

Számítási modellek

11: Sejtautomaták

Sejtautomaták

- A sejtautomata egy párhuzamos számítási modell. Stanislaw Ulam és Neumann János vezették be a 40-es években. Jellemzői:
 - Egy lokálisan uniform architektúra szerint egymással összeköttetésben levő automaták, ún. „sejtek” alkotják, bármely két sejtnak lokálisan ugyanolyan a szomszédsága (legtöbbször egy térkitöltő rács alapján).
 - A sejtek egyformák és egyszerű felépítésűek, egyetlen jellemzőjük az állapotuk.
 - Minden sejt csak a szomszédaival kommunikál, azok állapota és saját aktuális állapota alapján frissül az állapota.
 - A gép szinkron módon, diszkrét időskálán működik

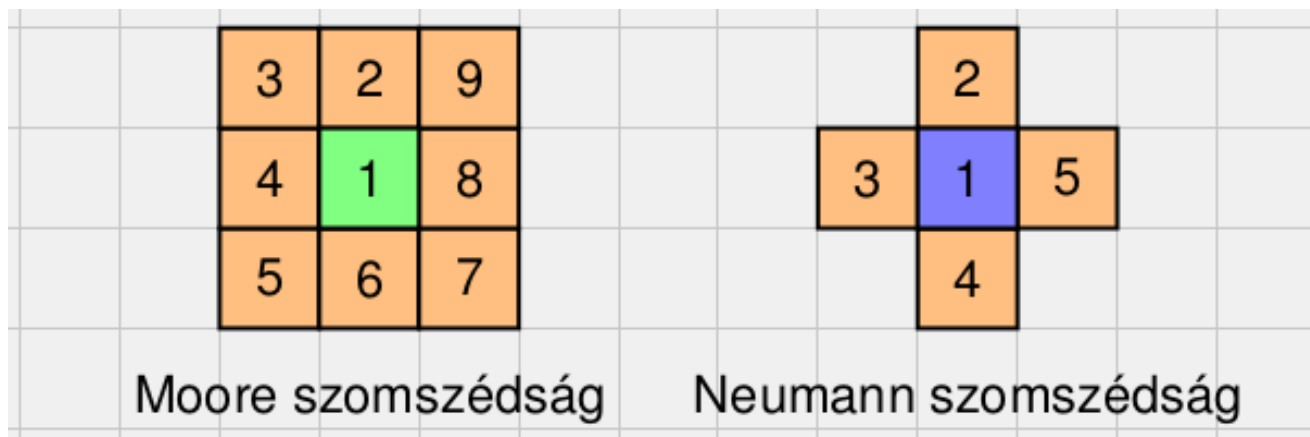
Sejtautomaták

- $A = \langle X, S, N, f \rangle$ rendezett négyes egy **sejtautomata**, ahol
 - X egy vektortér végtelen részhalmaza, a **sejttér**, elemeit **sejteknek** nevezzük.
 - S egy nemüres, véges halmaz, a **sejtállapotok** halmaza.
 - $N = (n_1, \dots, n_m)$ rendezett vektor m -es, a **szomszédságvektor**, úgy hogy $\forall x \in X, 1 \leq i \leq m$ esetén $x + n_i \in X$.
 - $f : S^m \rightarrow S$ a **lokális frissítési szabály**.
- Ha a sejt aktuális állapotától is függ az új állapota, akkor $0 \in N$.
- Ha $X = \mathbb{Z}^d$ és $n_i \in \mathbb{Z}^d$ ($1 \leq i \leq m$) akkor a szomszédságvektorra vonatkozó feltétel teljesül és ekkor röviden $\langle d, S, N, f \rangle$ -t írhatunk.
- Legtöbbször az $X = \mathbb{Z}^d$ esettel foglalkozunk, de elképzelhető más is, pl. az euklideszi síkon egy hatszög- vagy háromszögrács, de akár tórusz, hiperbolikus sík is.

Sejtautomaták

- Legyen $N = (n_1, \dots, n_m)$. Egy $x \in X$ sejt **szomszédainak halmaza**
 $N(x) = \{x + n_i \mid 1 \leq i \leq m\}$.
- Egy $c : X \rightarrow S$ leképezést **konfiguráció**nak nevezünk.
- Legyen $A = \langle X, S, N, f \rangle$ egy sejtautomata, ahol $N = (n_1, \dots, n_m)$ és $c : X \rightarrow S$ egy konfiguráció. Ekkor definiálhatunk egy $G : S^X \rightarrow S^X$ **globális átmenetfüggvényt**.
Legyen $x \in X$ egy tetszőleges sejt,
 $G(c)(x) := f(c(x + n_1), \dots, c(x + n_m))$.

