Hálózattervezés Alpjai
2007

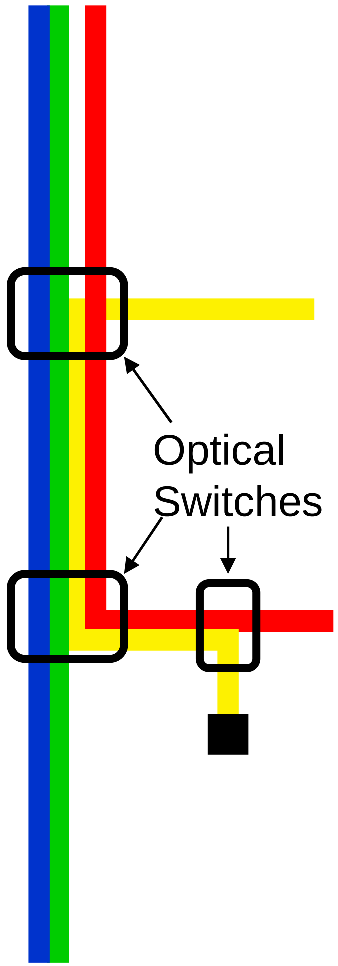
9: Hullámhossz Hozzárendelés Optikai WDM Hálózatokban

Optikai kommunikációs hálózatok

- Az adatok laser által üvegkábelen kerülnek átvitelre.
- Előnyei:
  - Nagyon magas átviteli ráta, több terrabit/s (10^{12}b/s), 25-30THz.
  - Nagyon alacsony bit-hiba.
- Probléma a routingnál: Elektronikus komponensek nem tudnak a THz-tartományban dolgozni.
- Hullámhossz-Multiplexálás (wavelength division multiplexing, WDM):
  - Az üvegkábel sávszélességét csatornákra osztjuk különböző hullámhosszokkal.
  - Különböző kommunikációs kapcsolatok adatai különböző hullámhosszú laser-rel egyszerre átvihetők ugyanazon az üvegkábelen.
  - Egy hullámhosszon az adatok tipikusan 2.4Gbps vagy 10Gbps átviteli rátával kerülnek átvitelre.

Optikai kommunikációs hálózatok - WDM

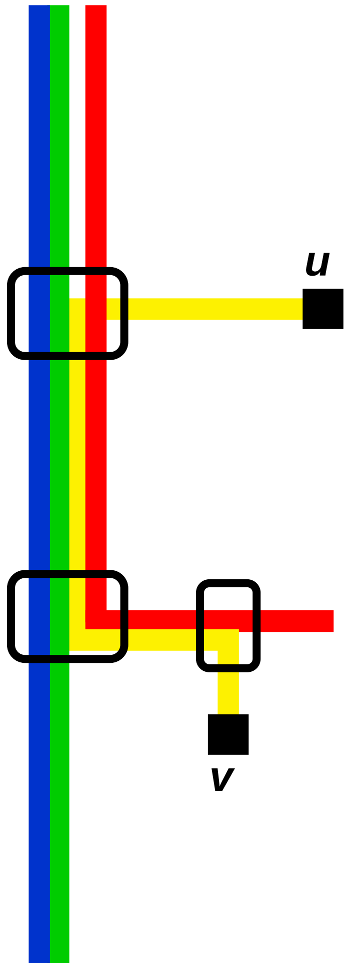
- Add-Drop-Multiplexer (ADM) segítségével az egyes hullámhosszok bevihetők és kinyerhetők az optikai hálózatból.
  - A hálózat elektronikus komponenseinek akkor csak az egyes hullámhosszok bitrátáját kell tudni feldolgozni, ami már megvalósítható.
- Szabadon konfigurálható optikai switchek a bemenő szignálokat a hullámhosszuktól függően tetszőleges kimenő linkekre tudják irányítani anélkül, hogy a szignálokat át kellene alakítani elektroniks szignálokká.
  - Így a szignálok továbbítása késleltetésmentes.
- Egy szignál hullámhossza nem változtatható meg a ma rendelkezésre álló optikai switch-ekkel.



Optikai kommunikációs hálózatok - WDM

Hullámhossz routing: Egy kapcsolat *u* és *v* csomópont között következőképp létesíthető:

- egy úton *u*-tól *v*-hez le kell foglalni ehhez a kapcsolathoz egy hullámhosszt,
- minden switcht ezen az úton úgy kell konfigurálni, hogy ezen a hullámhosszon érkező adatok az út következő linkjén továbbítódjanak.
- Az adatok útja a hálózatban a kapcsolatok létesítése (switchek konfigurálása) után csak a hullámhossztól függ.
- Független az adatok fajtájától és a felhasznált protokolloktól.



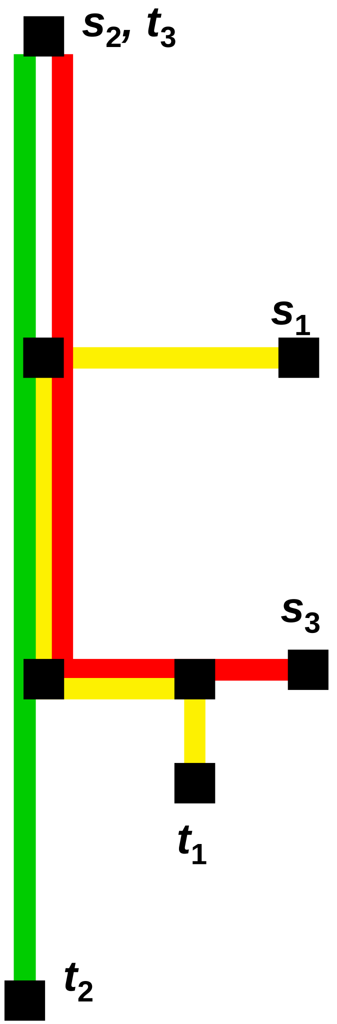
Optikai kommunikációs hálózatok - WDM

Probléma definíció:

