Hálózattervezés Alapjai
2007

2: Multicasting – Steiner Fák

Multicasting

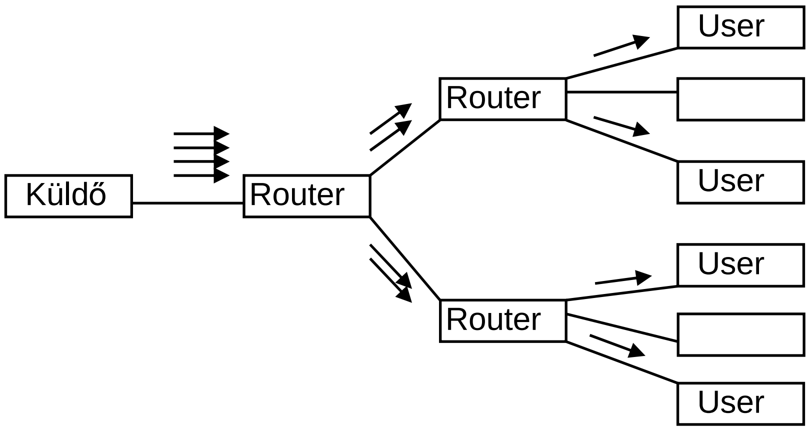
- Az adatok egy küldőtől egyidejűleg több fogadóhoz kerülnek átvitelre

- Felhasználási területek:
  - Real time Streaming, Video-On-Demand
  - Telefon-, Videokonferencia (all-to-all multicast)
  - …

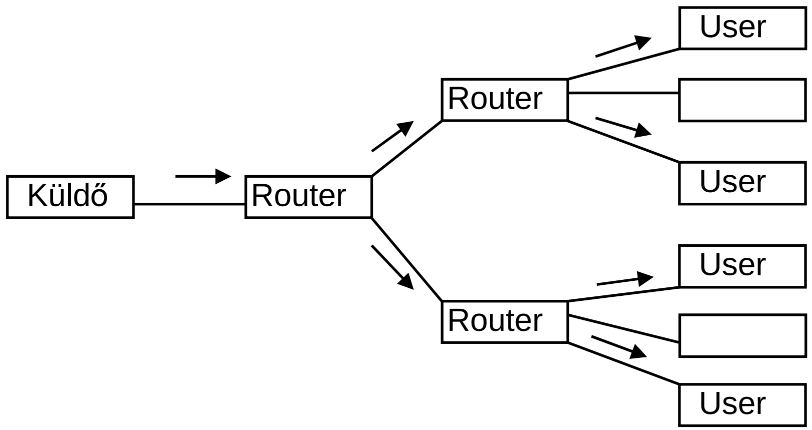
- Multicasting támogatása:
  - Ethernet (csomag tipus 0800)
  - IP (A D osztály címei Multicast céljára vannak lefoglalva)
    - Egy multicast-csoport (group) minden tagja ugyanazt a D osztálybeli címet használja

Multicasting

- Naív megoldás: Multicast-via-Unicast:
  - A küldő egy külön másolatot küld az adatokról minden foadónak.
  - Nagyon inefficiens: A küldött csomagok számasokkal nagyobb, mint ami szükséges lenne (különösen rossz all-to-all multicast esetén).
- Egy multicast-fa felepítése segítségével:
  - Minden linken csak egyszer továbbítódik egy csomag.
  - A routerek döntik el, hogy egy csomagot több linken is továbbítanak-e.



