Hálózattervezés Alapjai
2007

6: Általános Hálózat Tervezés – Spanner Gráfok

Buy-at-Bulk Hálózattervezési Problémák

- Emlékeztető: A buy-at-bulk hálózattervezési probléma egy kábeltipussal (ND1K)
- **Adott:**
  - V: csomópontok n elemű halmaza, a csomópontok 1-től n-ig számozva vannak
  - $R=(r_{ij})$: Forgalomigény-mátrix
    - $r_{ij} \in R_{\geq 0}$: forgalom egy időegység alatt i -től j-be.
  - F: Egy link installálásának fix alapköltsége (kapacitás-független költség).
  - $A=(a_{ij})$: Költség-mátrix
    - $a_{ij} \in R_{\geq 0}$: Egy egységnyi kapacitású link installálásának a költsége i és j között.
    - A szimmetrikus és érvényes rá a háromszög-egyenlőtlenség.
- **Feladat:** határozzunk meg minden r_{ij} forgalom-igényhez, $0<i\leq j\leq n$, egy P_{ij} utat, úgy hogy

$$\Sigma_{e=\{i,j\}\in E'}(F + \lceil q(e) \rceil\, a_{ij}) \text{ minimális,}$$

ahol
  - $E' = E(\cup_{0<i\leq j\leq n} P_{ij})$: az installált linkek halmaza,
  - $q(e) = \Sigma_{e\in P_{ij}} r_{ij}$: az igények összege, melyek útvonala az e linket tartalmazza

Buy-at-Bulk Hálózattervezési Problémák

Emlékeztető:

Lemma 1: Legyen *OPT* az ND1K probléma optimális megoldásának a költsége. A következő alsó korlátok érvényesek *OPT*-ra:

(1) $OPT \geq F \bullet (n-1) + MST$,
ahol *MST* egy minimális feszítőfa költsége az *n* csomópont által meghatározott teljes gráfban, melyben az (i,j) él súlya a_{ij}, $i,j \in V$, $i \neq j$.

(2) $OPT \geq \mathrm{F} \bullet (n-1) + \Sigma_{1 \leq i < j \leq n} r_{ij} a_{ij}$

Hálózattervezés – Spanner gráfok [Mansour, Peleg 94]

- **Cél:** Egy olyan hálózatot konstruálni,
  - amelyben minden *i*,*j* csomópontpárra az út *i*-től *j*-jez nem sokkal hosszabb, mint a_{ij} és
  - könnyű: a hálózat súlya nem sokkal nagyobb, mint a minimális feszítőfáé

- Legyen $G=(V,E)$ egy összefüggő irányítatlan gráf c: $E \to R^+$ élsúlyokkal. Jelölje $d_G(u,v)$ egy legrövidebb út hosszát *u*-tól *v*-hez *G*-ben (*c* súlyoknak megfelelően).
  - Egy *H* részgráfot *G*-ben *G* feszítő részgráfjának nevezünk, ha *H* tartalmazza *G* minden csomópontját, azaz $H \subseteq G$ és $V(H) = V(G)$.
  - Jelölje $stretch(H) := \max_{u,v\in V}(d_H(u,v) / d_G(u,v))$ a *H* strech-faktorát ($d_H(u,v)$) egy legrövidebb út hosszát *u*-tól *v*-hez *H*-ban).
  - Ha egy adott t>1 -re $stretch(H) \leq t$ érvényes, akkor azt mondjuk, hogy *H* egy *t*-spanner *G*-ben.

Greedy-Spanner

Algoritmus: Greedy-Spanner [Althöfer et al. 93]

Input: Egy összefüggő irányítatlan $G=(V,E)$ gráf $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ élsúlyokkal és egy stretch-faktor $t > 1$.

Output: Egy t-spanner $H=(V,E')$ G-ben.

1. Rendezzük az éleket $E = \{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$, úgy hogy $c(e_1) \leq c(e_2) \leq \ldots \leq c(e_m)$;
2. $E' := \emptyset$; $H := (V,E')$;
3. **for** $i =$ 1 **to** m **do**
   // Legyen $e_i = \{u,v\}$
   if $d_H(u,v) > t\, c(\{u,v\})$ **then**
   $E' := E' \cup \{e_i\}$; $H := (V,E')$;
   fi;
   od;
4. **return** $H=(V,E')$;

Greedy-Spanner

Tétel 1: A Greedy-Spanner algoritmus kiszámítja G-nek egy H részgráfját, melyre érvényes:

- H egy t-spanner G-ben.
- H legfeljebb $n \lceil n^{2/(t-1)} \rceil$ élet tartalmaz.
- Minden δ-ra, $0 < \delta < \min(1, t-1)$, érvényes

$$c(H) \leq (5 + 32t / \delta^2) \cdot n^{(2+\delta)/(t-1-\delta)} \cdot MST,$$

ahol $c(H) = \Sigma_{e \in E'} c(e)$ a H gráf súlya, MST pedig G egy minimális feszítőfájának a súlya.
(Bizonyítás következik)

Greedy-Spanner – Hálózattervezés

t = log n és δ=1/2 (z.B.) a következőt kapjuk:

Következmény 1: A Greedy-Spanner algoritmus t = log n paraméterrel kiszámít egy t-spannert H-t G-ben, melyben az élek száma $O(n)$ és $c(H) = O(\log n) \cdot MST$.