- Egy kapcsolat berendezéséhez egy útvonalon egy le kell foglalni hullámhosszt.
- A hullámhossz hozzárendelésnek konfliktusmentesnek kell lenni, azaz két kapcsolathoz, melyek útvonalai egy közös linket tartalmaznak, különböző hullámhosszt kell rendelni.
- A felhasznált hullámhosszok száma korlátos. A hálózat költsége annál nagyobb, minél több hullámhosszt támogat. (Ma legfeljebb kb. 80 hullámhosszal állnak rendszerek kommerciálisan rendelkezésre.)
- A routing és útszinezés probléma (routing and path coloring RPC):
  Adott a kívánt kapcsolatok halmaza.
  Rendeljünk útvonalat és hullámhosszt konfliktusmentesen a kívánt kapcsolatokhoz, úgy hogy a felhasznált hullámhosszok száma minimális legyen.
  Ha az utak egyértelműek (pl. fában, vagy gyűrűben) vagy előre adottak, akkor útszinezésről beszélünk.

Optikai kommunikációs hálózatok - WDM

- A hálózatot egy szimmetrikusan irányított gráf $G=(V,E)$ modellezi, azaz $(u,v)\in E \Leftrightarrow (v,u)\in E$.
- Egy kívánt kapcsolat r a küldő $s_r\in V$ és a fogadó $t_r\in V$ által adott.
- Az r kapcsolat berendezéséhez meg kell határozni G-ben egy $P(r)$ utat s_r-től t_r-hez és az úthoz hozzá kell rendelni egy $w(r)$ színt.
- Az utak és szinek hozzárendelése konfliktusmentes, ha minden $e\in E$ élhez és minden w színhez legfeljebb egy kapcsolat létezik, melynek útja e-t tartalmazza és a w szín van hozzárendelve.



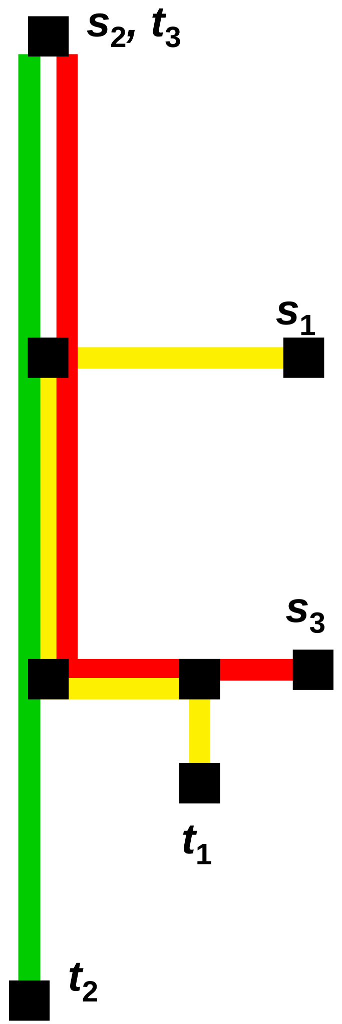
Optikai kommunikációs hálózatok - WDM

Probléma: Routing and Path Coloring (RPC):

- Adott: Egy szimmetrikusan irányított gráf $G=(V,E)$, a kívánt kapcsolatok halmaza R, ahol egy kapcsolat $r=(s_r,t_r)$, $s_r,t_r \in V$ formában van adva.
- Megoldás: Minden $r \in R$ kapcsolathoz egy $P(r)$ út és egy $w(r)$ szín hozzárendelése, úgy hogy a hozzárendelés konfliktusmentes.
- Cél: minimalizáljuk a felhasznált szinek számát.

Probléma: Path Coloring (PC):

- Adott: Egy szimmetrikusan irányított gráf $G=(V,E)$, irányított utak halmaza P a G gráfban.
- Megoldás: Minden $p \in P$ úthoz egy szín $w(p)$ hozzárendelése, ugy hogy a szinek hozzárendelése konfliktusmentes.
- Cél: minimalizáljuk a felhasznált szinek számát.



Optikai kommunikációs hálózatok - WDM

Ha a rendelkezésre álló szinek egy hálózatban nem elegendőek ahhoz, hogy minden kapcsolatot konfliktusmentesen létrehozzunk, a következő probléma adódik.

Probléma: Maximum Routing and Path Coloring (MaxRPC)

- Adott: Egy szimmetrikusan irányított gráf $G=(V,E)$, a kívánt kapcsolatok halmaza R, ahol egy kapcsolat $r=(s_r,t_r)$, $s_r,t_r \in V$ formában van adva, a rendelkezésre álló szinek száma W.
- Megoldás: A kívánt kapcsolatok egy részhalmaza $R' \subseteq R$ és minden $r \in R'$ kapcsolathoz egy út $P(r)$ és egy $w(r) \in \{1,2,\ldots,W\}$ szín hozzárendelése, úgy hogy a hozzárendelés konfliktusmentes
- Cél: maximalizáljuk $|R'|$-t.

Probléma: Maximum Path Coloring (MaxPC):
mint MaxRPC, csak az utak előre adottak.

Optikai kommunikációs hálózatok - WDM

A MaxRPC probléma speciális esete, amikor W=1, egy nagyon alapvető optimalizálási problémához vezet: ekkor éldiszjunkt utak maximális halmazát kell meghatározni (maximum edge disjoint paths MEDP).