Neumann és Moore szomszédság



- Ha $X = Z^2$, akkor úgy gondolhatunk a sejtekre, mint a fenti ábra celláira. A zöld sejt Moore-szomszédai: 2-9, a kék sejt Neumann-szomszédai 2-5.
- Ha azt szeretnénk, hogy a sejt új állapota, a szomszédai állapota mellett a régi állapotától is függjön, akkor
 - $N_{\text{Moore}} = ((0,0), (0,1), (-1,1), (-1,0), (-1,-1), (0,-1), (1,-1), (1,0), (1,1)).$
 - $N_{\text{Neumann}} = ((0,0), (0,1), (-1,0), (0,-1), (1,0)).$

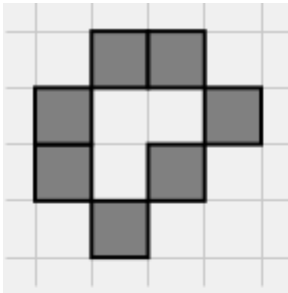
Életjáték (Conway)

- Életjátéknak (Conway, game of life, B3S23) nevezzük azt a $GOL = \langle 2, \{0,1\}, N_{\text{Moore}}, f \rangle$ sejtautomatát, ahol
 - 1. $f(1, b_2, \dots, b_9) = 1$, ha $\sum_{2 \leq i \leq 9} b_i \in \{2,3\}$,
 - 2. $f(0, b_2, \dots, b_9) = 1$, ha $\sum_{2 \leq i \leq 9} b_i = 3$,
 - 3. $f(b_1, b_2, \dots, b_9) = 0$, minden más esetben.
- Egy élő sejt életben marad, ha 2 vagy 3 élő Moore-szomszédja van, minden más esetben elszigetelődés (0-1 szomszéd) vagy túlnépesedés (4-8 szomszéd) miatt meghal.
- Egy halott sejtből akkor és csak akkor lesz élő, ha pontosan 3 élő Moore-szomszédja van.

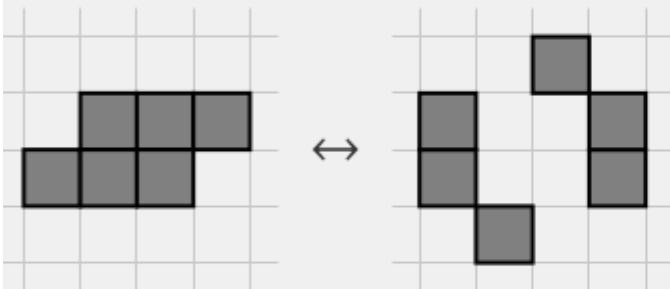
Életjáték - konfigurációtípusok

- Egy c konfiguráció **orbit**ja az $\text{orb}(c) = c, G(c), G^2(c), \dots$ sorozat.
 - c **csendélet**, ha $G(c) = c$. A legkisebb csendélet egy 2×2 -es blokk.
 - c **oszcillátor**, ha $\exists i \geq 2$, hogy $G^i(c) = c$ (c időben periodikus). Példa: 3 egymás melletti élő sejt. Ez a legkisebb (2 periódusú) oszcillátor, neve Villogó.
 - c **úrhajó**, ha $\exists i \geq 1$, hogy $\{x \in \mathbb{Z}^2 \mid G^i(c)(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{Z}^2 \mid c(x) = 1\} + y$ valamely y vektorra. A legkisebb méretű úrhajó neve Sikló.
 - c **ágyú**, ha $\exists i \geq 1$, hogy $\forall k \in \mathbb{N}$
 $\{x \in \mathbb{Z}^2 \mid G^{(k+1)i}(c)(x) = 1\} \supset \{x \in \mathbb{Z}^2 \mid G^{ki}(c)(x) = 1\}$ és
 $\{x \in \mathbb{Z}^2 \mid G^{(k+1)i}(c)(x) = 1\} - \{x \in \mathbb{Z}^2 \mid G^{ki}(c)(x) = 1\}$
úrhajó.

