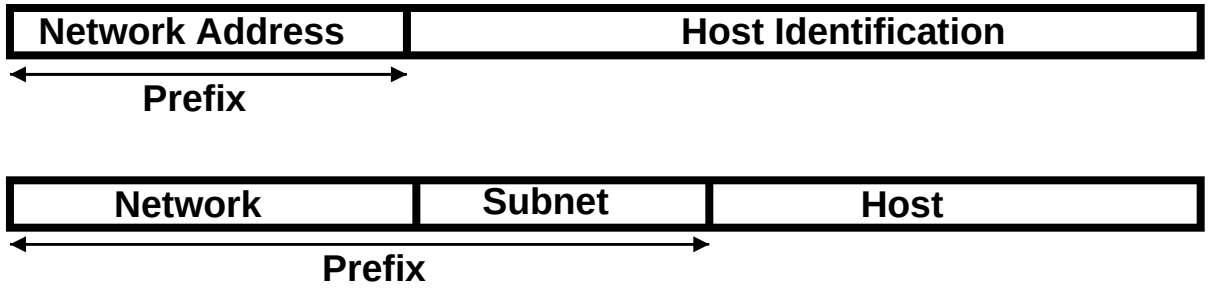
Hálózatok II
2006

3: Az IP Prefix Lookup Probléma II.

Internet Protocol IP

- Az adatok a küldőtől a cél állomásig IP-csomagokban kerülnek átvitelre
- A csomagok fejléce tartalmazza a cél IP-címét



- Minden csomópont (router) a cél címe alapján dönt, hogy melyik szomszédos csomópontnak kell továbbítania a csomagot
  - Az ehhez szükséges információt minden csomópontban egy routing-tábla tárolja

IP Prefix Lookup Probléma

- A címek *W* hosszúságú bináris sztringek.

Egy router routing-táblája *R*

- bejegyzéseket tartalmaz (*x,y*) formában
  - *x*: legfeljebb *W* hosszú bináris sztring, melynek a neve prefix. *x* lehet az üres sztring is, amit ε-nal jelölünk,
  - *y*: egy a router-ből kivezető link.
- Minden *x* bináris sztringhez *R* legfeljebb egy (*x,y*) bejegyzést tartalmaz.
- A bejagyzések száma a routing-táblában *N.*

Feladat:

- A routerhez érkező csomaghoz, melynek cél címe *k*,
- találjuk meg az (*x,y*) bejegyzést *R*-ben a leghosszabb egyező prefixszel (BMP).

Prefix expanzió [Srinivasan, Varghese 99]

- Az IP Prefix Lookup bináris kereséssel a prefixhossz szerint $O(\log r)$ időt igényel, ahol r a nemüres hosszosztályok száma.
- A routing-táblákban IPv4 esetén
  - Az osztályok L_1 és L_7 között legtöbbször üresek, így legtöbbször $r \leq 25$;
  - Gyakran a L_{16}, L_{24} osztályok tartalmazzák messze a legtöbb bejegyzést.

- Cél: A routing-táblát úgy módosítani, hogy a hosszosztályok száma csökkenjen.
- Alapötlet: egy $i < W$ hosszú x prefixet kicsrélhetünk két (i+1) hosszú prefixre x0-ra és x1-re anélkül, hogy a routing-tábla viselkedését megváltoztatnánk: Minden célcím, amelyben x prefix, vagy x0-lal vagy x1-gyel kezdődik.

Prefix expanzió

- Azt mondjuk, hogy két routing-tábla *R* és *R´* ekvivalens, ha minden *k* célcímre teljesül, hogy mindazon csomagok, melyekben a cél címe *k*, *R* és *R´* által ugyanazon a linkeken továbbítódnak.
- Az *x* prefix helyettesítését *x*0 és *x*1 által az *x* prefix expanziójának nevezzük.
- Az *x* prefix expanziója a routing-bejegyzésekre nézve azt jelenti, hogy (*x,y*)-t helyettesítjük (*x*0,*y*)-nal és (*x*1,*y*)-nal. Pontosabban:
  - Töröljük (*x,y*)-t *R*-ből;
  - Megvizsgáljuk, hogy egy (*x*0,*y´*) bejegyzés már benne van-e *R*-ben. Ha még nincs, befűzzük (*x*0,*y*)-t *R*-be.
  - Megvizsgáljuk, hogy egy (*x*1,*y´´*) bejegyzés már benne van-e *R*-ben. Ha még nincs, befűzzük (*x*1,*y*)-t *R*-be.
- A prefix expanzió után a routing-tábla ekvivalens marad az eredetivel.