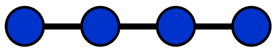
Amikor az utak előre adottak (a MaxPC probléma spesiális esete, amikor W=1), akkor a MEDPwPP (maximum edge disjoint paths with pre-specified paths) problémához jutunk.

Probléma: Maximum Edge Disjoint Paths (MEDP)

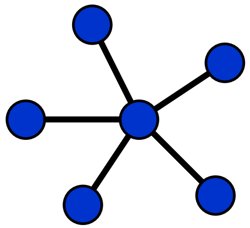
- Adott: Egy szimmetrikusan irányított gráf $G=(V,E)$, a kívánt kapcsolatok halmaza R, ahol egy kapcsolat $r=(s_r,t_r)$, $s_r,t_r \in V$ formában van adva.
- Megoldás: $R' \subseteq R$ és $P(r)$ utak éldiszjunkt hozzárendelése minden $r \in R'$ kapcsolathoz.
- Cél: maximalizáljuk $|R'|$-t.

Ismert eredmények áttekintése

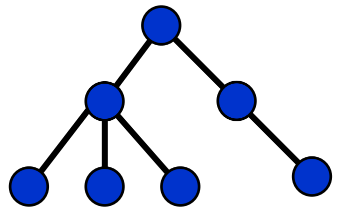
Néhány topológia, amit vizsgálunk:



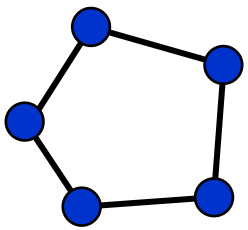
Lánc



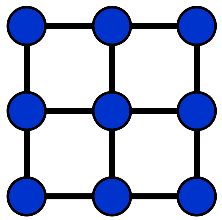
Csillag



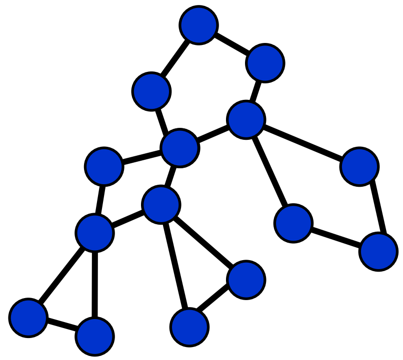
Fa



Gyűrű



2D-Rács



Gyűrűkből álló fa
(tree of rings ToR)

Gyűrűkből álló fa (ToR):

1. Egy gyűrű egy ToR
2. Ha B_1 és B_2 ToR, akkor az a gráf B egy ToR, amely azáltal áll elő, hogy B_1 egy u csomópontját B_2 egy v csomópontjával összeolvasztjuk.

Ismert eredmények áttekintése

Eredmények a RPC és a PC probléma komplexitásáról:

PC láncon:	polinomiáis
PC csillagban:	polinomiális
PC fán:	*NP*-nehéz, 5/3-Approx. [EJK+99]
PC gyűrűn:	*NP*-nehéz, 3/2-Approx. [Kar80]
RPC gyűrűn:	*NP*-nehéz, 2-Approx. [WW98]
RPC 2D-rácson:	*NP*-nehéz, $(\log\log n)^{O(1)}$-Approx. [Rab96]
RPC ToR-n:	*NP*-nehéz, 10/3-Approx. [WW98]

Ismert eredmények áttekintése

Eredmények a MEDP és a MEDPwPP probléma komplexitásáról:

- MEDP láncon: polinomiális
- MEDP csillagban: polinomiális
- MEDP fán: *NP*-nehéz, 5/3-Approx. [EJ98]
- MEDP gyűrűn: polinomiális
- MEDPwPP gyűrűn: polinomiális
- MEDP 2D-rácson: *NP*-nehéz, $O(1)$-Approx. [KT95]
- MEDP általános gráfban: *NP*-nehéz, $O(m^{1/2})$-Approx. [Kle96]

Ismert eredmények áttekintése

Eredmények a MaxRPC és a MaxPC probléma komplexitásáról:

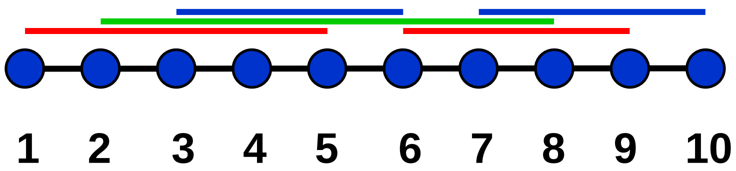
• MaxPC láncon:	polinomiális
• MaxPC csillagban:	polinomiális
• MaxPC fán:	*NP*-nehéz, 2.22-Approx.
• MaxPC gyűrűn:	*NP*-nehéz, $e/(e-1)\approx 1.58$-Approx.
• MaxRPC gyűrűn:	*NP*-nehéz, $e/(e-1)\approx 1.58$-Approx.
• MaxRPC 2D-rácson:	*NP*-nehéz, $O(1)$-Approx.
• MaxRPC általános gráfban:	*NP*-nehéz, $O(m^{1/2})$-Approx.

Algoritmusok útszinezéshez

Jelölések:

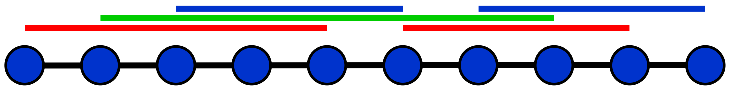
- Legyen P az utak egy adott halmaza és $e \in E$ egy él a hálózatban.
  Az e él terhelése $L(e)$ azon P beli utak száma, melyek az e élt tartalmazzák.
- Legyen $L_{max}=\max_{e \in E} L(e)$ a maximális élterhelés. L_{max} nyilvánvalóan egy alsó korlát az úthalmaz optimális szinezéshez felhasznált szinek számára.

