

Számítási modellek

3: Programozott grammatikák, mátrix grammatikák, véletlen
környezettel adott grammatikák, L-rendszerek

Kontrollált környezetfüggetlen grammatikák

- Kérdés: Lehet-e nem környezetfüggetlen nyelveket generálni környezetfüggetlen grammatikákkal azáltal, hogy a produkciós szabályok alkalmazhatóságára feltételeket szabunk.
- Válasz: igen, pl.
 - programozott grammatikák
 - mátrixgrammatikák
 - szövegfeltételekkel adott grammatikák

Programozott Grammatika

- Egy $G = (N, T, P, S)$ **környezetfüggetlen programozott grammatika** egy 4-es, ahol
 - N és T diszjunkt véges ábécék,
 - $S \in N$ a kezdőszimbólum (axióma),
 - P rendezett 3-asok véges halmaza, amelyek $r = (p, \sigma, \varphi)$ alakúak, ahol p egy környezetfüggetlen szabály, $\sigma, \varphi \subseteq P$.
 - σ az r szabály **siker-halmaza**, φ az r szabály **kudarca-halmaza**.
 - Ha $r = (p, \sigma, \emptyset)$ minden $r \in P$ szabályra fennáll, akkor a G grammatika **előfordulás-ellenőrzés nélküli**, egyébként **előfordulás-ellenőrzéses**.

Programozott Grammatika

- $G = (N, T, P, S)$ környezetfüggetlen programozott grammatika
- Ha $u, v \in (N \cup T)^*$ egy levezetésben két egymást követő mondatforma (az $i-1.$ és $i.$ ahol $i \geq 0$) és az $i.$ -ként alkalmazott szabály $r_i = (A \rightarrow w, \sigma, \varphi)$, akkor a következők egyike teljesül
 - ha $u = xAy$ valamely $x, y \in (N \cup T)^*$ -ra, akkor $v = xwy$ és a levezetés $i+1.$ -ként alkalmazott r_{i+1} szabályára (ha van) $r_{i+1} \in \sigma$ teljesül.
(Azaz a következő következő szabály a siker-halmaz beli.)
 - ha a u nem tartalmazza A -t, akkor $v = u$ és a levezetés $i+1.$ -ként alkalmazott r_{i+1} szabályára (ha van) $r_{i+1} \in \varphi$ teljesül.
(Azaz a következő következő szabály a kudarc-halmaz beli.)
- Jelölés: $u \Rightarrow v$

Programozott Grammatika

- Legyen $G = (N, T, P, S)$ egy programozott grammatika.
 G által **generált nyelv** $L(G)$:
$$L(G) := \{ w \in T^* \mid S \Rightarrow^* w \},$$

ahol $\Rightarrow^*$ a $\Rightarrow$ reláció reflexív, tranzitív lezártja

Programozott Grammatika

- Példa:
Legyen $G = (N, T, P, S)$ egy programozott grammatika, ahol $N = \{S, A\}$, $T = \{a\}$, $P = \{r_1, r_2, r_3\}$, ahol
 - $r_1 = (S \rightarrow AA, \{r_1\}, \{r_2\})$,
 - $r_2 = (A \rightarrow S, \{r_2\}, \{r_1, r_3\})$,
 - $r_3 = (S \rightarrow a, \{r_3\}, \emptyset)$.Ekkor $L(G) = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$.

Programozott Grammatika

Let $G = (\{S, A\}, \{a\}, S, \{r_1, r_2, r_3\})$, where

$$r_1 = (S \rightarrow AA, \{r_1\}, \{r_2\})$$

$$r_2 = (A \rightarrow S, \{r_2\}, \{r_1, r_3\})$$

$$r_3 = (S \rightarrow a, \{r_3\}, \emptyset)$$

The derivation for the string *aaaa* is as follows:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow_{r_1} AA \Rightarrow_{r_1} AA \Rightarrow_{r_2} SA \Rightarrow_{r_2} SS \Rightarrow_{r_2} SS \\ &\Rightarrow_{r_1} AAS \Rightarrow_{r_1} AAAA \Rightarrow_{r_1} AAAA \\ &\Rightarrow_{r_2} SAAA \Rightarrow_{r_2} SSAA \Rightarrow_{r_2} SSSA \Rightarrow_{r_2} SSSS \Rightarrow_{r_2} SSSS \\ &\Rightarrow_{r_3} aSSS \Rightarrow_{r_3} aaSS \Rightarrow_{r_3} aaaS \Rightarrow_{r_3} aaaa \Rightarrow_{r_3} aaaa \end{aligned}$$