Prefix expanzió

- Egy *i* hosszú *x* prefix *j*-szeri expanziója után legfeljebb 2^j új prefix áll elő *R*-ben, melyek hossza *i*+*j*.

- Ha *R*-t prefix expanziók útján úgy módosítjuk, hogy csak *s* különböző prefixhossz maradjon és az új tábla az eredetivel ekvivalens marad, akkor
  - először rögzíthetjük az *s* hosszt $l_1 < l_2 < \ldots < l_s$, amely osztályok majd a nem üres osztályok lesznek. Az l_s hossz legalább olyan nagy, mint a leghosszabb prefix hossza az eredeti routing-táblában.
  - *R* bejegyzéseit hossz szerint növekvő sorrendben dolgozzuk fel. Minden nemüres L_i hosszosztálynál a következő eseteket különböztetjük meg:
    - Ha $i \in \{l_1, l_2, \ldots, l_s\}$, akkor folytatjuk a következő hosszosztállyal.
    - Különben L_i minden *x* prefixéhez expanziót hajtunk végre. Ha *x*0 ill. *x*1 még nem volt benne L_{i+1}-ben, akkor befűzzük L_{i+1}-be.

Prefix expanzió

Példa:

- *R* a prefix expanzió előtt: 7 nem üres hosszosztály összesen 8 bejegyzés:
  - $L_1 = \{(0,y_1), (1,y_2)\}$
  - $L_2 = \{(10,y_3)\}$
  - $L_3 = \{(111,y_4)\}$
  - $L_4 = \{(1000,y_5)\}$
  - $L_5 = \{(11001),y_6\}$
  - $L_6 = \{(100000),y_7\}$
  - $L_7 = \{(1000000),y_8\}$

- *R* a prefix expanzió után, amelyben csak l_1=2, l_2=5, l_3=7 hossz fordul elő, összesen 13 bejegyzés:
  - $L_2 = \{(00,y_1), (01,y_1), (10,y_3), (11,y_2)\}$
  - $L_5 = \{(11100,y_4), (11101,y_4), (11110,y_4), (11111,y_4),$ $(10000,y_5), (10001,y_5), (11001,y_6)\}$
  - $L_7 = \{(1000000,y_8), (1000001,y_7)\}$

A hosszosztályok választása – Dinamikus programozás

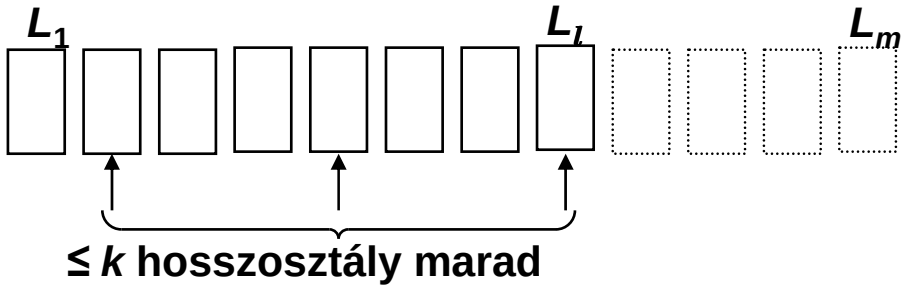
- Tehát prefix expanzióval konstruálható egy ekvivalens routing-tábla, ami
  - kevesebb hosszosztályt tartalmaz. Ebből rövidebb keresési idő adódik (pl. a bináris kereséssel a prefixhossz szerint);
  - rendszerint több bejegyzést tartalmaz.

- Hogyan lehet a l_1, l_2 ,…, l_s hosszosztályokat kedvezően megválasztani, ha *s* előre adott? Hogyan lehet a bejegyzések számát minimalizálni?

- Egy optimális megoldást dinamikus programozás segítségével számíthatunk ki. (az optimális megoldást a részfeladatok előzetesen kiszámított optimális megoldásaiból állítjuk össze.)