Útszinezés láncokon



- A láncot úgy képzeljük el, hogy csomópontjai balról jobbra növekvően meg vannak számozva.
- Az utak, amelyek balról jobbra mennek, teljesen függetlenek a másik irányba menő utaktól. Ezért az ellentétes irányba menő utakat egymástól függetlenül ugyanazokkal a színekel szinezhetjük.
- Az egy irányba menő utakat L_{max} színnel a következőképpen szinezhetjük (ezt egymás után mindkét irányra alkalmazzuk):
  - Dolgozzuk fel az utakat bal oldali végpontjuk szerint növekvő sorrendben.
  - Amikor egy *p* utat feldolgozunk, rendeljük hozzá a legkisebb számú színt, amellyel nem lép fel konfliktust egyetlen már szinezett úttal sem.

Útszinezés láncokon

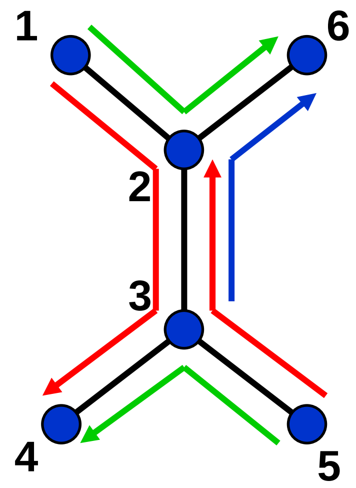


Tétel 1: A megadott algoritmus polinomiális idő alatt kiszámít a láncon az utakhoz egy optimális szinezést L_{max} színnel.

Biz.: Az algoritmus nyilvánvalóan implementálható polinomiális időben.
Világos, hogy minden konfliktusmentes szinezéshez legalább L_{max} szín szükséges.
Indukcióval megmuatjuk, hogy a leírt algoritmus L_{max} színt használ.
Indukció kezdete: Kezetben (mielőtt az első utat megszineztük) az állítás igaz.
Indukciós feltétel: az állítás igaz az első k útra.
Legyen P_k az első k út halmaza. Legyen p a (k+1)-edik út.
Legyen (u,v) az első éle p-nek.
Mivel minden P_k beli út bal oldali végpontja nem jobbra van u-tól, minden P_k beli út, ami p-től nem éldiszjunkt, tartalmazza az (u,v) élt is.
Mivel legfeljebb L_{max} út tartalmazhatja (u,v)-t, legfeljebb L_{max}-1 út lehet, ami már meg van szinezve és p beli élet is tartalmaz.
Ha p-hez a legkisebb számú színt rendeljük hozzá, akkor a hozzárendelt szín mindig az első L_{max} szín között van. □

Útszinezés fákon

- Láncokkal ellentétben az útszinezési probléma fákon NP-nehéz. Nem mindig létezik egy szinezés L_{max} színnel (l. kép: L_{max}=2, legalább 3 szín szükséges).
- Tekintsük a következő algoritmust:
  - Kezdetben minden út szinezetlen.
  - Dolgozzuk fel a fa csomópontjait preorder számuk szerint növekvő sorrendben.
  - Amikor a *v* csomópontot dolgozzuk fel, tekintsünk minden szinezetlen utat, amely *v*-t érinti, tetszőleges sorrendben és rendeljük minden úthoz a legkisebb számú lehetséges színt, amivel nem keletkezik konfliktus.



Útszinezés fákon

Tétel 2: A megadott algoritmus polinomiális időben kiszámít a fán az utakhoz egy szinezést, amely legfeljebb $2L_{max}$-1 színt használ. Mivel az optimális algoritmus legalább L_{max} színt használ, ez egy 2-approximációs algoritmus.

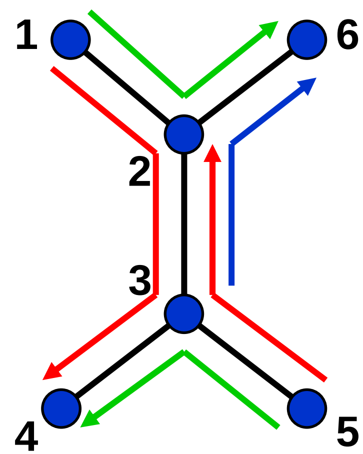
Biz.: Az algoritmus nyilvánvalóan polinomiális időben fut és egy konfliktusmentes szinezést számít ki.

Indukcióval megmutatjuk, hogy az algoritmus legfeljebb $2L_{max}$-1 színt használ fel.

Indukció kezdet: Kezdetben (mielőtt az első utat megszineztük) igaz az állítás.

Indukcíós feltétel: Az állítás igaz az első *k* út megszinezése után.

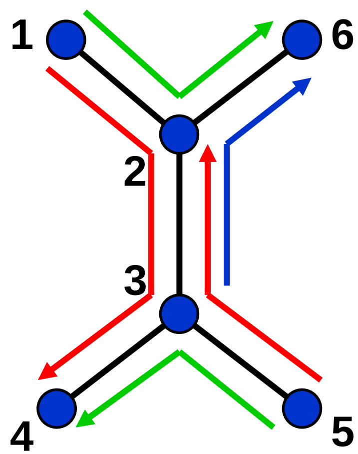
Legyen P_k az első *k* út halmaza.
Legyen *p* a (*k*+1)-edik út és legyen *v* az a csomópont, amelynél *p*-t feldolgozzuk.



Útszinezés fákon

Mivel minden P_k beli út érint egy csomópontot, melynek preorder száma nem nagyobb mint *v* preorder száma, az összes P_k beli útnak, amely *p*-től nem éldiszjunkt, a *v* csomópontot érintenie kell és *p*-nek egy *v*-hez incidens élét tartalmaznia kell.