Naív megoldás



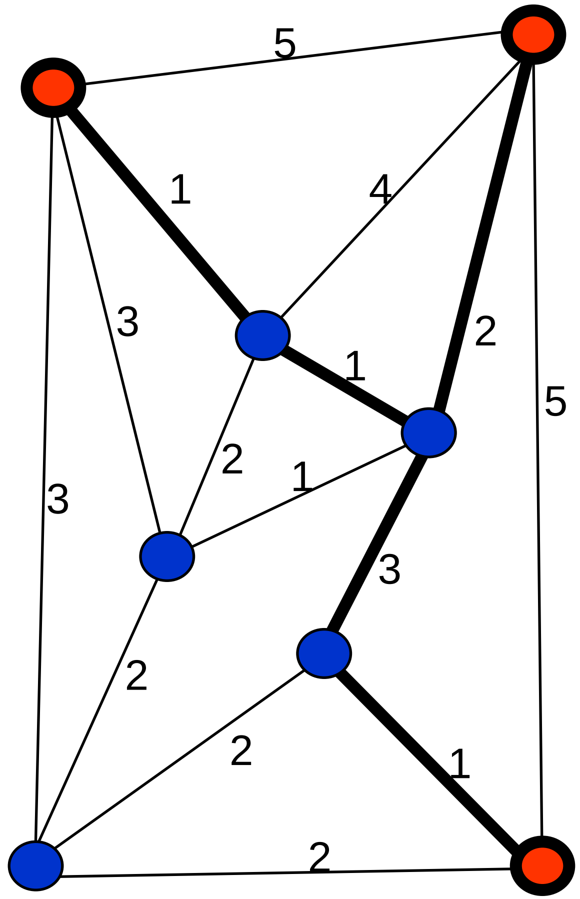
Multicast-fa

Multicasting

- Hogy néz ki egy optimális multicast-fa?
  - A hálózat terhelése minimális legyen.
  - Feltesszük: minden egyes linken az átvitel költsége független az iránytól.
- Steiner Probléma:
  - Adott: Egy összefüggő irányítatlan gráf $G=(V,E)$, élsúlyok c: $E \to \mathbb{R}^+$, terminal-csomópontok halmaza $N \subseteq V$.

    (N: a multicast-csoport tagjai: a küldő és minden fogadó;

    $c(e)$: a költség, ami akkor lép fel, ha az e linken adatot viszünk át. P.l.: 1/sávszélesség)
  - $T=(V',E')$ egy Steiner-fa G-ben, ha T egy részfája G-nek és $N \subseteq V'$. A $V' \setminus N$ beli csomópontokat Steiner-csomópontoknak nevezzük.
  - Amit keresünk: Egy T Steiner-fa G-ben, melynek a súlya $c(T) := \sum_{c \in E'} c(e)$ minimális.



Steiner-fák

- Speciális eset: $N=V$
  - Egy Steiner-fa feszítőfája G-nek.
  - Egy minimális Steiner-fa minimális feszítőfája G-nek.
  - Ekkor a Steiner probléma hatékonyan megoldható (Prim algoritmusa).
- Speciális eset: $|N|=2$
  - Egy Steiner-fa egy út a két terminál-csomópont között.
  - Egy minimális Steiner-fa egy kegrövidebb út.
  - Ekkor a Steiner probléma hatékonyan megoldható (Dijkstra algoritmusa).
- Általános esetben a Steiner probléma *NP*-nehéz.
  - Még akkor is, ha minden él súlya 1.
  - PTAS (polynomial time approximation scheme) sem létezik a Steiner problémához, ha $P \neq NP$.
    - Egy PTAS egy olyan algoritmus, ami minden konstans $\varepsilon>0$–hoz az optimális megoldás egy $(1+\varepsilon)$-approximatióját n-ben polinomiális idő alatt kiszámítja, azaz a kiszámított megoldás költsége az optimális megoldás költségének legfeljebb $(1+\varepsilon)$-szorosa.