A hosszosztályok választása – Dinamikus programozás

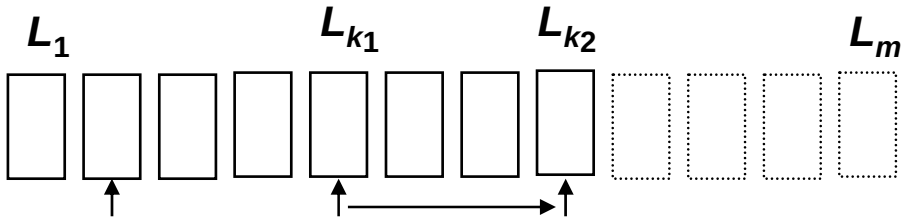
- Legyen m a maximális prefixhossz az adott R routing-táblában.
- Jelölje $M[l,k]$, $l \in \{0,1,\ldots,m\}$ -re és $k \in \{1,2,\ldots,s\}$ -re, a prefixek minimális számát, amit úgy kaphatunk, hogy az eredeti hosszosztályokat $L_1,\ldots,L_l$ ($l = 0$ esetén ez az üres halmaz) prefix expanzióval úgy változtatjuk meg,
  - hogy legfeljebb k nem üres hosszosztály marad és
  - L_l a hosszosztály a maximális hosszal.



- $M[m,s]$ értéke ekkor megadja a minimális számú prefixet, amit akkor kapunk, ha egy routing-táblát s nem üres hosszosztállyal optimális prefix expanzióval konstruálunk.

A hosszosztályok választása – Dinamikus programozás

- Legyen $E[k_1,k_2]$, $1 \le k_1 < k_2 \le m$ az a segédváltozó, ami megadja, hány prefix áll elő a L_{k_2} hosszosztályban, ha minden prefixet a $L_{k_1},L_{k_1+1},\ldots,L_{k_2-1}$ hosszosztályokból prefix expanzióval k_2 hosszúságúra bővítünk.
  A példánkban pl. $E[3,5] = 7$.
  $E[k_1,k_2]$ minden (k_1,k_2) párra hatákonyan kiszámítható.



- Ekkor a következő érvényes
  - $M[l,1] = E[1,l]$ $\quad \forall\ l \ge 1$ (1)
  - $M[0,k] = 0$ $\quad \forall\ k \ge 1$ (2)
  - $M[l,k] = \min_{0 \le j < l}\{ M[j,k-1] + E[j+1,l] \}$ $\quad \forall\ l > 0,\ k > 1$ (3)

A hosszosztályok választása – Dinamikus programozás

- (1) ($M[l,1] = E[1,l]$, $\forall\ l \geq 1$) érvényes, mert $M[l,1]$ és $E[1,l]$ definíciója azonos.
- (2) ($M[0,k] = 0$, $\forall\ k \geq 1$) érvényes, mert hosszosztályok egy üres halmazából prefix expanzió útján sem keletkezik új prefix.
- (3)-ban ($M[l,k] = \min_{0 \leq j < l} \{ M[j,k-1] + E[j+1, l] \}$, $\forall\ l > 0, k > 1$) j a második legnagyobb hossz l után, amelyre egy nem üres hosszosztályt választunk.
  - Minden rögzített j-re egy optimális prefix expanziót a $1,2,...,l$ hosszosztályokból k nem üres hosszosztállyal úgy kapunk, hogy vesszünk egy optimális prefix-expanziót a $1,2,\ldots,j$ hosszosztályokból k-1 nem üres osztállyal és a j+1,…,l osztályok egy prefix-expanzióját L_l hosszosztályra.
  - A minimum minden j fölött, $0 \leq j < l$, megadja az optimális prefix-expanziót a $1,2,...,l$ hosszosztályokhoz k nem üres osztállyal.

A hosszosztályok választása – Dinamikus programozás

- Legyen $P[l,k]$ az a j érték, melyre $M[l,k] = \min_{0 \le j < l}\{ M[j,k-1] + E[j+1,l] \}$ a minimumot adja. A számítás végén

  m, $P[m,s]$, $P[P[m,s],s-1]$, …

  megadják a prefixek hosszait az s hosszosztályban.

Algoritmus Optimális_Prefix_Expanzió

Input: $E[k_1,k_2]$, $\forall\ 1 \le k_1 < k_2 \le m$; és a hosszosztályok száma s

Output: $M[l,k]$ és $P[l,k]$, $\forall\ 0 \le l \le m$, $1 \le k \le s$

```
1.  for l = 0 to m do
2.      for k = 1 to s do
3.          if l = 0 then M[l,k] := 0;  P[l,k] := 0;
4.          else if k = 1 then M[l,k] := E[1,l];  P[l,k] := 0;
5.          else
6.              M[l,k] := min_{0≤j<l}{ M[j,k-1] +E[j+1,l] };
7.              P[l,k] := az a j, amelyre az előző sor a minimumot adta;
8.          fi;
9.      od;
10. od;
```