Mivel *p* legfeljebb két *v*-hez incidens élt tartalmaz, legfeljebb $2(L_{max}-1)$ szinezett út tartalmaz *p* beli élt. Ha *p*-hez mindig legkisebb számú színt rendeljük hozzá, akkor a hozzárendelt szín mindig az első $2L_{max}-1$ szín között van. □



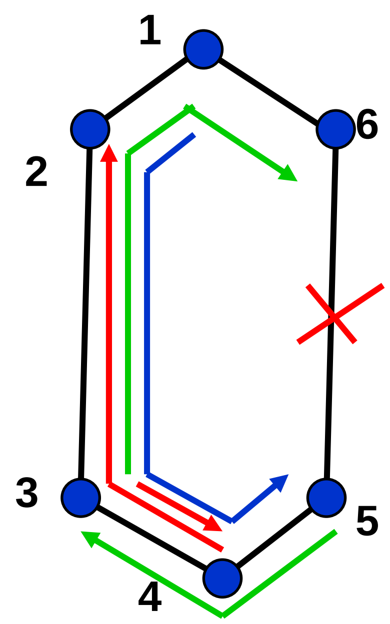
Megjegyzés: A legjobb ismert polinomiális idejű algoritmus útszinezéshez fákon $\lceil 5/3\ L_{max} \rceil$ színt használ [EJK+99].

Útszinezés gyűrűkön

- Az RPC problémában gyűrűkön minden kívánt kapcsolathoz a két lehetséges út egyikét (az óramutató járásával megegyező, vagy ellentétes irányban) kell kiválasztani és ahhoz egy színt kell rendelni. A szinek számának minimalizálása itt is *NP*-nehéz.

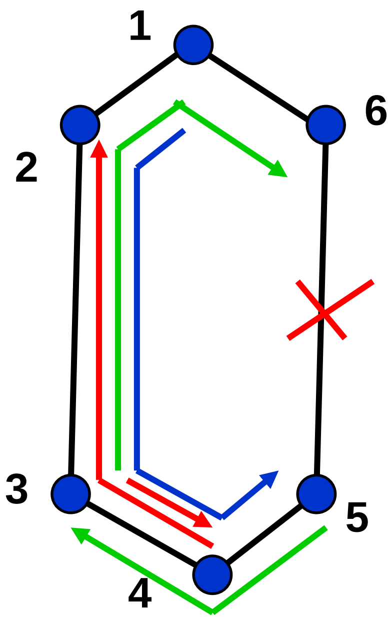
  A következő algoritmus 2-approximációs rátát garantál:

  - Válasszunk a gyűrűn tetszőlegesen két szomszédos csomópontot *u*-t és *v*-t és „vágjuk szét“ az (*u*,*v*) és a (*v*,*u*) élt. Ekkor egy láncot kapunk, melynek végpontjai *u* és *v*.
  - Tekintsük a kívánt kapcsolatokat mint utakat a láncon és alkalmazzuk az optimális útszinező algoritmust a láncon.



Útszinezés gyűrűkön

Tétel 3: A leírt algoritmus egy polinomiális idejű 2-approximációs algoritmus az RPC problémához gyűrűkön.

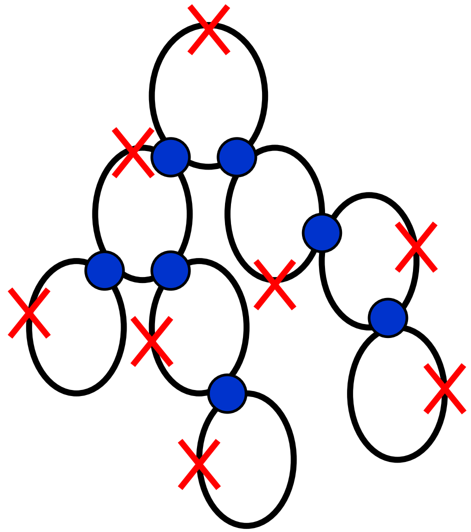


Biz.: Legyen S^* egy optimális megoldása az RPC problémának a gyűrűn, amely *OPT* színt használ fel, és legyen L^* a maximális élterhelés, amelyet az utak okoznak, amit S^* a kapcsolatokhoz rendel. Legyen L a maximális élterhelés a leírt algoritmus A által kiszámított megoldásban. Megmutatjuk, hogy $L \leq 2L^*$.

Legyen e az az él, amelyet A a gyűrű szétvágásához választ. Tekintsük az S^* megoldást. Cseréljünk ki S^*-ben minden utat, amely e-t tartalmazza, arra az útra, amely a két végpontot a másik irányban köti össze a gyűrűn és távolítsuk el e-t (és a szimmetrikus élt) a gyűrűből. Ebben a megoldásban a maximális élterhelés $\leq 2L^*$. Mivel e-t eltávolítottuk, egy útszinezési probléma megoldását kaptuk egy láncon, ahol az utak, és így a maximális élterhelés, egyértelműek. Így $L \leq 2L^*$
Mivel $L^* \leq OPT$, következik hogy $L \leq 2OPT$. □

Útszinezés gyűrűkből álló fákon

- Az RPC probléma itt szintén *NP*-nehéz, mivel már egy gyűrűn is *NP*-nehéz.
- Az ötlet, hogy a gyűrűkben egy élet szétvágunk, itt is konstans approximációs rátához vezet:
  - Válasszunk minden gyűrűn a gyűrűkből álló fán két szomszédos csomópontot *u*-t és *v*-t és távolítsuk el az (*u,v*) és a (*v,u*) élt a gyűrűből. A megmaradó gráf egy fa.
  - Alkalmazzuk az útszinező algoritmust fákon, amely $\lceil 5/3\ L_{max} \rceil$ színt használ.



