóan. Nemdeterminisztikus OTG-re (NOTG) értelemszerűen módosítva.

Determinisztikus és nemdeterminisztikus tárbonylolultság

- Az offline TG-pel **szublineáris** (lineáris alatti) tárbonylolultság is lehetséges.
- $SPACE(f(n)) := \{ L \mid L \text{ eldönthető } O(f(n)) \text{ többlet tárkorlátos determinisztikus offline TG-pel} \}$
- $NSPACE(f(n)) := \{ L \mid L \text{ eldönthető } O(f(n)) \text{ többlet tárkorlátos nemdeterminisztikus offline TG-pel} \}$
- $PSPACE := \bigcup_{k \geq 0} SPACE(n^k)$
- $NPSPACE := \bigcup_{k \geq 0} NSPACE(n^k)$
- $L := SPACE(\log n)$
más néven: LSPACE vagy LOGSPACE
- $NL := NSPACE(\log n)$
más néven: NLSPACE vagy NLOGSPACE

Savitch tétele

- **Tétel** (Savitch): Ha $s(n) \in \Omega(\log n)$, akkor $\text{NSPACE}(s(n)) \subseteq \text{SPACE}(s^2(n))$.
- **Korollár**: $\text{PSPACE} = \text{NPSPACE}$.

Hierarchia tétel

- $\text{EXPTIME} := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{TIME}(k^n)$
- **Hierarchia tétel:**
 - $\text{NL} \subset \text{PSPACE}$ és $\text{P} \subset \text{EXPTIME}$.
 - $\text{L} \subseteq \text{NL} = \text{coNL} \subseteq \text{P} \subseteq \text{NP} \subseteq \text{NPSPACE} = \text{PSPACE} \subseteq \text{EXPTIME}$
- Sejtés: A fenti tartalmazási lánc minden tartalmazása valódi.

Kiszámítási problémák közelítő megoldásai

- Jelölje egy kiszámítási (optimalizálási) problémában OPT az optimális értéket (minimumot/maximumot).
- Egy algoritmust **α -közelítő**nek hívunk, ha minden inputra az algoritmus kimenete megengedett és a visszaadott érték OPT-nak
 - minimumkeresési feladat esetén legfeljebb α -szorosa,
 - maximumkeresési feladat esetén legalább $1/\alpha$ -szorosa,
- Példa: Irányított gráfban maximális aciklikus részgráf keresése. Rendezzük sorba a csúcsokat. A sorrend szerint haladva, minden csúcsra vizsgáljuk meg, hogy előre-élből vagy hátra-élből van-e több, a kisebbséghez tartozó éleket dobjuk el. A kapott gráf aciklikus és az élek legalább felét tartalmazza, így az algoritmus 2-közelítő. (Itt a megengedett kimenetek az aciklikus részgráfok.)

NP-nehéz kiszámítási problémák közelítő megoldásai

- Különösen érdekesek a közelítő megoldások az NP-nehéz számítási problémákhoz. A közelítő algoritmustól ilyenkor elvárhatjuk, hogy az hatékony (polinomiális) legyen.
- Példa: Minimális méretű lefogó csúcshalmaz keresése egy G irányítatlan gráfban. A probléma NP-nehéz.

Jelölje $\tau(G) = \min \{ |S| \mid S \text{ lefogó csúcshalmaz } G\text{-ben} \}$.

Megengedett válasz: egy lefogó csúcshalmaz.

- Mohón vegyük sorban minden, az adott pillanatig fedetlen él mindkét végpontját S -hez, amíg van fedetlen él.
- Az algoritmus során talált fedetlen élek párosítást alkotnak, tehát $|S|/2$ csúcsra szükség van már csak az ő lefogásukhoz is. Így $\tau(G) \geq |S|/2$, tehát találtunk egy legfeljebb $2 \tau(G)$ méretű lefogó csúcshalmazt.
- Az algoritmus tehát 2-közelítő és futási ideje $O(|V(G)| + |E(G)|)$.

NP-nehéz kiszámítási problémák közelítő megoldásai

- **Állítás:** Ha $P \neq NP$, akkor TSP-re semmilyen $g(n)$ függvényre nincs polinom idejű $g(n)$ -approximáció. (Megengedett válaszok: az ügynök egy körútja.)
- **Biz.:** Ha lenne, akkor polinom időben megoldhatnánk a Hamilton kör problémát.
 - A Hamilton kör probléma egy G bemenetéhez konstruálunk a TSP-hez egy G' gráfot:
 - G' éleinek hossza legyen 1 (azaz, ha $(u,v) \in G$), a nem-éleinek hossza pedig $n g(n)$ (azaz, ha $(u,v) \notin G$).
 - Ha G -ben volt Hamilton-kör, akkor G' -ben van n hosszú körút, ha nem volt, akkor legalább $ng(n)$ hosszúságú lesz minden körút.
 - Így az approximációs algoritmus válasza alapján polinom időben eldönthető, hogy az eredeti gráfban volt-e Hamilton-kör.

NP-nehéz kiszámítási problémák közelítő megoldásai

- TSP egy rosszul közelíthető probléma. Az alábbi változat viszont jól közelíthető.
- **Metrikus utazó ügynök:** Az élsúlyokra teljesül a háromszög egyenlőtlenség.
- 2-közelítés:
 - Készítsünk egy T minimális feszítőfát, ennél nyilván nem lehet kisebb semmilyen összefüggő részgráf élsúlyainak összege (így az ügynök körútjáié sem).
 - Legfeljebb kétszer ilyen hosszúságú Hamilton-kört gyárthatunk az alábbi algoritmussal:
 - Először járjuk be a T fát, minden élet kétszer érintve ("rajzoljuk körbe"). A kapott körséta hossza legfeljebb $2OPT$.
 - Ebben a körsétában lecserélhetünk bármely utat a két végpontja közötti élre, a háromszög egyenlőtlenség miatt ettől nem nő a körséta hossza. Ilyen cserékkel könnyen Hamilton-körre alakíthatjuk a körsétát, melynek összsúlya legfeljebb $2OPT$.
- Az algoritmus 2-közelítő és futási ideje $O(|V(G)| + |E(G)|)$.
- Megjegyzés: Ismeretes $(3/2)$ -közelítő algoritmus is (Christofides).