A hosszosztályok választása – Dinamikus programozás

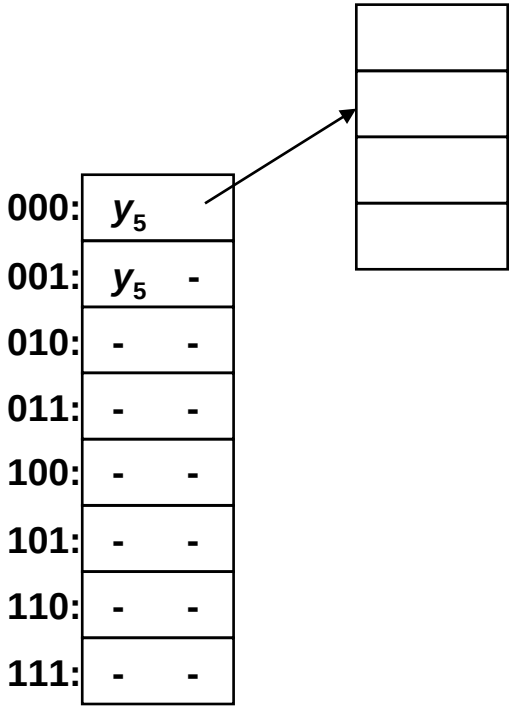
Tétel 1: Az Optimális_Prefix_Expanzió algoritmus kiszámítja $M[m,s]$-ben egy adott s-re a prefixek minimális számát, amit akkor kapunk, ha egy routing-táblát s nem üres hosszosztállyal optimális prefix-expanzióval konstruálunk. Az algoritmus futási ideje $O(sW^2)$. □

A hosszosztályok választása – Dinamikus programozás

- Dinamikus programozással megoldhatjuk a következő problémákat optimálisan (vagy majdnem optimálisan):
  - Tekintsünk egy konkrét adatstruktúrát az IP Prefix Lookup problémához (pl. Bináris keresés prefixhossz szerint). Válasszuk a prefixhosszakat a prefix-expanzióhoz *s* nemüres hosszosztályra úgy, hogy az adatstruktúra tárigénye minimális legyen. (bináris keresésnél prefixhossz szerint a tárigényt a prefixek száma plussz a jelzések száma határozza meg.)
  - Tekintsünk egy konkrét adatstruktúrát az IP Prefix Lookup problémához. Legyen adott az adatstruktúrának megengedett tártelület (pl. az rendelkezésre álló second-level-cache mérete által). Válasszuk a prefixhosszakat a prefix-expanzióban úgy, hogy a megengedett tárterületet ne lépjük túl és a worst-case BMP keresési idő minimális legyen.

Multibit-Trie és prefix-expanzió

- A BMP keresése Trie adatstruktúrával $O(W)$ időt igényel (worst-case).
- Egy lehetőség a keresési idő megjavítására: Minden Trie-csomópontban a célcímnek egyszerre több bitetjét kezelni.
  - Ha pl. egy Trie-csomópontban 3 bitet egyszerre kezelünk, akkor a Trie-csomópontnak tartalmazni kell egy 2^3 elemű arrayt, melynek elemei egy masik Trie-csomópontra mutatnak vagy egy linket tárolnak.