Biz.:

élek száma:

$$|E(H)| = n \lceil n^{2/(\log n - 1)} \rceil = n \lceil 2^{2 \log n / (\log n - 1)} \rceil = O(n)$$

költség :

$$c(H) \leq (5 + 32 \log n / \delta^2) \cdot n^{(2+\delta)/(\log n - 1 - \delta)} \cdot MST$$
$$= O(\log n) \cdot 2^{\log n (2+\delta)/(\log n - 1 - \delta)} \cdot MST = O(\log n)\, MST. \qquad \square$$

Greedy-Spanner – Hálózattervezés

Algoritmus: ND1K [Mansour, Peleg 94]

Input: V halmaz n csomópontal, igény mátrix R=(r_{ij}),
fix költség F, költségmátrix A = (a_{ij})

Output: P_{ij} út minden 1 ≤ i < j ≤ n, amelyre r_{ij} > 0.

1. Kiszámítunk a Greedy-Spanner algoritmussal egy (log n)-spannert H-t a teljes gráfban, melynek csomóponthalmaza V és élsúlyai a_{ij} által adottak
2. P_{ij} := egy legrövidebb út i-től j-hez H-ban, minden 1 ≤ i < j ≤ n.

Greedy-Spanner - Hálózattervezés

Tétel 2: Az ND1K algoritmus polinomiális idő alatt kiszámítja az ND1K probléma egy megoldást, mely megoldásnak a költsége legfeljebb $O(\log n) \cdot OPT$, ahol *OPT* egy optimális megoldás költségeit jelöli.

Biz.: Legyen *C* a kiszámított megoldás költsége és *E´* a megoldás éleinek halmaza.

$$C = F \cdot |E'| + \Sigma_{e=\{i,j\} \in E'} \lceil q(e) \rceil \cdot a_{ij} .$$

C-t két részre bontjuk C_1 és C_2 (azaz $C = C_1 + C_2$):

$$C_1 = \Sigma_{e=\{i,j\} \in E'} q(e) \cdot a_{ij}$$

$$C_2 = F \cdot |E'| + \Sigma_{e=\{i,j\} \in E'} \Delta(e) \cdot a_{ij} ,$$

ahol $\Delta(e) = \lceil q(e) \rceil - q(e)$ a kapacitás, amit az *e* linknél megfizetünk, de nem használunk.

Greedy-Spanner - Hálózattervezés

Teljesül:

$$C_1 = \Sigma_{1\le i<j\le n}\, r_{ij} \cdot d_H(i,j),$$

ahol $d_H(i,j)$ egy legrövidebb út hossza H-ban az A mátrixban adott élsúlyoknak megfelelően, amelyet az r_{ij} igényhez rendelünk.

Mivel H egy (log n)-spanner, teljesül hogy $C_1 \le (\log n)\ \Sigma_{1\le i<j\le n}\, r_{ij} \cdot a_{ij}$.
Lemma 1(2) szerint $OPT \ge \mathrm{F} \cdot (n-1) + \Sigma_{1\le i<j\le n}\, r_{ij} a_{ij}$. Ebből következik, hogy:

$$C_1 \le (\log n) \cdot OPT.$$

Mivel $\Delta(e) < 1$ minen $e \in E'$ élre:

$$C_2 \le F \cdot |E'| + \Sigma_{e=\{i,j\}\in E'}\, a_{ij} \ .$$

Következmény 1 szerint $|E'| = O(n)$. Így $F \cdot |E'| \le \kappa \cdot F \cdot (n-1)$ egy κ konstansra.
Ezenkívül, Következmény 1 alpján teljesül $\Sigma_{e=\{i,j\}\in E'}\, a_{ij} \le O(\log n) \cdot MST$.
Lemma 1(1) szerint: $F \cdot (n-1) + MST \le OPT$. Ezért

$$C_2 \le O(\log n) \cdot OPT.$$

Azt kapjuk, hogy $C = C_1 + C_2 = O(\log n) \cdot OPT$. □