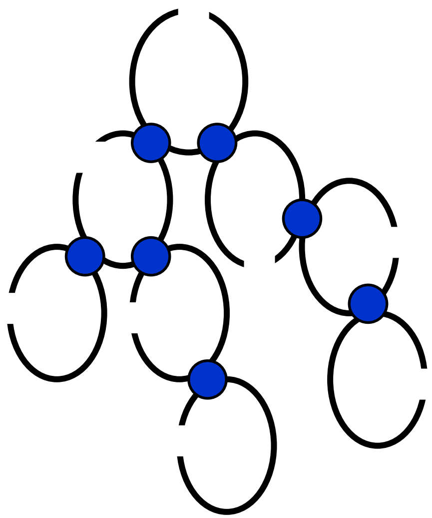
Útszinezés gyűrűkből álló fákon

Tétel 4: A leírt algoritmus egy polinomiális idejű (10/3)-approximációs algoritmus az RPC problémához gyűrűkből álló fákon.

Biz.: Legyen S^* egy optimális megoldása az RPC problémának OPT színnel és legyen L^* a maximális élterhelés, amit az utak okoznak, amit S^* a kapcsolatokhoz rendel.

Legyen L a maximális élterhelés a leírt algoritmus által kiszámított megoldásban.
Mint a Tétel 3 bizonyításában, könnyű megmutatni, hogy $L \leq 2L^*$.

Mivel $L^* \leq OPT$, következik hogy $L \leq 2OPT$.
Az algoritmus (5/3) $L \leq$ (10/3) OPT színt használ az utak szinezéséhez a fán. □



Redukció MaxRPC-ről MEDP-re [AAR+96]

- A MaxPC (MaxRPC) problémára kapunk egy approximációs algoritmust, ha van egy r-approximációs algoritmusunk a MEDPwPP (MEDP) probámára.
- Ezt a MaxPC és a MEDPwPP problémára mutatjuk meg. A MaxRPC-re és a MEDP-re ugyanúgy működik az ötlet.
- Legyen A_1 egy r-approximaciós algoritmus a MEDPwPP problémához, azaz minden adott irányított utak P halmazához egy szimmetrikusan irányított G gráfban az $A_1(G,P)$ algoritmus kiszámítja éldiszjunkt utak $P' \subseteq P$ olyan halmazát, melyre $|P'| \leq z^*/r$, ahol z^* az éldiszjunkt utak száma a MEDPwPP egy optimális megoldásában.

Redukció MaxRPC-ről MEDP-re

Algoritmus A (Approximáció a MaxPC problémához)

Input: Gráf G, úthalmaz P, szinek száma W.

Output: Diszjunkt részhalmazok $P_1, P_2, \ldots, P_W$ von P, ahol minden P_i éldiszjunkt utakból áll.

- begin
- for $i = 1$ to W do
- $P_i := A_1(G,P)$;
- $P := P \setminus P_i$;
- od;
- end;

Redukció MaxRPC-ről MEDP-re

Tétel 5: Ha A_1 egy r-approximációs algoritmus a MEDPwPP problémához, akkor az A egy r'-approximaciós algoritmus a MaxPC problémához, ahol

$$r' = \frac{1}{1 - e^{-1/r}} \leq r + 1.$$

Biz.: Legyen $a_i = |P_i|$, $i = 1,2,\ldots,W$. Az A által kiszámított megoldás $a_1 + a_2 + \ldots + a_W$ útból áll. Legyen O^* az utak halmaza a MaxPC egy optimális megoldásában és legyen $OPT = |O^*|$. Mivel A_1 egy r-approximációs algoritmus a MEDPwPP problámához, minden $k = 1,2,\ldots,W$ esetén teljesül:

$$a_k \geq \frac{OPT - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1})}{rW}. \qquad (1)$$

Ugyanis ha A_1 k-adik alkalomal hajtódik végre, O^*-ból legfeljebb $a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}$ útat rendeltünk hozzá egy P_i halmazhoz. Így O^*-ban a fennmaradó utak száma legalább $OPT - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1})$, amely utak W színnel szinezhetők. Tehát ebben a pillanatban P tartalmaz $OPT - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}) / W$ éldiszjunkt utat.

Redukció MaxRPC-ről MEDP-re

Megmuatjuk, hogy minden k = 1,2,…,W esetén teljesül:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geq OPT \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{rW}\right)^k\right). \qquad (2)$$

(2)-ből következik Tétel 2 állítása k=W-vel, mivel (1-1/n)^n növekvő n-nel alulról e^{-1}-hez konvergál:

$$\sum_{i=1}^{W} a_i \geq OPT \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{rW}\right)^W\right) = OPT \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{rW}\right)^{rW/r}\right) \geq OPT \cdot (1 - e^{-1/r}).$$

Mivel $e^x \geq 1+x$, következik hogy $e^{1/r} \geq 1+1/r$ és ezért $e^{-1/r} \leq r/(r+1)$. Így:

$$\frac{1}{1 - e^{-1/r}} \leq \frac{1}{1 - \frac{r}{r+1}} = r + 1.$$

Ez pontosan Tétel 5 állítása.