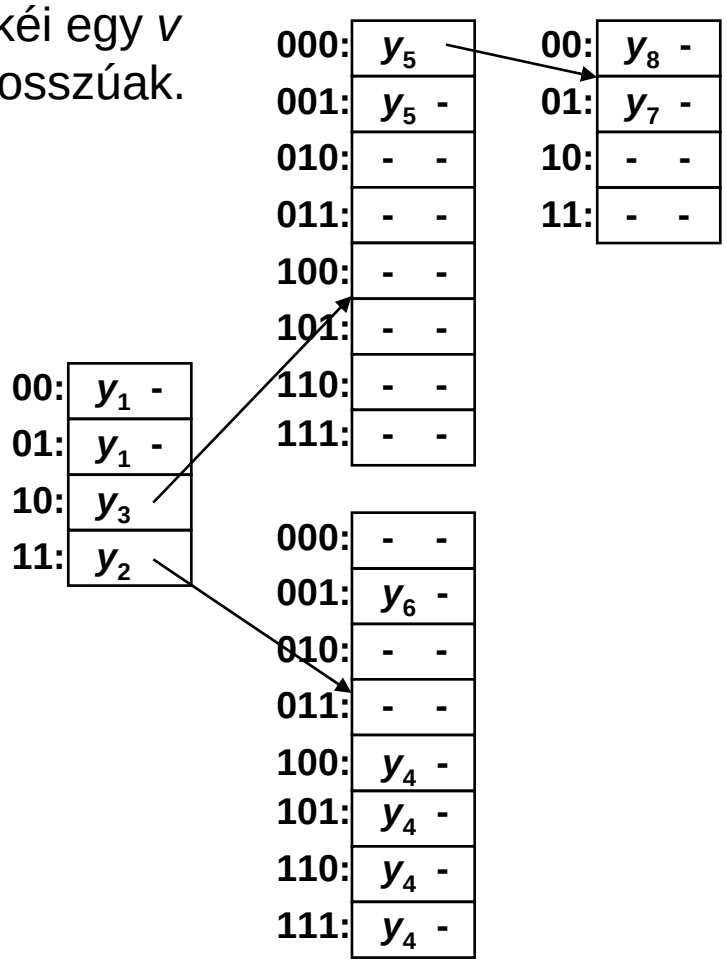
Multibit-Trie és prefix-expanzió

- Egy Multibit Trie egy olyan Trie, amiben az élek cimkéi egy *v* csomópontból a gyermekeihez mind egyformán k_v hosszúak.
  - A cimkék tárolása helyett egy 2^{k_v} elemű arrayt használunk.
  - Az array *i*. elemében, $0 \le i < 2^{k_v}$, az áll, hogy
    - létezik-e egy él a Trie-ban *i* cimkével, és ha igen, hová vezet;
    - ahhoz a prefixhez, ami a gyökérből a *v*-hez vezető úton lévő élek cimkéinek és az *i* sztring konkatenációjaként áll elő, tárolunk-e egy linket.
- Példa:

  $L_2 = \{ (00,y_1), (01,y_1), (10,y_3), (11,y_2) \}$

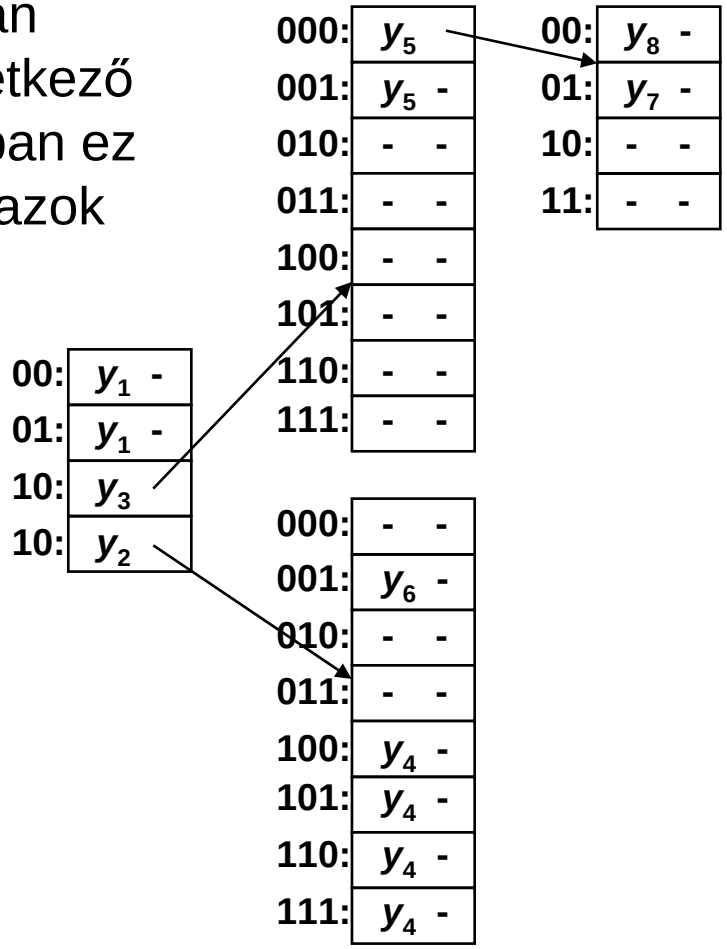
  $L_5 = \{ (11100,y_4), (11101,y_4), (11110,y_4), (11111,y_4),$
  $(10000,y_5), (10001,y_5), (11001,y_6) \}$