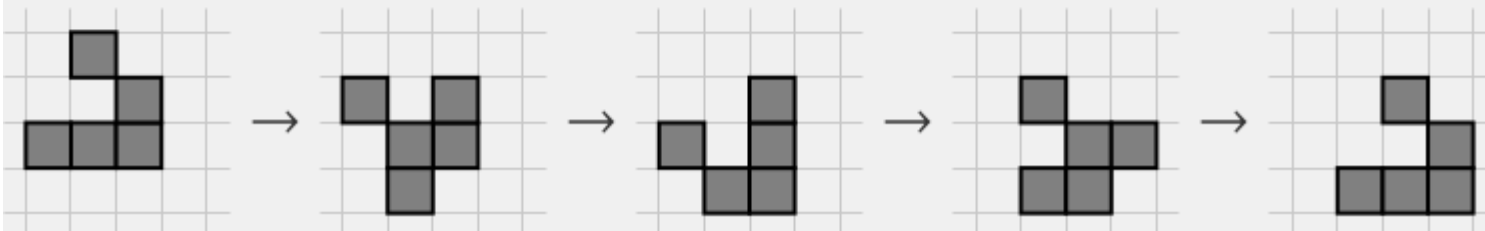
Életjáték - konfigurációtípusok



A Cipó nevű csendélet



A Varangy nevű oszcillátor

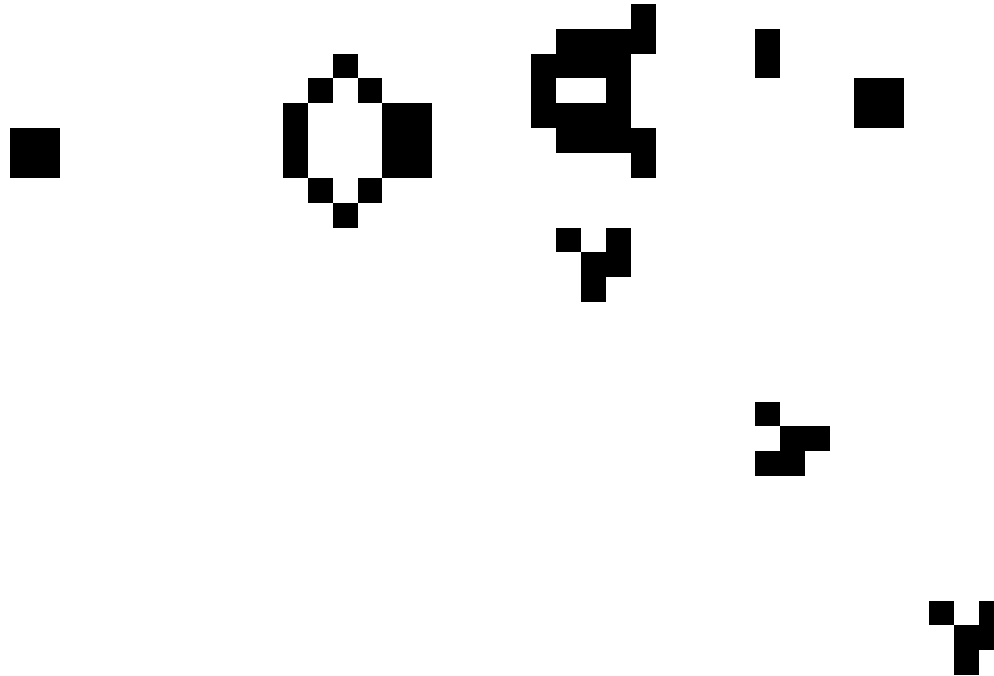


A Sikló nevű úrhajó

Életjáték - konfigurációtípusok

Bill Gosper siklóágyúja:

a 15. generációban legyártja az első siklót,
ezután minden 30. generációban egy új siklót.



<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=101736>

Egydimenziós, kétállapotú sejtautomata

- Stephen Wolfram megvizsgálta az $A = \langle 1, \{0,1\}, (-1,0,+1), f \rangle$ alakú sejtautomatákat.
- $f : \{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}$ függvényből 256 lehetőség van.
Ezek megfeleltethetők azon 8 hosszúságú bitsorozatoknak, ahol az első bit $f(111)$, a második bit $f(110)$, ..., a nyolcadik bit $f(000)$
Ezen a megfeleltetésnek megfelelő decimális számot a sejtautomata Wolfram-kódjának nevezzük. A megfelelő sejtautomatára a Wolfram-kódja alapján hivatkozunk (0-tól 255-ig).
- Példa: Mik a 30-as számú egydimenziós, kétállapotú sejtautomata szabályai? Írjuk fel binárisan!