As can be seen from the derivation and the rules, each time r_1 and r_2 succeed, they feed back to themselves, which forces each rule to continue to rewrite the string over and over until it can do so no more. Upon failing, the derivation can switch to a different rule. In the case of r_1 , that means rewriting all *Ss* as *AAs*, then switching to r_2 . In the case of r_2 , it means rewriting all *As* as *Ss*, then switching either to r_1 , which will lead to doubling the number of *Ss* produced, or to r_3 which converts the *Ss* to *as* then halts the derivation. Each cycle through r_1 then r_2 therefore either doubles the initial number of *Ss*, or converts the *Ss* to *as*. The trivial case of generating *a*, in case it is difficult to see, simply involves vacuously applying r_1 , thus jumping straight to r_2 which also vacuously applies, then jumping to r_3 which produces *a*.

Source: https://en.wikipedia.org/wiki/Controlled_grammar

Mátrix Grammatika

- Egy **előfordulás-ellenőrzéses környezetfüggetlen mátrix grammatika** egy 5-ös $G = (N, T, M, S, \mathcal{F})$, ahol
 - N és T diszjunkt ábécék,
 - $S \in N$ a kezdőszimbólum (axióma),
 - $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$, $n \geq 1$, sorozatok véges halmaza
 $m_i = (p_{i1}, \dots, p_{ik(i)}), k(i) \geq 1, 1 \leq i \leq n$, ahol minden p_{ij} ,
 $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k(i)$, egy környezetfüggetlen szabály,
 - $\mathcal{F} \subseteq \{p_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k(i)\}$
(M -beli sorozatok szabályainak egy részhalmaza).
- M elemeit **mátrix**oknak hívjuk.

Mátrix Grammatika

- A $G = (N, T, M, S, \mathcal{F})$ **mátrix grammatika előfordulás-ellenőrzés nélküli**, akkor és csak akkor, ha $\mathcal{F} = \emptyset$.

Mátrix Grammatika

- Legyen $G = (N, T, M, S, \mathcal{F})$ egy mátrix grammatika és $w, w' \in (N \cup T)^*$. Ekkor w' levezethető w -ből valamely m_i mátrix szerint,
 $m_i : (A_{i1} \rightarrow v_{i1}, \dots, A_{ik(i)} \rightarrow v_{ik(i)}) \in M, 1 \leq i \leq n, k(i) \geq 1,$
(jelölés: $w \Rightarrow_{m_i} w'$),
akkor és csak akkor, ha léteznek olyan
 $w_{i1}, \dots, w_{ik(i)+1} \in (N \cup T)^*$ szavak, amelyekre
 $w = w_{i1}, w' = w_{ik(i)+1}$ és
minden i -re és j -re, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k(i)$,
 - vagy $w_{ij} = w'_{ij} A_{ij} w''_{ij}$ és $w_{ij+1} = w'_{ij} v_{ij} w''_{ij}$,
 - vagy or A_{ij} nem fordul elő w_{ij} -ben és $w_{ij} = w_{ij+1}$,
valamint $A_{ij} \rightarrow v_{ij} \in \mathcal{F}$.

Mátrix Grammatika

- Legyen $G = (N, T, M, S, \mathcal{F})$ egy mátrix grammatika.
A G által generált nyelv $L(G)$:
$$L(G) = \{w \in T^* \mid S \Rightarrow_{m_{j_1}} y_1 \Rightarrow_{m_{j_2}} y_2 \Rightarrow_{m_{j_3}} \dots \Rightarrow_{m_{j_s}} w, 1 \leq j_i \leq r, 1 \leq i \leq s\}.$$
- Példa:
Legyen $G = (N, T, M, S, \emptyset)$ egy előfordulás ellenőrzés nélküli mátrix grammatika, ahol $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$, és
 $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$, ahol
 $m_1 = (S \rightarrow AB)$,
 $m_2 = (A \rightarrow bA, B \rightarrow bB)$,
 $m_3 = (A \rightarrow b, B \rightarrow b)$,
 $m_4 = (A \rightarrow aA, B \rightarrow aB)$, and
 $m_5 = (A \rightarrow a, B \rightarrow a)$.
Ekkor $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^+\}$.