Approximációs algoritmusok

- Legyen *P* egy optimalizálási probléma.
  Legyen *P*(*I*) a probléma optimális megoldása egy adott *I* instanciára (inputra).
  - A Steiner probléma esetén:
    - *I = G, c, N* [egy adott irányíttlan gráf, élsúlyok, terminálok]
    - *P*(*I*) = *c*(*T*) [a minimális Steiner fa súlya]

- A *P* probláma *g*(*n*) relatív approximációs rátával (röviden *g*(*n*) rátával) approximálható, ha létezik egy polinomiális idejű algoritmus *A*, úgy hogy minden *n* méretű *I* instanciára :

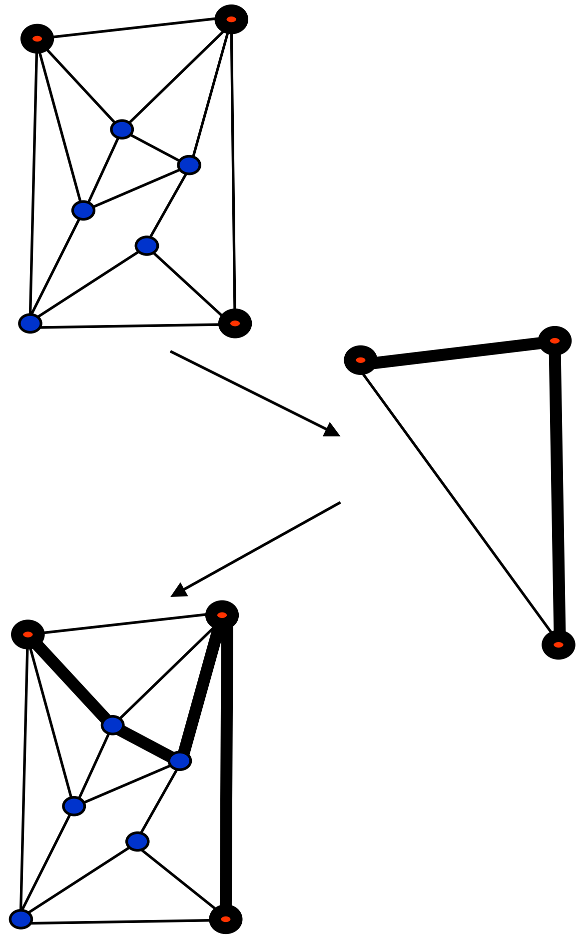
$$\max\left\{\frac{P(I)}{A(I)}, \frac{A(I)}{P(I)}\right\} \leq g(n)$$

  ahol *A*(*I*) az *A* által kiszámított megoldás az *I* instanciára.
  Egy ilyen *A*-t egy *g*(*n*)-approximációs algoritmusnak nevezzünk a *P* problémához, a megoldást pedig *g*(*n*)-approximációnak.

Steiner-fák – Távolság-Heurisztika [Takahashi, Matsuyama 1980]

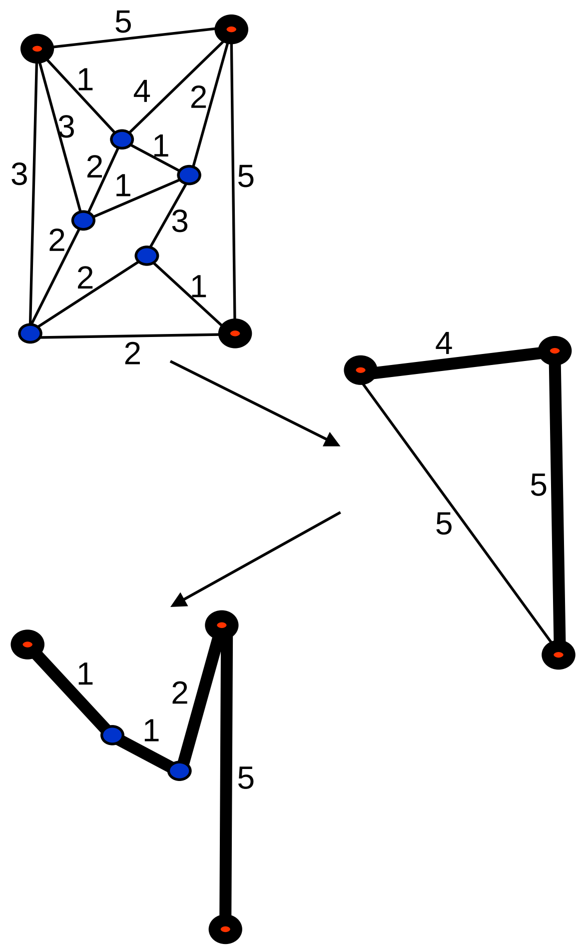
- Egy algoritmus a Steiner probléma 2-approximációjához