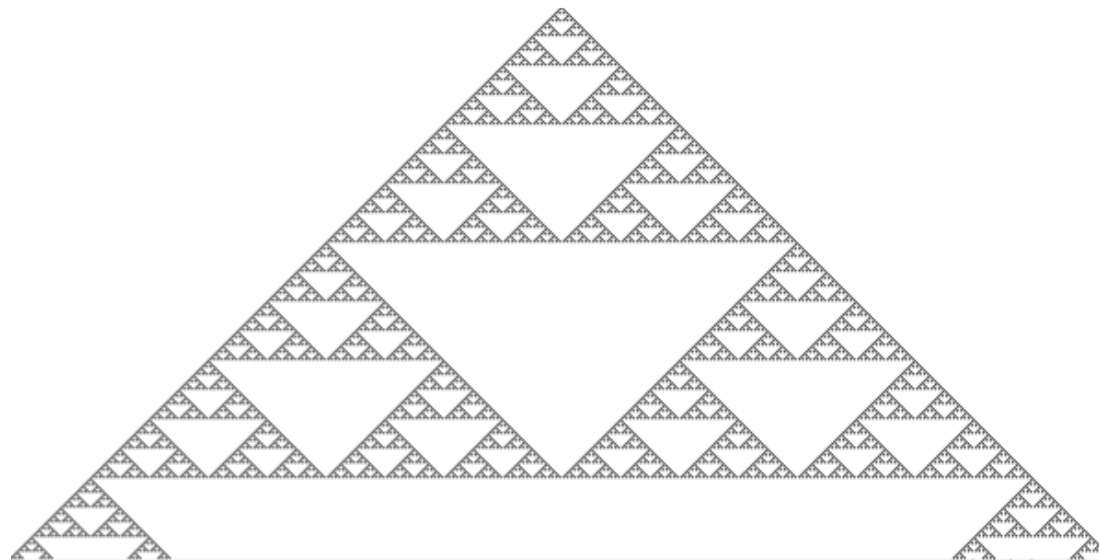
111	110	101	100	011	010	001	000
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	0	0	1	1	1	1	0

Tehát például $f(0,1,1) = 1$, azaz ha egy élő sejt baloldali szomszédja halott, jobboldali élő, akkor a sejt életben marad.

Egydimenziós, kétállapotú sejtautomata

- Az egydimenziós, kétállapotú sejtautomaták orbitját egy 2dimenziós képpel, az ún. **tér-idő diagram** segítségével ábrázolhatjuk: a kép első sorában ábrázoljuk a c kezdőkonfigurációt, az i -edikben $G^i(c)$ -t.
- Példa: 90-es szabály

111	110	101	100	011	010	001	000
0	1	0	1	1	0	1	0



Egydimenziós, kétállapotú sejtautomata

- Wolfram osztályok:
- W1: Majdnem minden kezdőkonfiguráció orbitja egyazon konstans konfigurációban stabilizálódik. Pl. 160

111	110	101	100	011	010	001	000
1	0	1	0	0	0	0	0

- W2: Majdnem minden kezdőkonfiguráció orbitja periodikus. Pl. 108

111	110	101	100	011	010	001	000
0	1	1	0	1	1	0	0

- W3: Majdnem minden kezdőkonfiguráció kaotikus, véletlenszerű viselkedéshez vezet. Pl. 126

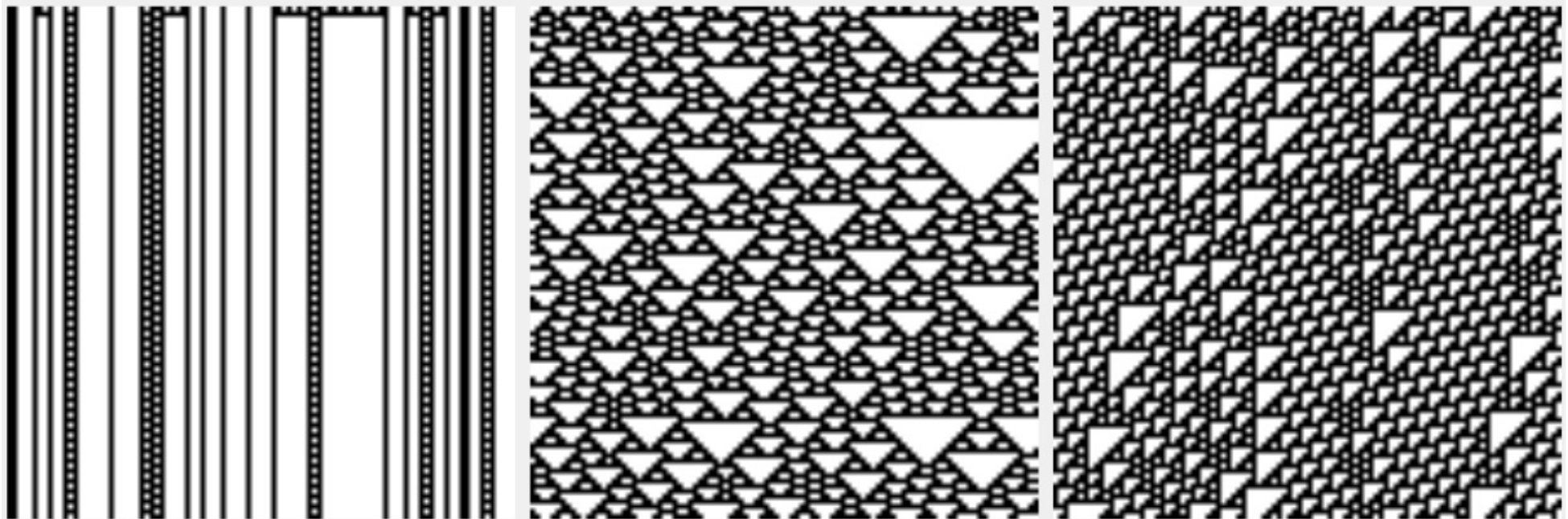
111	110	101	100	011	010	001	000
0	1	1	1	1	1	1	0