  $L_7 = \{ (1000000,y_8), (1000001,y_7) \}$



Multibit-Trie és prefix-expanzió

- A bitek száma b_v, amit egy v Trie-csomópontban kezelünk, egy nemüres hosszosztály és a következő nemüres osztály hosszkülönbsége. A példánkban ez a gyökérben 2, annak gyermekeinél 5-2=3, és azok gyermekeinél 7-5=2.
- Egy k célcím keresése:
  A w gyökérben tekintjük k első b_w bitjét $k[1..b_w]$-t. A keresést annál a gyermeknél folytatjuk, amelyre w-ben az array $k[1..b_w]$-edik eleme mutat, ha ilyen mutató létezik. Amíg ilyen mutató létezik, követjük a megfelelő utat. Az utolsó link y, amit ezen az úton találtunk, az tartozik a BMP-hez.



Multibit-Trie és prefix-expanzió

- A worst-case keresési idő egy *T* Multibit-Trie-ban lineáris *T* mélységéhez, azaz $O(s)$, ahol *s* a nem üres hosszosztályok száma.

- Egy bejegyzés befűzése vagy törlése hatákonyan elvégezhető.

A tárigény minimalizálása a Multibit-Trie-ban

- A Trie minden *v* csomópontjának tárigénye 2^{bv} (az array elemeinek száma *v*-ben).
- A *T* Trie teljes tárigénye $\Sigma_{v \in T} 2^{bv}$.

Optimalizálási feladat: Hogyan kell egy megadott s esetén az s hosszosztályt kiválasztani, hogy a Multibit-Trie tárigénye minimális legyen?

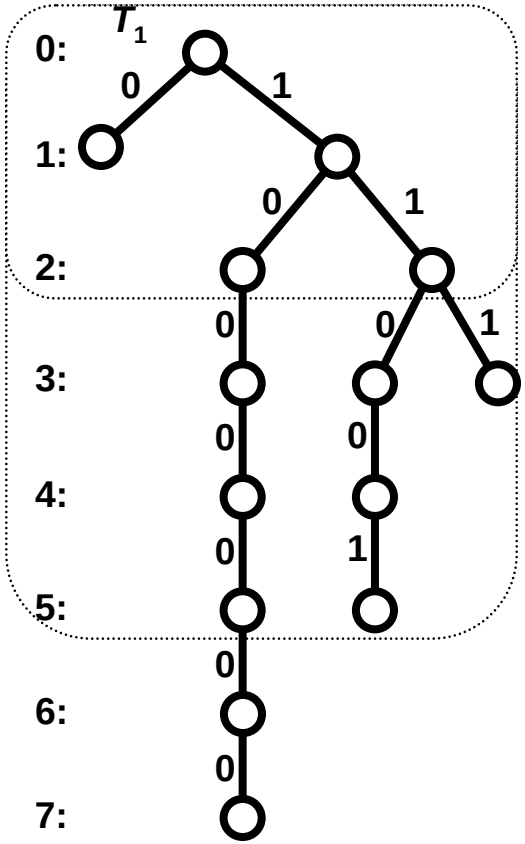
Feltétel: A hosszosztályok és a Trie rétegei között egy-az-egyhez megfelelés van. (Multibit-Trie esetén enélkül a feltétel nélkül is optimalizálhatunk. [Srinivasan, Varghese 99])

- A Trie egy rétege azon Trie-csomópontok halmazát jelenti, melyek a gyökértől ugyanolyan távolságra vannak. Az 1. réteg a gyökérből áll. A 2. réteg a gyökér gyermekeiből, és így tovább…
- Az *i.* réteg megfelel az L_i hosszosztálynak.
- Következésképpen egy réteg minden csomópontjánál ugyanannyi bitet tekintünk.
- Ezért egy réteg minden csomópontja ugyanakkora tárigényű.

A tárigény minimalizálása a Multibit-Trie-ban

- Jelölje $A[j,l]$, $0 \le j < l \le m$, a nemüres L_l hosszosztály minimális tárigényét, ha a tőle rövidebb leghosszabb nemüres hosszosztály L_j, $j < l$.