Véletlen szövegfeltételekkel adott grammatika

- Egy **véletlen szövegfeltételekkel adott grammatika** (random context grammar) $G = (N, T, P, S)$ egy 4-es, ahol
 - N és T diszjunkt véges ábécék,
 - $S \in N$ a kezdő szimbólum (axióma),
 - P rendezett hármasok véges halmaza, amelyek (p, Q, R) , alakúak, ahol p egy környezetfüggetlen szabály, $Q, R \subseteq N$.

Véletlen szövegfeltételekkel adott grammatika

- Legyen $G = (N, T, P, S)$ egy véletlen szövegfeltételekkel adott grammatika. Ekkor az y szó levezethető x -ből, $x, y \in (N \cup T)^*$, (jelölés: $x \Rightarrow y$), ha
 - $x = x'Ax''$, $y = x'wx''$, valamely $x', x'' \in (N \cup T)^*$ szavakra és
 - minden $(A \rightarrow w, Q, R) \in P$ 3-asra, ha Q minden szimbóluma előfordul $x'x''$ -ben, és R egyetlen szimbóluma sem szerepel $x'x''$ -ben.
- Megjegyzés:
 - Q a **megengedő kontextusa** (permitting context) $(A \rightarrow w, Q, R)$ -nak,
 - R a **tíltó kontextusa** (forbidding context) $(A \rightarrow w, Q, R)$ -nak.

Véletlen szövegfeltételekkel adott grammatika

- Legyen $G = (N, T, P, S)$ egy véletlen szövegfeltételekkel adott grammatika.
A G által **generált nyelv** $L(G)$:
 $L(G) = \{w \in T^* \mid S \Rightarrow^* w\}.$
- Példa:
Legyen $G = (N, T, PS)$ egy véletlen szövegfeltételekkel adott grammatika,
ahol
 $N = \{S, X, Y, A\}$, $T = \{a\}$, and $P = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$, ahol
 $r_1 = (S \rightarrow XX, \emptyset, \{Y, A\})$,
 $r_2 = (X \rightarrow Y, \emptyset, \{S\})$,
 $r_3 = (Y \rightarrow S, \emptyset, \{X\})$,
 $r_4 = (S \rightarrow A, \emptyset, \{X, Y\})$,
 $r_5 = (A \rightarrow a, \emptyset, \{S\})$.
Ekkor $L(G) = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\}.$

Véletlen szövegfeltételekkel adott grammatika

- A random context grammar generating the language $\{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$.

Let $G = (\{S, X, Y, A\}, \{a\}, S, \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\})$, where

$$r_1 = (S \rightarrow XX, \emptyset, \{Y, A\})$$

$$r_2 = (X \rightarrow Y, \emptyset, \{S\})$$

$$r_3 = (Y \rightarrow S, \emptyset, \{X\})$$

$$r_4 = (S \rightarrow A, \emptyset, \{X, Y\})$$

$$r_5 = (A \rightarrow a, \emptyset, \{S\})$$

Consider now the production for $aaaa$:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow_{r_1} XX \Rightarrow_{r_2} YX \Rightarrow_{r_2} YY \Rightarrow_{r_3} SY \Rightarrow_{r_3} SS \\ &\Rightarrow_{r_1} XXS \Rightarrow_{r_1} XXXX \Rightarrow_{r_2} YXXX \Rightarrow_{r_2} YYXX \Rightarrow_{r_2} YYYX \Rightarrow_{r_2} YYYY \\ &\Rightarrow_{r_3} SYYY \Rightarrow_{r_3} SSYY \Rightarrow_{r_3} SSSY \Rightarrow_{r_3} SSSS \\ &\Rightarrow_{r_4} ASSS \Rightarrow_{r_4} AASS \Rightarrow_{r_4} AAAS \Rightarrow_{r_4} AAAA \\ &\Rightarrow_{r_5} aAAA \Rightarrow_{r_5} aaAA \Rightarrow_{r_5} aaaA \Rightarrow_{r_5} aaaa \end{aligned}$$