- W4: Lokális struktúrák alakulnak ki komplex kapcsolattal. Pl. 110

111	110	101	100	011	010	001	000
0	1	1	0	1	1	1	0

Egydimenziós, kétállapotú sejtautomata

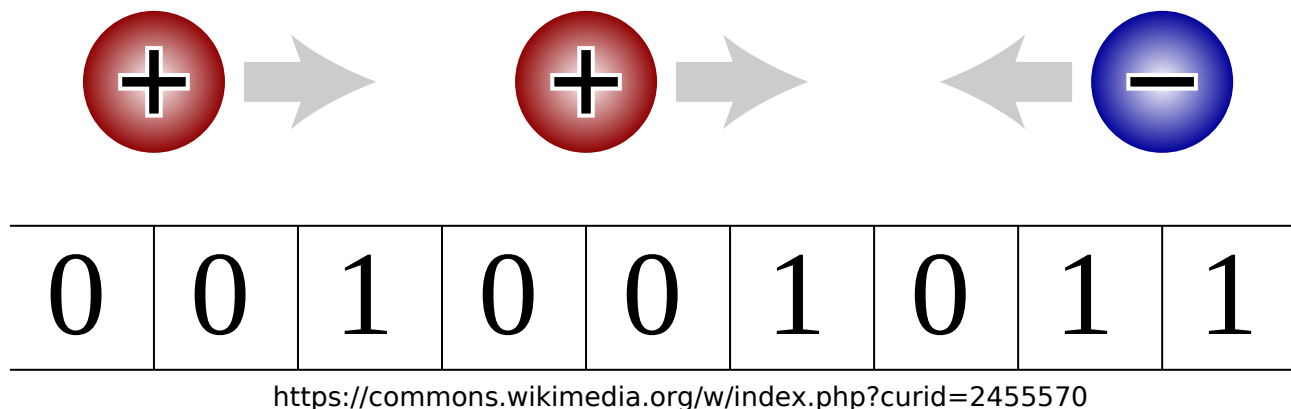
- 108-as (W2) 126-os (W3) 110-es (W4)



Egydimenziós, kétállapotú sejtautomata

- 184-es szabály

111	110	101	100	011	010	001	000
1	0	1	1	1	0	0	0

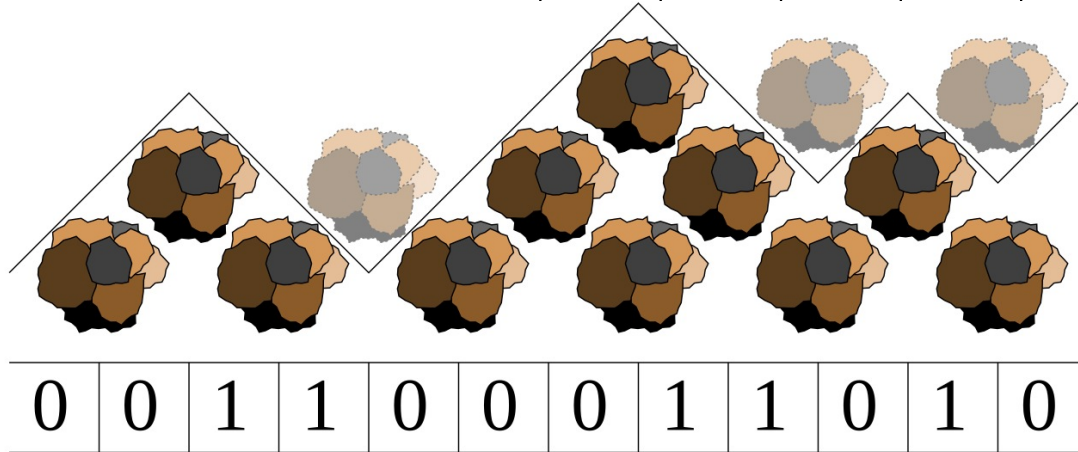


- Ballisztikus kioltás. A 00 minta egy balról jobbra haladó pozitív töltésű részecskét, míg az 11 minta ennek egy jobbról balra mozgó antirészecske párját reprezentálja. 01 és 10 a köztes térnek felel meg. Az ellentétes töltésű részecskepárok kioltják egymást.

