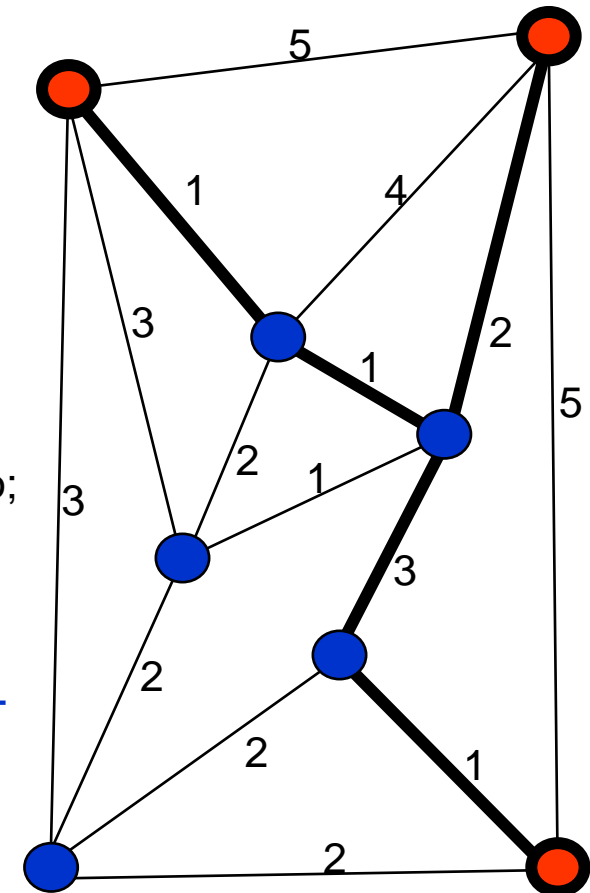


# Hálózatvezetés Alapjai 2007

## 3: Multicasting – Steiner fák (folytatás)

# Multicasting

- Hogy néz ki egy optimális multicast-fa?
  - A hálózat terhelése minimális legyen.
  - Feltesszük: minden egyes linken az átvitel költsége független az iránytól.
- Steiner Probléma:
  - Adott: Egy összefüggő irányítatlan gráf  $G=(V,E)$ , élsúlyok  $c: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ , terminal-csomópontok halmaza  $N \subseteq V$ .
    - ( $N$ : a multicast-csoport tagjai: a küldő és minden fogadó;
    - $c(e)$ : a költség, ami akkor lép fel, ha az  $e$  linken adatot viszünk át. Pl.: 1/sávszélesség)
  - $T=(V',E')$  egy **Steiner-fa**  $G$ -ben, ha  $T$  egy részfája  $G$ -nek és  $N \subseteq V'$ . A  $V \setminus N$  beli csomópontokat **Steiner-csomópont**oknak nevezzük.
  - Amit keresünk: Egy  $T$  Steiner-fa  $G$ -ben, melynek a súlya  $c(T) := \sum_{e \in E'} c(e)$  minimális.



## Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata [Mehlhorn 1988]

Alapötlet:

- Az 1. lépésben a  $G'$  távolság-gráf helyett egy  $G''$  gráfot számítunk ki  $c'': E(G') \rightarrow \mathbb{R}^+$  élsúlyokkal, úgy hogy
  - Minden minimális feszítőfa  $M''$  a  $G''$  gráfban a  $c''$  élsúlyok szerint egyben egy minimális feszítőfa a  $G'$  gráfban  $c$  élsúlyok szerint, és  $c''(M'') = c(M')$ ;
  - $G''$  kiszámítható  $O(n \log n + m)$  időben.
- Kiszámítunk egy  $M''$  minimális feszítőfát  $G''$  -ben.
- Ezután végrehajtjuk az eredeti távolságheurisztika lépéseit  $M''$ -t használva.

## Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

$G''$  következőképp definiált:

- Minden  $z_i \in N$  csomóponthoz legyen

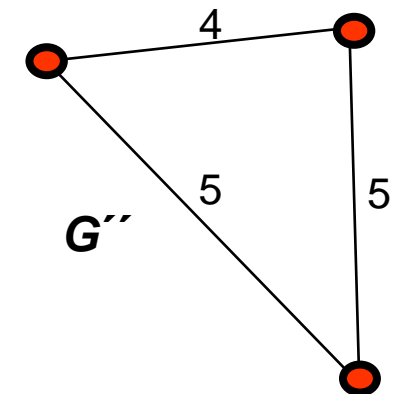
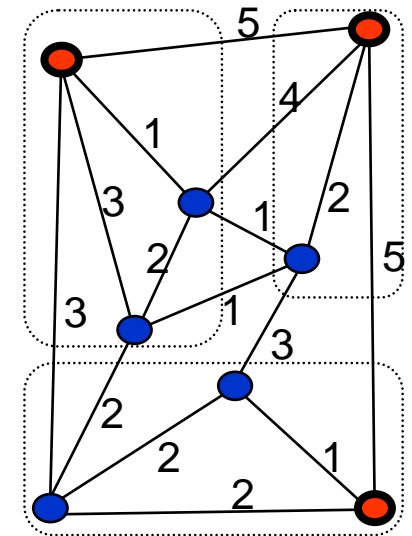
$$N(z_i) := \{z_i\} \cup \left\{ v \in V \setminus N : d(v, z_i) = \min_{z' \in N} d(v, z') \text{ und } i = \min \{ j : d(v, z_j) = \min_{z' \in N} d(v, z') \} \right\}$$

Vegyük észre:  $N(z_i)$ ,  $z_i \in N$ , egy partíciót definiál  $V$ -ben.

- $E(G'') := \left\{ \{z_i, z_j\} : z_i, z_j \in N, \exists \{u, v\} \in E(G) \text{ mit } u \in N(z_i), v \in N(z_j) \right\}$
- $c''(z_i, z_j) := \min \{ d(z_i, u) + c(\{u, v\}) + d(v, z_j) : \{u, v\} \in E(G), u \in N(z_i), v \in N(z_j) \}$

Figyeljük meg:

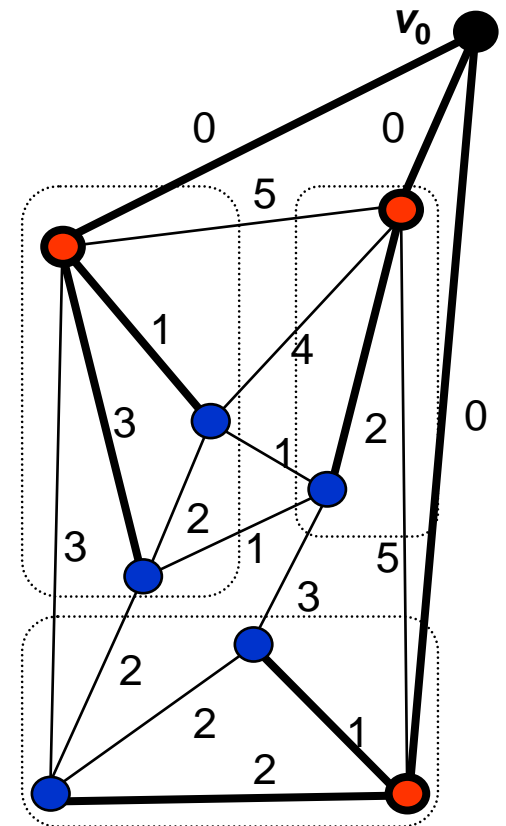
- $G''$  lehet  $G'$ -nek egy valódi részgráfja.
- Egy él súlya  $G''$ -ben lehet nagyobb is mint  $G'$ -ben (kisebb nem lehet).



## Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

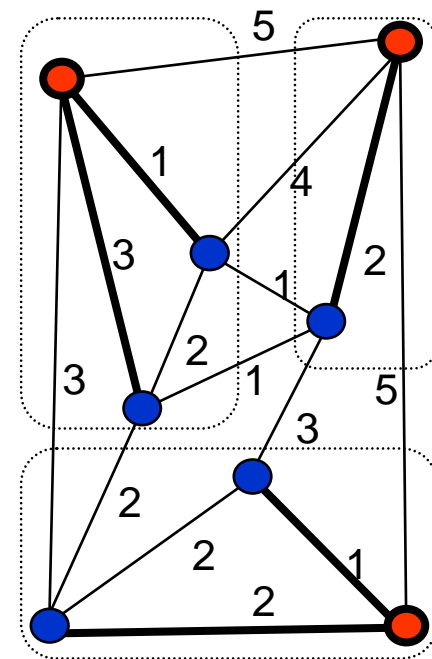
$G''$  konstrukciója:

- Adjunk hozzá a  $G$  gráfhoz egy új  $v_0$  csomópontot és minden  $z \in N$ -hez egy új  $\{v_0, z\}$  élet  $c(\{v_0, z\}) = 0$  élsúllyal.
- Feltétel: Az eredeti  $G$  gráf minden élének súlya  $> 0$ .
- Számítsunk ki  $v_0$  kezdőcsomóponttal egy legrövidebb utak fáját  $T_S$ -t Dijkstra algoritmusával.