Redukció MaxRPC-ről MEDP-re

Tehát megmtatjuk (2)-t, azaz minden k = 1,2,…,W:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geq OPT \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{rW}\right)^k\right).$$

Indukció k szerint: Ha k = 1, akkor (2) direkt (1)-ből következik. Legyen k > 1 és tegyük fel, hogy (2) igaz (k-1)-re. Akkor

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} a_i &\geq \sum_{i=1}^{k-1} a_i + \frac{OPT - \sum_{i=1}^{k-1} a_i}{rW} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i\right)\left(1 - \frac{1}{rW}\right) + \frac{OPT}{rW} \\
&\geq OPT \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{rW}\right)^{k-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{rW}\right) + \frac{OPT}{rW} \\
&= OPT \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{rW}\right)^{k}\right).
\end{aligned}$$

Így a (2) egyenlőtlenség érvényes és azáltal Tétel 5 is. □

A MEDP probléma

A Maximum Edge Disjoint Path (MEDP) probléma:

Adott: irányítatlan gráf $G(V,E)$, $|V|=n$, $|E|=m$; egy halmaz $T=\{(s_1,t_1),\ldots,(s_k,t_k)\}$, $s_i, t_i \in V$, $1 \le i \le k$.

Megoldás: indexek halmaza $I \subseteq [1,\ldots,k]$ és minden $i \in I$ indexhez egy P_i út s_i-től t_i-hez, úgy hogy minden $i,j \in I$, $i \neq j$ esetén $P_i \cap P_j = \emptyset$ (ahol az utakat élek halmazaként tekintjük)

Cél: minimalizáljuk $|I|$-t.

A MEDP probléma

- NP-teljes
- Polinomialis idő alatt nem approximálható $O(\log^{1/3-\varepsilon} m)$ rátával semmilyen $\varepsilon>0$ esetén (Andrews, Zhang [AZ05]).
- Bemutatunk egy algoritmust, ami $O(m^{1/2})$ approximációt garantál. (Kleinberg [Kle96])

Approximációs algoritmus a MEDP problémához

Algoritmus Greedy EDP

1. Legyen G_0:=G; I:=∅; i:=0;
2. **while** ∃ (s_j,t_j), $j \in [1,\ldots,k] \setminus I$, úgy hogy t_j elérhető s_j-ből G_i-ben **do**
3. Legyen (s_j,t_j) egy pár, $j \in [1,\ldots,k] \setminus I$, amelyre a távolság s_j-től t_j-hez minimális G_i-ben;
4. Legyen P_j egy legrövidebb út s_j-től t_j-hez minimális G_i-ben;
5. Legyen $I := I \cup \{j\}$; $G_{i+1} := G_i \setminus P_j$; $i := i+1$;
6. **od**
7. **return** $(I, \{P_j : j \in I\})$

Tétel 6: A Greedy EDP algoritmus $O(m^{1/2})$ approximációs rátát garantál.

Approximációs algoritmus a MEDP problémához

Tétel 6: A Greedy EDP algoritmus $O(m^{1/2})$ approximációs rárát garantál.

Biz.: Legyen I az indexhalmaz, amivel a Greedy EDP algoritmus visszatér és $J \subseteq [1,\ldots,k]$ az indexhalmaz, amivel egy optimális algoritmus OPT visszatér. Egy $i \in I$ indexhez legyen a Greedy EDP algoritmus által választott út P_i; egy $j \in J$ indexhez az OPT által választott út P^*_j.
Tegyük fel az általánosság korlátozása nélkül, hogy a Greedy EDP algoritmus az $\{1,\ldots,|I|\}$ indexeket választotta. Legyen $h_i = |P_i|$ a P_i út hossza.
Mivel mindíg minimális hosszú utat választottunk:
Tény 1: $h_1 \leq h_2 \leq \ldots \leq h_{|I|}$.

Azt mondjuk, hogy egy P út rövid, ha $|P| \leq m^{1/2}$, egyébként P hosszú.
Mivel minden P^*_j út éldiszjunkt és az élek száma összesen m:
Tény 2: A hosszú utak száma OPT megoldásban kevesebb mint $m^{1/2}$.

Tény 3: $|I| \geq 1$.

Approximációs algoritmus a MEDP problémához

Legyen $j \in J \setminus I$. Azt mondjuk, hogy egy rövid út P^*_j egy P_i út által blokkolt, ha $P^*_j \cap P_i \neq \emptyset$.

Állítás 1: Minden $j \in J \setminus I$ indexre, egy rövid út P^*_j egy rövid út P_i által blokkolt.

Biz. (állítás 1): Legyen P^*_j egy rövid út, $j \in J \setminus I$, és legyen P_i, $i \in I$, a legrövidebb út, ami blokkolja P^*_j-t. Ha $|P^*_j| < |P_i|$, akkor abban a pillanatban, amikor Greedy EDP kiválasztotta P_i-t, a gráf G_{i-1} még tartalmazta P^*_j-t is. Mivel azonban P^*_j rövidebb, ezért Greedy EDP P^*_j-t választotta volna, ami ellentmondás. Így $|P_i| \leq |P^*_j| \leq m^{1/2}$, tehát P_i rövid. $\square$

Approximációs algoritmus a MEDP problémához

(Biz. Tétel 6 folytatás:)

Legyen $I_{short} := \{ i \in I : |P_i| \leq m^{1/2} \}$, $I_{long} := I \setminus I_{short}$;
$J_{short} := \{ j \in J : |P^*_j| \leq m^{1/2} \}$, $J_{long} := J \setminus J_{short}$.

Mivel $\forall\, i \in I_{short} : |P_i| \leq m^{1/2}$, az I_{short}-beli utak éleinek száma összesen $\leq |I_{short}| m^{1/2}$.