Egydimenziós, kétállapotú sejtautomata

- 184-es szabály

111	110	101	100	011	010	001	000
1	0	1	1	1	0	0	0



<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2455569>

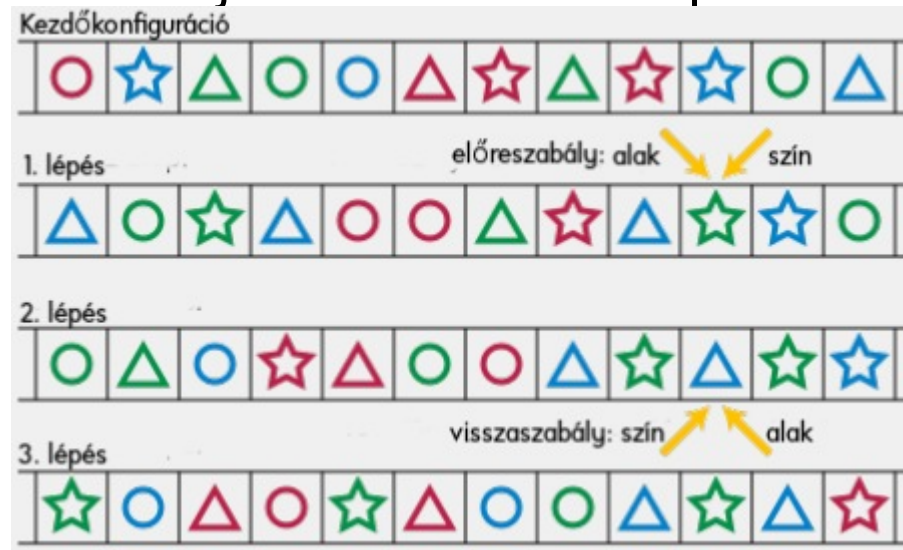
- Részecskék lerakódása szabálytalan felületre: Tekintsünk egy a gravitációval 45 fokos szöget bezáró rácsot. Egy területet modellezhetünk úgy, hogy minden részecske alatt balra lent és jobbra lent részecske kell legyen. Ennek felülete egy +1 és -1 meredekségű darabokból álló határvonal. A következő iterációban 1-1 új részecske rakódik le a lokális minimum pontokban (10-k fölé)

Injektív/szurjektív/bijektív sejtautomata

- Egy sejtautomata **injektív/szurjektív/bijektív**, ha G injektív/szurjektív/bijektív.
- Azaz egy sejtautomata bijektív, ha minden lehetséges c konfigurációjára teljesül, hogy pontosan egy olyan c' konfiguráció van, melyre $G(c') = c$.
- A $p \in S$ sejtállapot **nyugalmi állapot**, ha $f(p, \dots, p) = p$. Ha egy c konfigurációban véges sok sejt van a p nyugalmi állapottól különböző állapotban, akkor azt mondjuk, hogy c a sejtautomata egy **véges konfigurációja**.
- Észrevétel: Ha c véges, akkor $G(c)$ is az.
- Jelölje G_F a G -nek a véges konfigurációkra való megszorítását.

Reverzibilis sejtautomata

- Az G globális átmenetfüggvényű sejtautomatát reverzibilisnek nevezzük, ha van inverze, azaz egy olyan F globális átmenetfüggvényű sejtautomata, amelyre $F \circ G = G \circ F = \text{id}$.
- Példa: 1 dimenziós sejtautomata 9 állapottal



- Észrevétel: Egy sejtautomata reverzibilis akkor és csak akkor, ha bijektív.

Édenkert

- Egy sejtautomata valamely konfigurációját **édenkert konfiguráció**nak nevezzük, ha nincs megelőzője.
- Azaz édenkert csak kezdőkonfigurációként fordulhat elő.
- Példa: 110-es szabály

111	110	101	100	011	010	001	000
0	1	1	0	1	1	1	0

Minden 01010-t tartalmazó c konfiguráció édenkert. Indirekt, tegyük fel, hogy van olyan c' , hogy $G(c') = c$. Tekintsük a középső 0-t. Három eset van aszerint, hogy mi c' -ben ennek a sejtnek a szomszédsága.

1) 000, ekkor az előző egyes szomszédsága c' -ben $*00$, ami nem lehet.

2) 111, ekkor az előző 1-es miatt c' -ben ez előtt 0 áll, de akkor a minta első 0-ja $*01$ -ből lett, ami nem lehet.

3) 100, ekkor a következő 1-es miatt c' -ben 100 után 1-es áll, de akkor a minta utolsó 0-ja $01*$ -ből lett, ami nem lehet.