Source: https://en.wikipedia.org/wiki/Controlled_grammar

Nyelvek családjai

- $\mathcal{L}(\text{PR}_{\text{ac}})$ jelöli az **előfordulás ellenőrzéses, ε -mentes környezetfüggetlen** szabályokból álló **programozott grammatikák** által generált nyelvek osztályát.
- $\mathcal{L}(\text{PR}_{\text{ac}}^{\varepsilon})$ jelöli a tetszőleges **előfordulás ellenőrzéses, környezetfüggetlen** szabályokból álló **programozott grammatikák** által generált nyelvek osztályát.
- Ha a grammatika **előfordulás ellenőrzés nélküli**, az ac indexet elmarad.
- $\mathcal{L}(\text{MAT}_{\text{ac}})$, $\mathcal{L}(\text{MAT}_{\text{ac}}^{\varepsilon})$ a **mátrix grammatikák osztálya**, ε -mentes vagy nem ε -mentes szabályokkal előfordulás ellenőrzéssel, vagy anélkül.
- $\mathcal{L}(\text{RC}_{\text{ac}})$, $\mathcal{L}(\text{RC}_{\text{ac}}^{\varepsilon})$ a **véletlen szövegfeltételekkel adott grammatikák osztálya**, ε -mentes vagy nem ε -mentes szabályokkal előfordulás ellenőrzéssel, vagy anélkül.
- **Tétel1** [Dassow, Paun, 2012]:
A következő relációk állnak fenn:
 $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}(\text{PR}_{\text{ac}}) = \mathcal{L}(\text{MAT}_{\text{ac}}) = \mathcal{L}(\text{RC}_{\text{ac}}) \subset \mathcal{L}_1$ és
 $\mathcal{L}(\text{PR}_{\text{ac}}^{\varepsilon}) = \mathcal{L}(\text{MAT}_{\text{ac}}^{\varepsilon}) = \mathcal{L}(\text{RC}_{\text{ac}}^{\varepsilon}) = \mathcal{L}_0$.

Fejlődő rendszerek, L-rendszerek

- Egy **0L-rendszer** (interakció nélküli Lindenmayer-rendszer, **L-rendszer**) egy $G = (V, P, w)$ hármas, ahol
 - V egy véges ábécé,
 - P környezetfüggetlen V feletti átírási szabályok véges halmaza,
 - $w \in V^+$ az axióma.
 - Minden $a \in V$ -re létezik $a \rightarrow x \in P$ szabály (P -t teljesnek mondjuk).
- Megjegyzés: Minden $a \in V$ szimbólumra, amely nem szerepel a bal oldalon egy P -beli produkciós szabályban, az $a \rightarrow a$ szabályt feltételezzük; az ilyen szimbólumot konstansnak, vagy terminál szimbólumnak nevezzük.

0L-átírás

- Legyen $z_1, z_2 \in V^*$ két szó, z_1 **átírható** z_2 -re G -nek megfelelően (jelölés: $z_1 \Rightarrow z_2$), ha
 $z_1 = a_1 a_2 \dots a_r$, $z_2 = x_1 x_2 \dots x_r$,
valamely $a_i \rightarrow x_i \in P$ -re, $1 \leq i \leq r$.
- Ahány szabály csak lehetséges, szimultán kerül alkalmazásra. Ez különböztet meg egy 0L-rendszert egy klasszikus formális grammatika által generált nyelvtől.

0L-rendszer, generált nyelv

- Legyen $G = (V, P, w)$ egy 0L-rendszer. A G által **generált nyelv** $L(G)$: $L(G) = \{z \in V^* \mid w \Rightarrow^* z\}$, ahol $\Rightarrow^* a \Rightarrow$ reflexív tranzitív lezártja.

0L-rendszer, generált nyelv

- Példa:
Legyen $G = (V, P, w)$ egy 0L-rendszer, ahol
 $V = \{a\}$,
 $P = \{a \rightarrow a^2\}$,
 $w = a^3$.
Ekkor $L(G) = \{a^{3 \cdot 2^n} \mid n \geq 0\}$

0L-rendszer, generált nyelv

- Példa (fraktál, bináris fa): Legyen $G = (V, P, w)$ egy 0L-rendszer, ahol
 $V = \{0, 1, [,]\}$,
 $P = \{1 \rightarrow 11, 0 \rightarrow 1[0]0\}$,
 $w = 0$.

Ez a következő sorozatot állítja elő:

$$w = w_0 = 0$$

$$w_1 = 1[0]0$$

$$w_2 = 11[1[0]0]1[0]0$$

$$w_3 = 1111[11[1[0]0]1[0]0]11[1[0]0]1[0]0$$

...