Másrészt, minden $j \in J_{short} \setminus I$ indexre, P^*_j legalább egy I_{short}-beli él által blokkolt és minden él legfeljebb egy P^*_j utat blokkol, mivel az utak éldiszjunktak. Ezekből azt kapjuk, hogy:

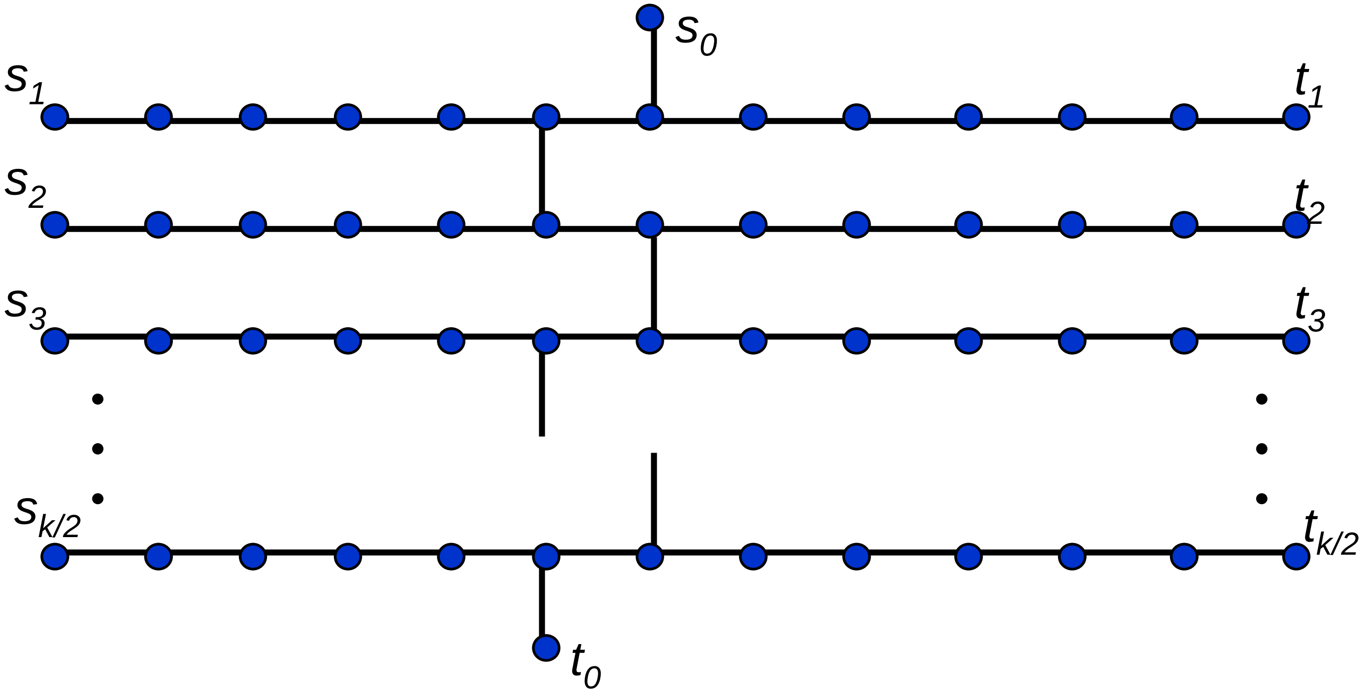
$$
\begin{aligned}
|J_{short} \setminus I| &\leq |I_{short}| m^{1/2} \leq |I| m^{1/2} \\
|J_{short}| &\leq |(J_{short} \setminus I) \cup I| \leq |I| m^{1/2} + |I| = (m^{1/2} + 1)|I| \\
|J_{long}| &\leq m^{1/2} \leq |I| m^{1/2} \\
|J| &= |J_{short}| + |J_{long}| \leq |I|(2m^{1/2} + 1).
\end{aligned}
$$

Tehát Greedy $O(m^{1/2})$-approximációt garantál. $\square$

Approximációs algoritmus a MEDP problémához

Tény 4: Van olyan input, amellyel a Greedy EDP algoritmus approximációs rátája valóban $\Omega(m^{1/2})$.

Példa, ahol a Greedy EDP approximációs rátája $k/2$.
$k = m^{1/2}$ esetén az approximációs ráta $\Omega(m^{1/2})$.



Irodalom

[AAF+96]: B. Awerbuch, Y. Azar, A. Fiat, S. Leonardi, and A. Rosen. **Online Competetive Algorithms for Call Admission in Optical Networks.** In *Proc. 4th ESA*, 431-444, 1996.

[AZ05]: M. Andrews and L. Zhang. **Hardness of the undirected edge-disjoint paths problem**. In *Proc. 27th ACM Symposium on Theory of Computing (STOC),* 276-283, 2005.

[EJ98]: T. Erlebach and K. Jansen. **Maximizing the Number of Connections in Optical Tree Networks.** In *Proc. 9th ISAAC*, 179-188, 1998.

[EJK+99]: T. Erlebach, K. Jansen, C. Kaklamanis, M. Mihail, and P. Persiano. **Optimal Wavelength Routing on Directed Fiber Trees.** *Theoretical Computer Science*, Vol. 221, 119-137, 1999.

[Kar80]: I. A. Karapetian. **On the Coloring of Circular Arc Graphs.** *Journal of the Armenian Academy of Sciences*, Vol. 70(5), 306-311, 1980. (Russian).

[Kle96]: J. Kleinberg. **Approximation Algorithms for Disjoint Path Problems.** *PhD Thesis*, MIT, 1996.

[KK99]: J. Kleinberg and A. Kumar. **Wavelength Conversion in Optical Networks**. In Proc. *12th SODA*, 566-575, 1999.

[KT95]: J. Kleinberg and É. Tardos. **Disjoint Paths in Densely Embedded Graphs**. In *Proc. 36th FOCS*, 52-61, 1995.

[Rab96]: Y. Rabani. **Path Coloring on the Mesh. In Proc.** 37th FOCS, 400-409, 1996.

[WW98]: G. Wilfong and P. Winkler. **Ring Routing and Wavelength Traslation.** In *Proc. 9th SODA*, 333-341, 1998.