Édenkert

- Egy véges mintát **árvának** nevezzük, ha minden őt tartalmazó konfiguráció édenkert.
- Tehát a fentiek szerint 01010 árva a 110-es szabályú egydimenziós, kétállapotú sejtautomatában.
- **Tétel:** Bármely édenkert tartalmaz árvát.

Édenkert tétel

- **Édenkert tétel:** (Moore (1962), Myhill (1963))
Legyen $A = \langle X, S, N, f \rangle$ egy sejtautomata, ahol X euklideszi tér.
Ekkor G szurjektív akkor és csak akkor, ha G_F injektív.
- Azaz akkor és csak akkor van árva (édenkert), ha van két véges konfiguráció, melynek ugyanaz a képe. Az ilyen párokat **ikreknek** nevezzük.
- **Bizonyítás vázlat:** Csak az euklideszi síkon bizonyítjuk.
 - Legyen $|S| = s$. Tegyük fel, hogy vannak P és Q ikrek és tegyük fel, hogy befoglalhatók egy-egy $n \times n$ -es négyzetbe.
 - Tegyük fel továbbá, hogy X elemei szomszédságának legfeljebb n a sugara.
 - Tekintsünk most egy nagy, $mn \times mn$ -es négyzetet. A megelőző konfiguráció egy legfeljebb $(m+2)n \times (m+2)n$ -es területének lehet hatása ezen sejtek állapotára. Ez $(m+2) \times (m+2)$ darab $n \times n$ -es cellára osztható.

Édenkert tétel

- **Biz. (folyt.):**

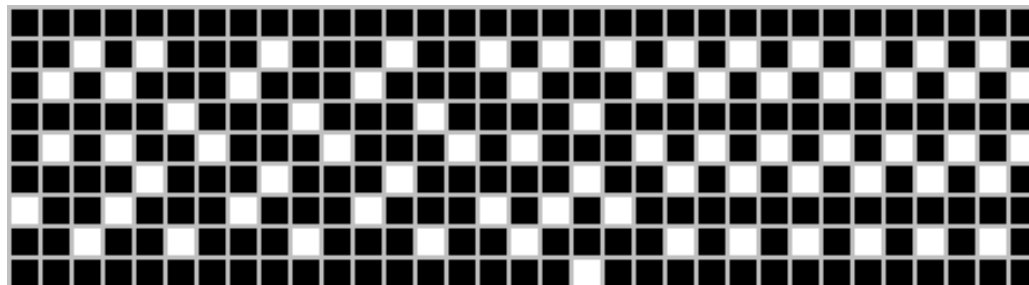
- Mivel léteznek ikrek, ezen $n \times n$ -es részek $s^{n \times n}$ lehetséges konfigurációja közül legalább 2-nek ugyanaz a hatása. Így legfeljebb $(s^{n \times n} - 1)^{(m+2)(m+2)}$ különböző kép állhat elő a lehetséges $s^{mn \times mn}$ közül.
Utóbbi a nagyobb szám, mivel $\log(s^{n^2})m^2 > \log(s^{n^2}-1)(m^2 + 4m + 4)$, ha m elég nagy.
- Tegyük fel, hogy létezik egy R árva. Ekkor létezik $n \in \mathbb{N}$, melyre R befoglalható egy $n \times n$ -es négyzetbe.
- Tekintsük az egy nagy, $mn \times mn$ -es négyzetbe foglalható véges konfigurációkat. Ezen konfigurációk következő generációja egy $(m+2)n \times (m+2)n$ -es négyzetbe foglalható, melyet osszunk fel $(m+2) \times (m+2)$ darab $n \times n$ -es négyzetre.
- Mivel egyik ilyenben se kaphatjuk R -et, ezért a potenciálisan $s^{mn \times mn}$ konfigurációnak legfeljebb $(s^{n \times n} - 1)^{(m+2)(m+2)}$ fajta képe lehet. Az előző számítás miatt a skatulyelv szerint van két konfiguráció, amelyeknek ugyanaz a képe. $\square$

Édenkert tétel

- **Következmény:**
 - Minden injektív sejtautomata szurjektív is.
 - Ekvivalens, hogy egy sejtautomata injektív, bijektív, reverzibilis.
 - Ha G injektív, akkor G_F szurjektív.
- Tehát
$$\begin{aligned} G \text{ injektív} &\Leftrightarrow G \text{ bijektív} \Leftrightarrow G \text{ reverzibilis} \Rightarrow \\ &\Rightarrow G_F \text{ szurjektív} \Leftrightarrow G_F \text{ bijektív} \Rightarrow \\ &\Rightarrow G \text{ szurjektív} \Leftrightarrow G_F \text{ injektív} \end{aligned}$$