- $A[j,l]$, $0 \le j < l \le m$ kiszámítása:
  - Felépítünk egy 1-Bit-Trie-t T_1-t az eredeti prefixekhez úttömörítés nélkül.
  - Legyen $n(i)$ azon csomópontok száma T_1-ben, amelyek távolsága a gyökértől i és legalább egy gyermekük van.
  - Teljesül: $A[j,l] = 2^{l-j}\, n(j)$.
    A Multibit-Trie L_j -nek megfelelő rétegének minden csomópontjában az array minden eleme, amely T_1-ben egy olyan csomópontnak felel meg, aminek legalább egy gyermeke van, L_l-nek megfelelő réteg csomópontjára mutat. Tehát az L_l -nek megfelelő rétegnek pontosan $n(j)$ csomópontot kell tartalmaznia, amelyek mindegyike 2^{l-j} elemet tartalmaz.
    Minden $0 \le j < l \le m$ –hez $A[j,l]$ kiszámítható T_1 segítségével $O(m^2) = O(W^2)$ idő alatt.



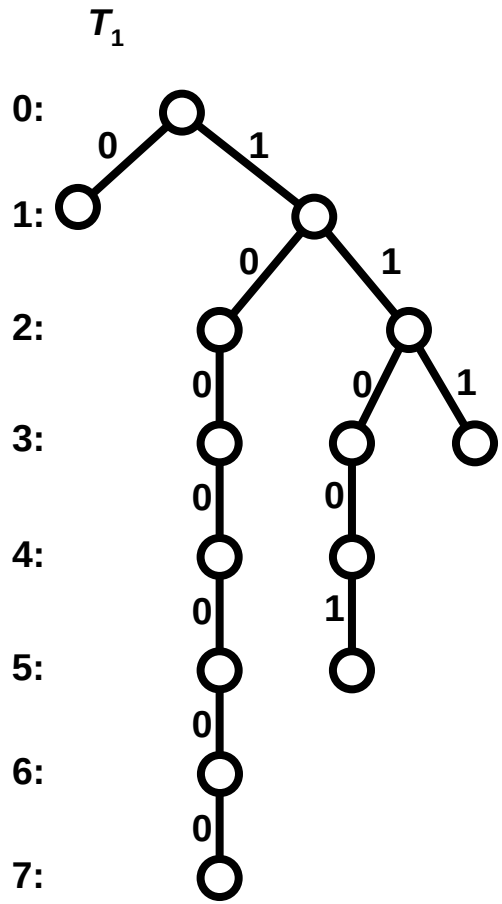
A tárigény minimalizálása a Multibit-Trie-ban

Példa:

- $L_1 = \{(0,y_1), (1,y_2)\}$
- $L_2 = \{(10,y_3)\}$
- $L_3 = \{(111,y_4)\}$
- $L_4 = \{(1000,y_5)\}$
- $L_5 = \{(11001),y_6\}$
- $L_6 = \{(100000),y_7\}$
- $L_7 = \{(1000000),y_8\}$

- $A[0,2] = 2^{2-0}\, n(0) = 4 \cdot 1 = 4,$
- $A[2,5] = 2^{5-2}\, n(2) = 8 \cdot 2 = 16,$
- $A[5,7] = 2^{7-5}\, n(5) = 4 \cdot 1 = 4.$

- Ez megadja egy 3 szintű Trie társzükségletét L_2, L_5 és L_7. hosszosztályokkal.



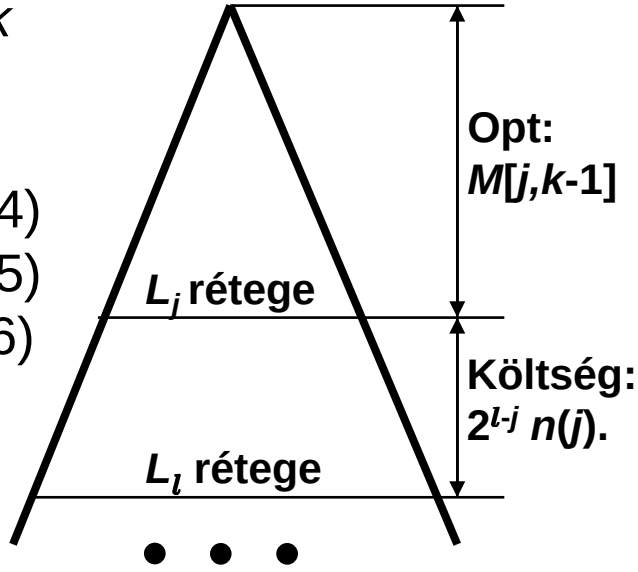
A tárigény minimalizálása a Multibit-Trie-ban