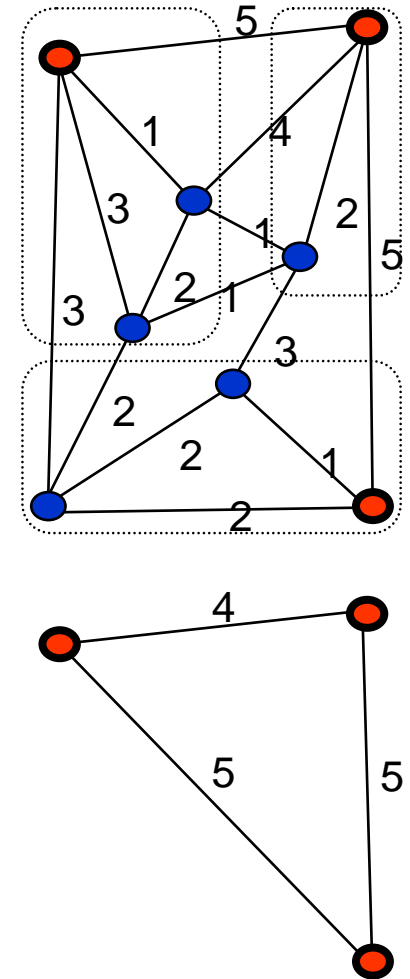
## Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

- Töröljük  $v_0$ -t és minden hozzá incidens élet  $T_S$ -ből.
  - $T_S$  részfákra esik szét.
  - Minden részfa pontosan egy terminalcsomópontot tartalmaz (ez a feltételből következik az eredeti gráf éleinek a súlyáról).
  - A  $z \in N$  terminál részfája pontosan  $N(z)$ -t tartalmazza.
  - Minden  $v \in V$ -re a kiszámított legrövidebb út költsége  $dist(v)$  pontosan a  $d(v,z)$  érték, ahol  $z \in N$ ,  $v \in N(z)$ .



# Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

- $c'': E(G') \rightarrow \mathbb{R}^+$  kiszámítása
  - Teszteljük  $G$  minden  $\{u, v\}$  élére, hogy  $u$  és  $v$  különböző  $N(z_i)$  és  $N(z_j)$  halmazban van-e.
  - Ha igen, és  $\{u, v\}$  az első él  $N(z_i)$  és  $N(z_j)$  között, vagy  $d(u, z_i) + c(\{u, v\}) + d(v, z_j)$  kisebb mint az aktuális költség  $c''(\{z_i, z_j\})$ , akkor legyen  $c''(\{z_i, z_j\}) := d(u, z_i) + c(\{u, v\}) + d(v, z_j)$ .



## Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

Lemma 2: Legyen  $M''$  a  $G''$  gráf egy minimális feszítőfája  $c''$  élsúlyok szerint.  
Akkor  $M''$  a  $G'$  gráfnak egy minimális feszítőfája  $c'$  élsúlyok szerint.

Biz.: Megmutatjuk:

(1)  $G'$ -nek van egy olyan  $M^*$  minimális feszítőfája, hogy  $M^*$  minden  $\{z_i, z_j\}$  éle  $G''$ -ben is benne van és  $c''(\{z_i, z_j\}) = c'(\{z_i, z_j\})$ .

Ha (1) teljesül, akkor

- $M^*$  minimális feszítőfája  $G''$ -nek is és
- $G''$  minden más  $M''$  minimális feszítőfájára teljesül, hogy  $c''(M'') = c''(M^*) = c'(M^*)$ ,  
ezért  $M''$  egy minimális feszítőfája  $G'$ -nek  $c'$  élsúlyok szerint.



# Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

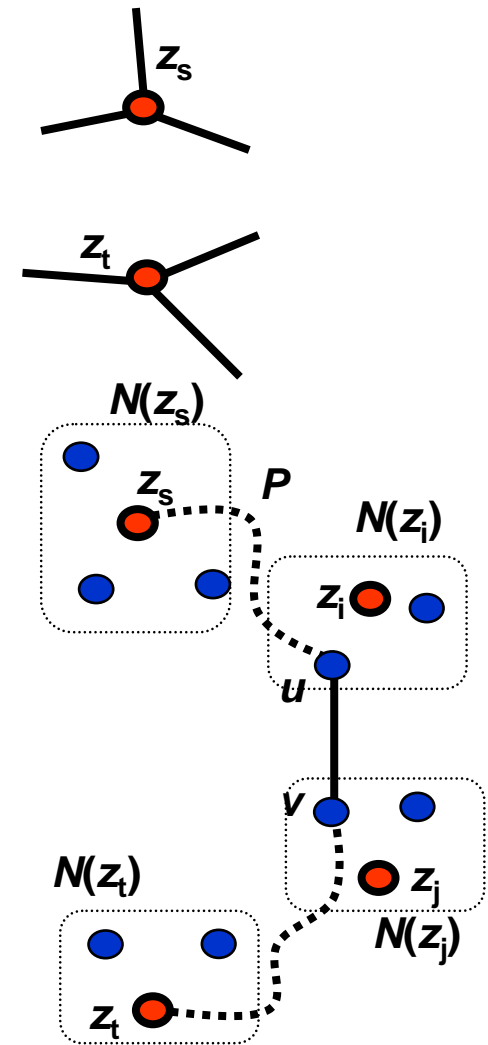
Tegyük fel: (1) nem teljesül. Legyen  $M^\circ$  egy minimális feszítőfája  $G'$ -nek, amely

- maximális számú  $G'$  belső éleket tartalmaz, azaz  $|E(M^\circ) \cap E(G')|$  maximális, és
- az élek összköltsége  $\sum_{E(M^\circ) \cap E(G')} c'(e)$  minimális azon minimális feszítőfák között, amikre a) igaz.

Ekkor teljesül:

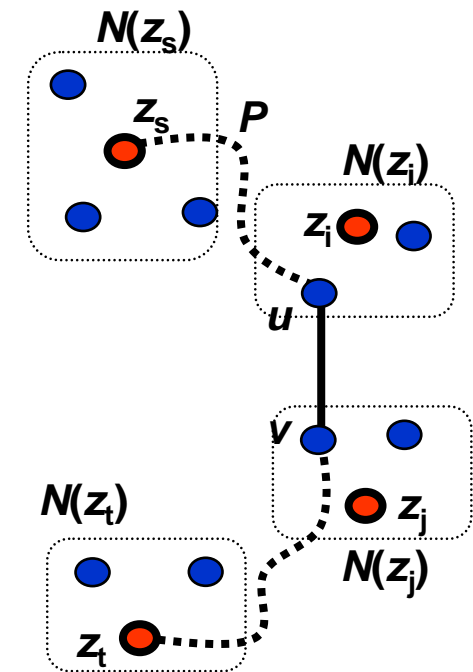
- vagy létezik egy él  $\{z_s, z_t\} \in E(M^\circ) \setminus E(G')$ ,
- vagy egy olyan él létezik  $\{z_s, z_t\} \in E(M^\circ)$ , amelyre  $c'(\{z_s, z_t\}) > c'(\{z_s, z_t\}) = d(z_s, z_t)$ .

Legyen  $P$  egy legrövidebb út  $z_s$ -től  $z_t$ -hez  $G$ -ben  $c$  szerint. Tekintsünk egy olyan  $\{u, v\}$  éleket, hogy  $u$  és  $v$  különböző partícióban van: mondjuk  $u \in N(z_i)$ ,  $v \in N(z_j)$ .