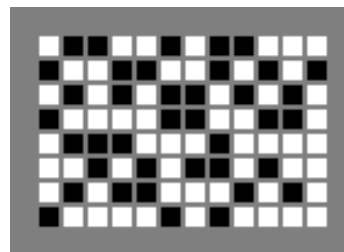
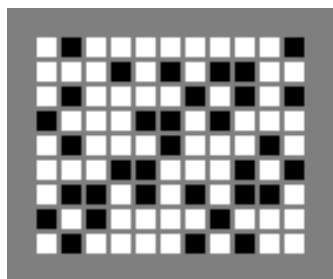
Édenkert tétel

- GOL-re például alkalmazható. Az könnyen látható, hogy vannak ikrek. Vegyünk egy csupa halott cellából és egy egyetlen élő sejtből álló konfigurációt. Ebből tehát következik, hogy van édenkert. Azonban GOL-nak nincs kicsi édenkertje.
- Roger Banks konstrukciója (9x33):



<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2822838>

- Steven Eker árvái (9x11 és 8x12):



http://wwwhomes.uni-bielefeld.de/achim/orphan_9th.html

Sejtautomaták számítási ereje

- Legyen $A = \langle 1, Q, (-1, 0, +1), f \rangle$ egy egydimenziós sejtautomata, $T \subset Q$, $F \subset Q \setminus T$, továbbá $_ \in Q \setminus (T \cap F)$ az A nyugalmi állapota.
A **felismeri** az $L \subseteq T^*$ **nyelvet**, ha $w \in L$ akkor és csak akkor ha az automatát w -vel indítva (értsd: egymás utáni celláin w olvasható, minden más cella nyugalmi állapotában van) a w első betűjének megfelelő cella F -beli állapotba jut.
- **Tétel:** Legyen adott egy M Turing gép n állapottal és m -elemű szalagábécével. Ekkor van olyan egydimenziós sejtautomata, ami hatelemű szomszédsággal és $\max\{n, m\} + 1$ állapottal szimulálni tudja M -et.

Életjáték - eldönthetetlen problémák

- Az Univerzális Turing gép szimulálható az Életjátékban.
- **Tétel:** Minden $\langle M, w \rangle$ (Turing gép, szó) párhoz megkonstruálható egy olyan $c_{\langle M, w \rangle}$ kezdőkonfiguráció GOL-ben, melyre $c_{\langle M, w \rangle}$ kihal $\Leftrightarrow w \in L(M)$.
- **Tétel:** Adott egy c és egy c' konfiguráció GOL-ben. Eldönthetetlen, hogy létezik-e olyan $i \geq 0$, hogy $c' = G^i(c)$.
- **Tétel:** Eldönthetetlen, hogy GOL egy véges mintája kihal-e.

Eldönthető és eldönthetetlen problémák

- **Tétel:**

- 1) Eldönthető, hogy egy 1-dimenziós sejtautomata injektív-e.
- 2) Eldönthető, hogy egy 1-dimenziós sejtautomata szurjektív-e.

- **Tétel:**

- 1) Eldönthetetlen, hogy egy 2-dimenziós sejtautomata injektív-e.
- 2) Eldönthetetlen, hogy egy 2-dimenziós sejtautomata szurjektív-e.
- 3) Egy 2-dimenziós sejtautomata injektivitása rekurzívan felsorolható.
- 4) Egy 2-dimenziós sejtautomata nem-szurjektivitása rekurzívan felsorolható.

Eldönthetetlen problémák

- Egy konfiguráció **nyugalmi**, ha minden sejt nyugalmi állapotban van.
- Egy sejtautomata **nilpotens**, ha minden kezdőkonfigurációra nyugalmi konfigurációba jut.
- **Tétel:**
 - 1) Eldönthetetlen, hogy egy 1-dimenziós sejtautomata nilpotens-e.
 - 2) Eldönthetetlen, hogy egy 2-dimenziós sejtautomata nilpotens-e.
 - 3) Rekurzívan felsorolható, hogy egy 1-dimenziós sejtautomata nilpotens-e.
 - 4) Rekurzívan felsorolható, hogy egy 2-dimenziós sejtautomata nilpotens-e.

Eldönthetetlen problémák

- **Tétel:**

- 1) Eldönthetetlen, hogy egy 2-dimenziós sejtautomata reverzibilis-e.
- 2) Rekurzívan felsorolható, hogy egy 2-dimenziós sejtautomata reverzibilis-e.

- Egy G globális átmenetfüggvényű sejtautomata **periodikus**, ha minden kezdőkonfigurációra G időben periodikus.

- **Tétel:**

- 1) Eldönthetetlen, hogy egy 2-dimenziós sejtautomata periodikus-e.
- 2) Eldönthetetlen, hogy egy 1-dimenziós sejtautomata periodikus-e.