- Alapötlet:
  1. Visszavezetjük a problémát egy minimális feszítőfa *M*=(*N*,*F*) kiszámításának problémájára.
  2. Megmutatjuk, hogy a minimális feszítőfa *M* kötsége *c*(*M*) legfeljebb 2-szer nagyobb, mint egy minimális Steiner-fa *T* költsége *c*(*T*).
  3. A minimális feszítőfából *M* -ből konstruálunk egy Seiner-fát *T´*-t, úgy hogy *c*(*T´*) ≤ *c*(*M*).



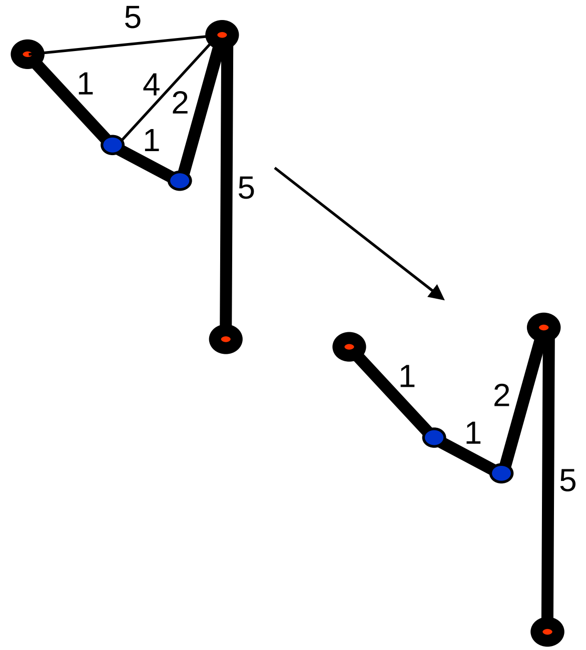
Steiner-fák – Távolság-Heurisztika

- 1. lépés: Kiszámítjuk a $G' = (N,F)$ Távolság-gráfot $G = (V,E)$-hez:
  - Legyen minden $u,v \in N$ párhoz $d(u,v)$ egy legrövidebb út hossza u-tól v-hez G-ben.
  - A távolság-gráf $G' = (N,F)$ tartalmaz minden $u,v \in N$, $u \neq v$, párhoz egy $f = \{u,v\}$ élet, melynek súlya $c'(f) := d(u,v)$.
- 2 lépés: Kiszámítunk egy M minimális feszítőfát G'-ben.
- 3 lépés: Kiszámítjuk G egy H részgráfját, amely M minden $f = \{u,v\}$ éléhez tartalmazza egy legrövidebb út csomópontjait és éleit u-tól v-ez G-ben.



Steiner-fák – Távolság-Heurisztika

- 4. lépés: Kiszámítjuk a *G* gráf *V*(*H*) által indukált részgráfját *H´*-t.
- 5. lépés: Kiszámítjuk *H´* egy minimális feszítőfáját *T´*-t
  - *T´* egy Steiner-fa *G*-ben.
  - Megjegyzés: Alternatív, ki lehetne egy minimális feszítőfát direkt *H*-hoz számítani ahhoz, hogy egy 2-approximációt kapjunk egy minimális. Azáltal, hogy *H´* -hoz számítunk ki egy minimális feszítőfát, bizonyos esetekben jobb eredményt lehet elérni.
- 6. lépés: Eltávolítjuk *T´*-ből azokat a Steiner-csomópontokat (*V*(*T´*)*N* azon csomópontjait), melyeknek a foka 1.