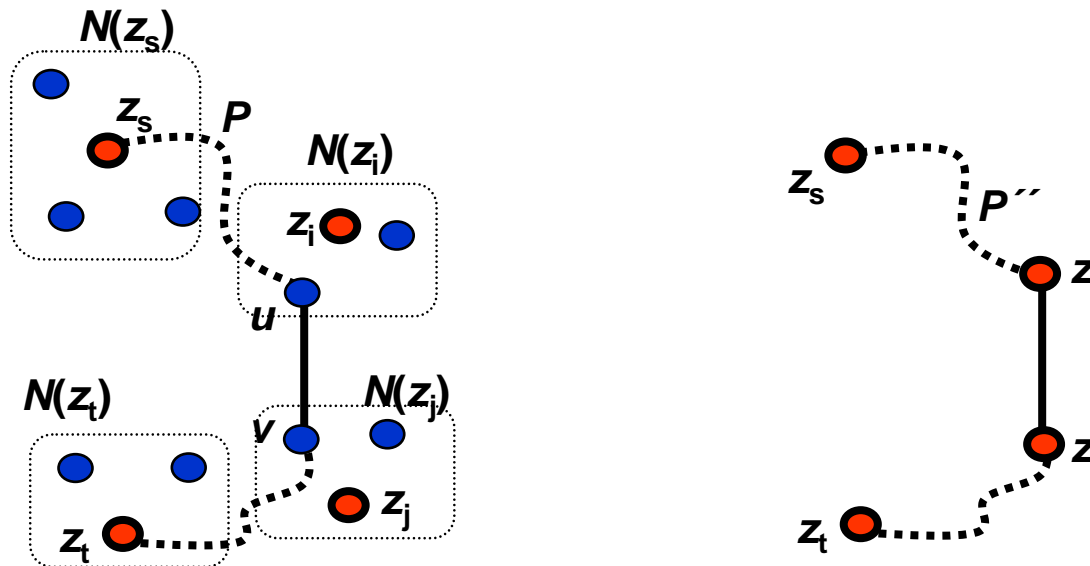
## Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

- Definíció szerint teljesül  $d(z_i, u) \leq d(z_s, u)$ ,  $d(z_j, u) \leq d(z_t, u)$ .
- Mivel  $N(z_i)$  és  $N(z_j)$  között  $G$ -ben legalább egy él van, pl.  $\{u, v\}$ , következik hogy  $\{z_i, z_j\} \in E(G')$ .
- $\{z_i, z_j\}$  költsége  $G'$ -ben:
 
$$\begin{aligned} c'(\{z_i, z_j\}) &= \min\{d(u^*, z_i) + c(\{u^*, v^*\}) + d(v^*, z_j) : \\ &\quad u^* \in N(z_i), v^* \in N(z_j)\} \\ &\leq d(u, z_i) + c(\{u, v\}) + d(v, z_j) \\ &\leq d(u, z_s) + c(\{u, v\}) + d(v, z_t) \\ &= c(P) \\ &= d(z_s, z_t) \\ &= c'(\{z_s, z_t\}). \end{aligned}$$
- Ezért  $P$  minden  $\{u, v\} \in P$  élre, melynek végpontjai különböző partícióban vannak,  $u \in N(z_i)$ ,  $v \in N(z_j)$ , teljesül hogy  $c'(\{z_i, z_j\}) \leq c'(\{z_s, z_t\})$ .



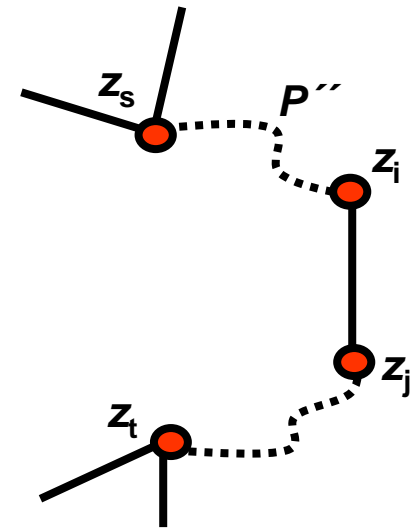
## Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

- Tekintsük a  $P''$  utat  $z_s$ -től  $z_t$ -hez  $G''$ -ben, ami következőképp definiált:
- $\{z_i, z_j\} \in E(P'')$   $\Leftrightarrow \exists \{u, v\} \in E(P)$ , amelyre  $u \in N(z_i)$ ,  $v \in N(z_j)$ ,  $i \neq j$ .



## Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

- Ha az  $\{z_s, z_t\}$  éllet a  $G'$  gráf  $M^\circ$  minimális feszítőfájából eltávolítjuk,  $M^\circ$  két részfára  $M_s^\circ$  és  $M_t^\circ$  esik szét.
- Mivel  $P''$  egy út  $z_s$ -től  $z_t$ -hez  $G''$ -ben, letezik legalább egy  $\{z_i, z_j\} \in P''$  él, úgy hogy  $z_i \in V(M_s^\circ)$  és  $z_j \in V(M_t^\circ)$ .
- Ha  $\{z_s, z_t\}$ -t  $M^\circ$ -ben  $\{z_i, z_j\}$ -vel kicseréljük, kapunk egy másik feszítőfát  $M^*$ -t, amelyre
  - $c'(M^*) = c'(M^\circ) - c'(\{z_s, z_t\}) + c'(\{z_i, z_j\}) \leq c'(M^\circ)$   
Ezért  $M^*$  egy minimális feszítőfája  $G'$ -nek.
- A feltételünk miatt:
  - vagy  $\{z_s, z_t\} \notin E(G'')$ , ekkor  $|E(M^*) \cap E(G'')| < |E(M^\circ) \cap E(G'')|$ ;
  - vagy  $\{z_s, z_t\} \in E(G'')$  úgy hogy  $c''(\{z_s, z_t\}) > c'(\{z_s, z_t\})$ , ekkor  $c''(\{z_s, z_t\}) > c'(\{z_s, z_t\}) \geq c''(\{z_i, z_j\})$ , és  $c''(M^*) < c''(M^\circ)$ .



## Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

Tétel 2: Mehlhorn változata a távolság-heurisztikának  $O(n \log n + m)$  idő alatt kiszámít egy Steiner-fát, melynek költsége legfeljebb  $(2 - 2 / |N|) OPT < 2 OPT$ .

# Steiner-fák – Dinamikus Programozás

[Dreyfus, Wagner 1972]

- Exakt algoritmus a Steiner probléma megoldásához.
- Az időigény exponenciális  $|M|$ -ben.
- Egy  $D \subseteq V$  halmazra és egy  $v \in V$  csomóra jelölje  $S(v, D)$  egy minimális Steiner-fa költségét, ahol a terminálok halmaza  $D \cup \{v\}$ .
- $S(v, D)$  a következő rekurzióval kiszámítható:
  - $$S(v, D) = \min_{w \in V} \{ d(v, w) + \min_{\emptyset \neq D' \subset D} \{ S(w, D') + S(w, D \setminus D') \} \}$$
  - $w$ -t **összekötő csomópont**nak nevezzük
  - $w$  foka  $\geq 3$
  - Lehetséges, hogy  $w=v$

# Steiner-fák

## Megjegyzések:

- Legjobb ismert polinomiális idejű approximáció a Steiner problemához: approximációs ráta  $1 + \frac{1}{2} \ln 3 \approx 1,55$  [Robins, Zelikovsky 2000]
  
- Egy algoritmus, ami a gyakorlatban nagyon jól működik, az u.n. iterált 1-heurisztika [Kahng, Robins '95]:
  1. Legyen  $S := \emptyset$  ( $S$  a kényszerített Steiner-csomópontok halmaza)
  2. Számítsunk ki a távolság-heurisztikával egy  $T$  Steiner-fát  $N \cup S$  terminálokkal
  3. do
  4. Minden  $v \in V \setminus (N \cup S)$ -hez számítsunk ki egy  $T_v$  Steiner-fát  $N \cup S \cup \{v\}$  terminálokkal a távolság-heurisztikával;
  5. Legyen  $u$  egy csomópont, amelyre  $c(T_u)$  minimális;
  6. if  $(c(T_u) < c(T))$  then  $S := S \cup \{u\}$ ;  $T := T_u$ ; fi;
  7. until ( $T$ -t nem tudtuk megjavítani)

## Irodalom

- H. Takahashi and A. Matsuyama: **An approximate solution for the Steiner problem in graphs.** *Math. Japonica*, Vol. 24, 573-577, 1980.
- K. Mehlhorn: **A faster approximation algorithm for the Steiner Problem in graphs.** *Information Processing Letter*, Vol. 27, 125-128, 1988.
- A. B. Kahng and G. Robins: **A new class of iterative Steiner tree heuristics with good performance.** *IEEE Transactions on Computer-Aided Design*, Vol. 11(7), 893-902, 1992.
- G. Robins and A. Zelikovsky: **Improved Steiner tree approximation in graphs.** *Proceedings of the 11th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, 770-779, 2000.