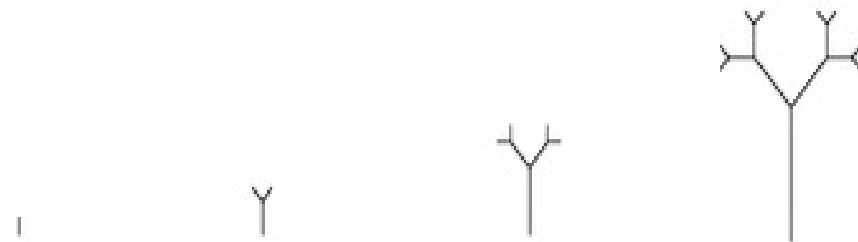
Ez a sztring képként rajzolható a szimbólum az alábbiak szerinti értelmezésével:

0: húzzunk egy szakaszt,
amely levéllel végződik

1: húzzunk egy szakaszt

[: “push position and angle”, forduljunk balra 45 fokot

]: “pop position and angle”, forduljunk jobbra 45 fokot



0L-rendszerek által generált nyelvek családja

- $\mathcal{L}(0L)$ jelöli a 0L-rendszerek által generált nyelvek családját.

E0L-rendszer

- Egy **E0L-rendszer (Extended 0L-system)** egy $G = (V, T, P, w)$ 4-es, ahol $G = (V, P, w)$ egy 0L-rendszer és T terminális szimbólumok ábécéje.
- **Átírás** $\Rightarrow_G$ (röviden $\Rightarrow$) és $\Rightarrow^*$ hasonlóan definiált, mint 0L-rendszereknél.
- A G által **generált nyelv** $L(G)$:
 $L(G) = \{z \in T^* \mid w \Rightarrow^* z\}.$
- $\mathcal{L}(\text{E0L})$ jelöli az E0L-rendszerek által generált nyelvek családját.

E0L-rendszer, generált nyelv

- Példa:
Legyen $G = (V, T, P, w)$ egy E0L-rendszer, ahol
 $V = \{a, b\}$,
 $T = \{b\}$,
 $P = \{a \rightarrow b, a \rightarrow bb, b \rightarrow b\}$,
 $w = a$.
Ekkor $L(G) = \{b, bb\}$.

D0L-rendszer

- Egy **D0L-rendszer (deterministic 0L-system)** egy 0L-rendszer, ha minden $a \in V$ esetén pontosan egy szabály $a \rightarrow x, x \in V^*$ létezik.
- Ha az axiómát véges nyelvvel helyettesítjük, akkor egy 0L-rendszert (D0L-rendszert) kapunk véges számú axiómával, másnéven egy **F0L-rendszert (FD0L-rendszert)**.
- Megjegyzés: Mivel egy $G = (V, P, w)$ D0L-rendszer P szabályhalmaza egy $h : V \rightarrow V^*$ homomorfizmust definiál, ezért gyakran használják a $G = (V, h, w)$ jelölést is.

T0L-rendszerek

- Egy **T0L-rendszer** $G = (V, P_1, \dots, P_n, w)$ egy $(n+2)$ -es, $n \geq 1$, ahol minden $G_i = (V, P_i, w)$, $1 \leq i \leq n$, egy 0L-rendszer.
- A G által **generált nyelv** $L(G)$:
$$L(G) = \{Z \in V^* \mid W \Rightarrow_{Gi1} W_1 \Rightarrow_{Gi2} \dots \Rightarrow_{Gim} W_m = Z, \\ 1 \leq i_j \leq n, 1 \leq j \leq m\}.$$
- $\mathcal{L}(\text{T0L})$ jelöli a T0L-rendszerek által generált nyelvek családját

T0L-rendszerek

- Példa: Legyen $G = (V, P_1, P_2, w)$ egy T0L-rendszer, ahol $V = \{a\}$,
 $P_1 = \{a \rightarrow a^2\}$, $P_2 = \{a \rightarrow a^3\}$, and
 $w = a$.
- Ekkor $L(G) = \{a^i \mid i = 2^m 3^n, m, n \geq 0\}$.

Irodalom

- Handbook of Formal Languages, G. Rozenberg, A. Salomaa, (eds.), Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg, 1997.
- Gy. E. Révész, Introduction to Formal Languages, Dover Publications, Inc., New York, 2012.
- G. Rozenberg, A. Salomaa, The mathematical theory of L systems, Vol. 90., Academic Press, 1980.
- J. Dassow, Gh. Paun. Regulated rewriting in formal language theory, Springer Publishing Company, Inc., 2012.