Steiner-fák – Távolság-Heurisztika

Futási idő:

- 1. lépés: G' kiszámítása: $O(|N|\,(n \log n + m))$
- Minden $u \in N$ csomóponthoz számítsuk ki egy legrövidebb utak fáját Dijkstra algoritmusával
- 2. lépés: M kiszámítása: $O(|N|^2)$
  - G'-ben $|N|$ csomópont van és $O(|N|^2)$ él. Prim algoritmusával: $O(|N|^2)$ idő
- 3. lépés: H kiszámítása: $O(|N|\, n)$
  - Az M fa $|N|$-1 élének mindegyikét G-ben egy úttal helyettesítjük, amely utak mindegyikének hossza legfeljebb n-1
- 4. lépés: H' kiszámítása: $O(m)$
  - G minden élénél teszteljük, hogy mindkét végpontja H-ban van-e
- 5. lépés: T' kiszámítása: $O(n \log n + m)$
  - Prim algoritmusával
- 6. lépés: A Steiner-csomópontok eltávolítása, melyek foka 1: $O(n)$
- Összesen: $O(|N|\,(n \log n + m))$ idő

Steiner-fák – Távolság Heurisztika

Az approximációs ráta elemzése

- Jelölje *OPT* egy minimális Steiner-fa költségét.

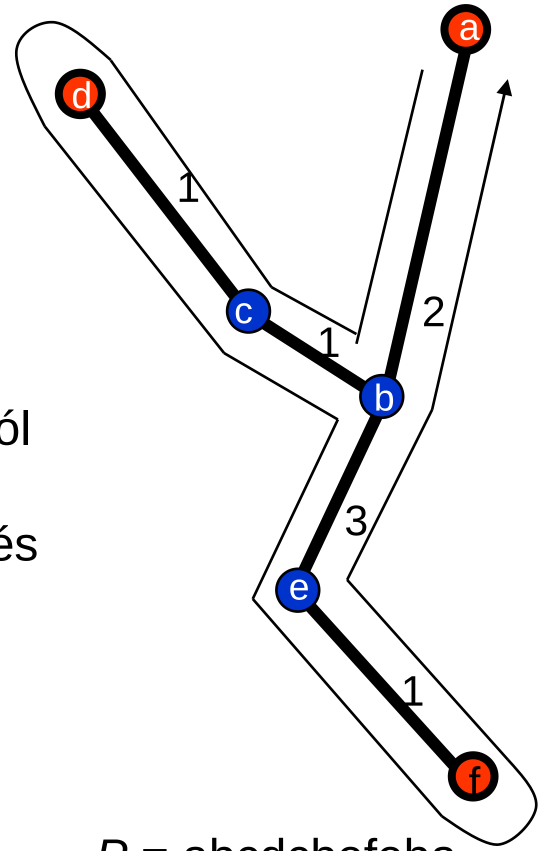
<u>Lemma 1</u>:

a) Legyen *W´* a távolság gráf *G´* egy *M* minimális feszítőfájának a súlya. Ekkor *W´* ≤ (2 – 2 / |*N*|)*OPT.*

b) *T´* súlya legfeljebb *W´*.

Biz. a):

- Legyen *T* egy minimális Steiner-fa
- Legyen *P* egy út, amely egy tetszőleges *s* csomópontból indul és egyszer „körülfutja *T*-t“:
  - Kezdjük el *T* egy preorder bejárását s-ből indulva és adjuk hozzá P-hez az éleket abban a sorrendben, amelyben bejárjuk őket.
  - *T* minden éle kétszer fordul elő *P*-ben.
- Érvényes: $\Sigma_{e\in E(P)} c(e) = 2\ OPT$.