- Tekintsük azt a Multibit-Triet, ami akkor keletkezik, ha az eredeti $L_1,\ldots,L_l$ hosszosztályokat úgy alakítjuk át prefix expanzióval, hogy
  - legfeljebb k nem üres hosszosztály marad és
  - L_l a legnagyobb hosszt tartalmazó hosszosztály.
- Legyen $M[l,k]$ a minimális tárigénye a Trie rétegeinek a gyökértől addig a rétegig, ami L_l –nek felel meg, ha k hosszosztályt engedünk meg. Ekkor érvényes:

$$M[l,1] = A[0,l] \qquad \forall\, l \geq 1 \qquad (4)$$

$$M[0,k] = 0 \qquad \forall\, k \geq 1 \qquad (5)$$

$$M[l,k] = \min_{0 \leq j < l}\{ M[j,k\text{-}1] + A[j, l] \} \quad \text{ha } l > 0,\ k > 1 \qquad (6)$$



A tárigény minimalizálása a Multibit-Trie-ban

(4) ($M[l,1] = A[0,l]$, $\forall\ l \geq 1$) igaz, mert a gyökér társzükséglete pontosan $A[0,l] = 2^l n(0) = 2^l$, ha L_l az a nemüres hosszosztály, ami a legrövidebb sztringeket tartalmazza.

(5) ($M[0,k] = 0$ für $\forall\ k \geq 1$) csak annyit mond, hogy egy üres Multibit-Trie nem igényel tárt.

(6) ($M[l,k] = \min_{0 \leq j < l}\{ M[j,k\text{-}1] + A[j,l] \}$ für $l > 0$, $k > 1$) igaz, mert az L_l-t megelőző leghosszabb hosszosztályra, L_j-re minden lehetőséget megvizsgálunk és ekkor a tárigény a következő két érték összege:

- Az optimális tárigény a Multibit-Trie rétegekhez, amelyek a hosszosztályoknak L_j-ig felelnek meg és legfeljebb k-1 nem üres hosszosztályt tartalmaznak (ezt $M[j,k\text{-}1]$ írja le) és
- Az L_l hosszosztály rétegének a tárigénye (ezt $A[j,l]$ írja le).

A tárigény minimalizálása a Multibit-Trie-ban

- Dinamikus programozással hatákonyan ki tudjuk számítani $M[l,k]$ minden értékét.
- $M[m,s]$ megadja a minimális tárigényt a Multibit-Trie-hoz, ami s réteget tartalmaz.
- Legyen $P[l,k]$ az a j érték, amire $M[l,k] = \min_{0 \le j < l}\{ M[j,k-1] + A[j,l] \}$ a minimumot veszi fel. A számítás végén

  m, $P[m,s]$, $P[P[m,s],s-1]$, …

  adja meg a prefix-hosszakat az s hosszosztályban.

A tárigény minimalizálása a Multibit-Trie-ban

Algoritmus Optimalis_Multibit_Trie

Input: $A[j,l]$, $\forall\ 0 \le j < l \le m$; A hosszosztályok száma s

Output: $M[l,k]$ és $P[l,k]$, $\forall\ 0 \le l \le m$, $1 \le k \le s$

1. for $l = 0$ to m do
2. for $k = 1$ to s do
3. if $l = 0$ then $M[l,k] := 0$; $P[l,k] := 0$;
4. else if $k = 1$ then $M[l,k] := A[0,l]$; $P[l,k] := 0$;
5. else
6. $M[l,k] := \min_{0 \le j < l}\{ M[j,k-1] + A[j,l] \}$;
7. $P[l,k]$:= az a j, amire az előző sor a minimumot adja;
8. fi;
9. od;
10. od;

Az optimális Multibit-Trie kiszámításának időanalízise

- Az 1-Bit-Trie felépítése és az $n(i)$ und $A[j,l]$ értékek kiszámítása $O(N \cdot W + W^2)$ időt igényel.
- $M[l,k]$ értékeinek kiszámítása az Optimalis-Multibit-Trie algoritmussal $O(s \cdot W^2)$ időt igényel.
- Összesen: $O(N \cdot W + s \cdot W^2)$ idő.

Tétel 2: Legyenek egy routing-tábla bejegyzései és a kívánt nem üres hosszosztályok száma s adva. Az s nemüres hosszosztály kiválasztása, amely a routing-táblához egy s rétegű Multibit-Trie tárigényét minimalizálja, $O(N \cdot W + s \cdot W^2)$ idő alatt kiszámítható. □

Irodalom

- V. Srinivasan, G. Varghese: **Fast Address Lookups using Controlled Prefix Expansion**. *ACM Transactions on Computer Systems*, Vol. 17(1), 1-40, 1999.