P = abcdcbefeba

Steiner-fák – Távolság-Heurisztika

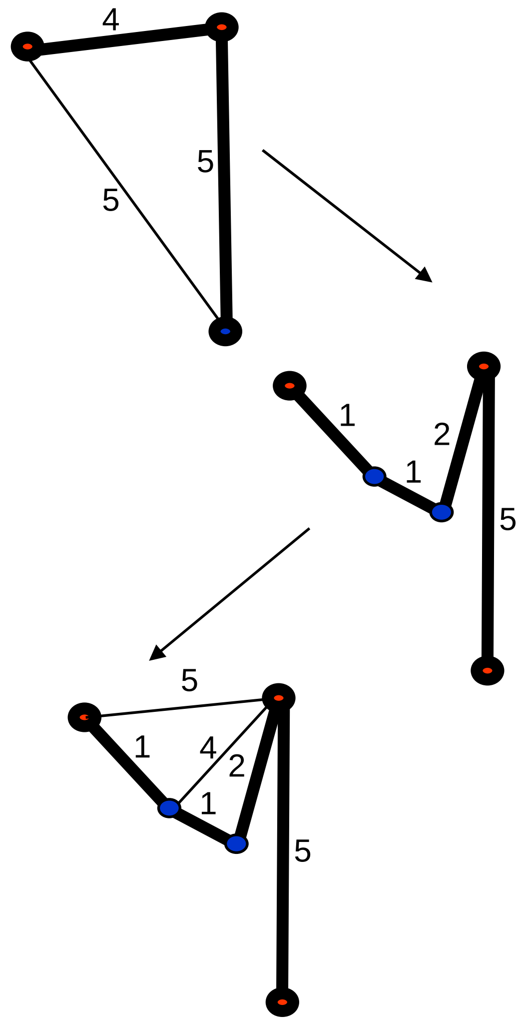
- Vágjuk szét *P*-t azokon a helyeken, ahol egy *N* beli csomópont először fordul elő.
  - |*N*| útdarabot kapunk.
- Távolítsuk el a legnagyobb súlyú útdarabot
  - A megmaradó |*N*|-1 útdarab súlya ≤ 2 ((|*N*|-1) / |*N*|) *OPT* = (2 – 2 / |*N*|) *OPT.*
  - Minden útdarab egy *N* beli csomópontból indul és egy *N* beli csomópontban végződik, úgy hogy minden *N* beli csomópontban csak egy útdarab kezdődik és egy végződik.
- Tekintsük minden útdarabhoz a megfelelő élet a *G´* távolság-gráfban.
  - Legyen $P_{u,v}$ egy útdarab *u*-tól *v*-hez. Ekkor: $c´(\{u,v\}) \leq c(P_{u,v})$.
  - Ez az |*N*|-1 él egy feszítőfát képez *G´*-ben, melynek súlya ≤ (2 – 2 / |*N*|) *OPT.*
- *G´* egy minimális feszítőfájának *M*-nek a súlya *W* ≤ (2 – 2 / |*N*|) *OPT.*

útdarabok:
abcd, dcbef, feba

Steiner-fák – Távolság-Heurisztika

Biz. b) (T' súlya $c(T') \le W'$):

- A 3. lépésben az algoritmus helyettesíti M minden élét a végpontok közötti legrövidebb úttal G-ben.
- Ha alegrövidebb utak éldiszjunktak lennének, akkor H súlya $c(H)$ egyenlő lenne M súlyával $c'(M)=W'$-vel.
- Mivel a legrövidebb utak közös éleket is tartalmazhatnak, $c(H) \le W'$.
- H egy minimális feszítőfájának T_H -nak a súlya $c(T_H)$ nem nagyobb mint $c(H) \le W'$.
- Mivel $H \subseteq H'$, $c(T') \le c(T_H) \le W'$.
- Miután eltávolítottuk a Steiner-csomópontokat, melyek foka 1, a súly csak csökkenhet.



<u>Tétel1</u>: A bemutatott algoritmus $O(|N|\,(n \log n + m))$ idő alatt kiszámít egy Steiner-fát, melynek költsége legfeljebb $(2 - 2\,/\,|N|)\,OPT < 2\,OPT$.