Hálózattervezés Alapjai
tavasz 2006

2: Multicasting – Steiner Fák

Multicasting

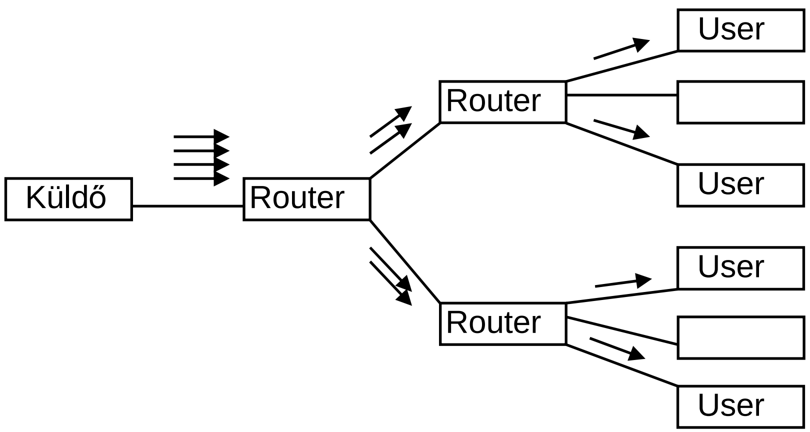
- Az adatok egy küldőtől egyidejűleg több fogadóhoz kerülnek átvitelre

- Felhasználási területek:
  - Real time Streaming, Video-On-Demand
  - Telefon-, Videokonferencia (all-to-all multicast)
  - …

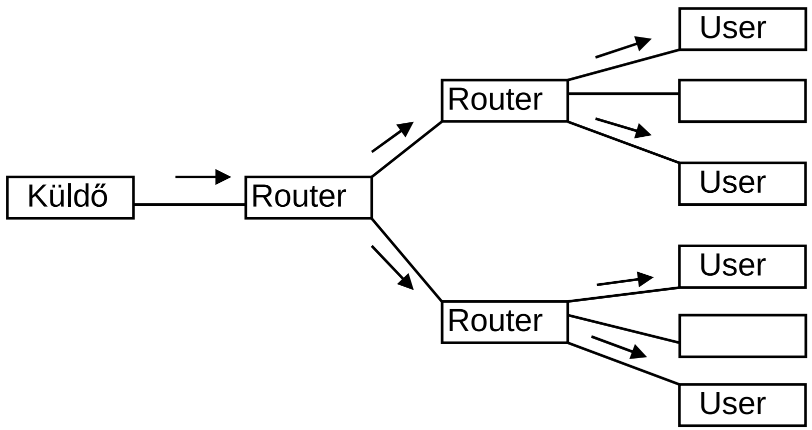
- Multicasting támogatása:
  - Ethernet (Pakettyp 0800)
  - IP (A D osztály címei Multicast céljára vannak lefoglalva)
    - Egy multicast-csoport (group) minden tagja ugyanazt a D osztálybeli címet használja

Multicasting

- Naív megoldás: Multicast-via-Unicast:
  - A küldő egy külön másolatot küld az adatokról minden foadónak.
  - Nagyon inefficiens: A küldött csomagok számasokkal nagyobb, mint ami szükséges lenne (különösen rossz all-to-all multicast esetén).
- Egy multicast-fa felepítése segítségével:
  - Minden linken csak egyszer továbbítódik egy csomag.
  - A routerek döntik el, hogy egy csomagot több linken is továbbítanak-e.



Naív megoldás



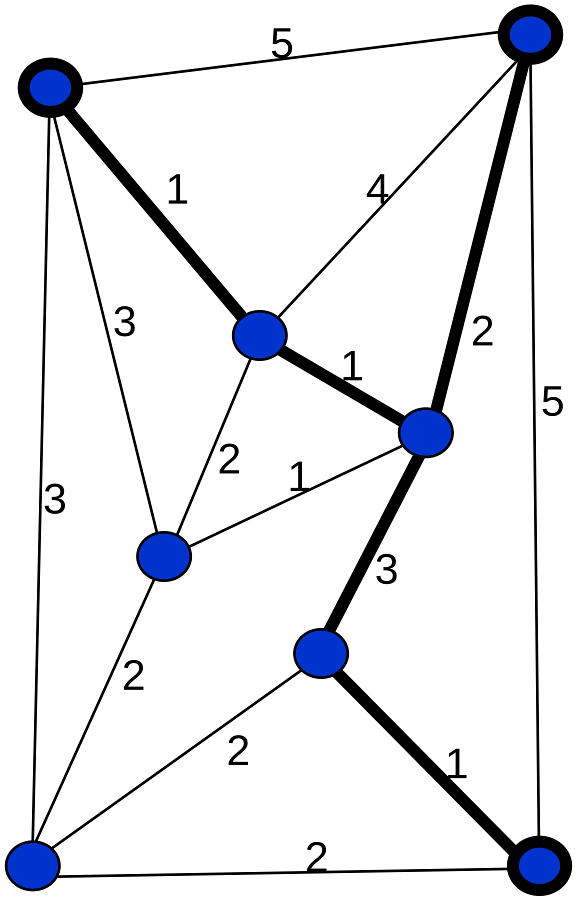
Multicast-fa

Multicasting

- Hogy néz ki egy optimális multicast-fa?
  - A hálózat terhelése minimális legyen.
  - Feltesszük: minden egyes linken az átvitel költsége független az iránytól.
- Steiner Probléma:
  - Adott: Egy összefüggő irányítatlan gráf $G=(V,E)$, élsúlyok c: $E\to\mathbb{R}^+$, terminal-csomópontok halmaza $N\subseteq V$.

    (N: a multicast-csoport tagjai: a küldő és minden fogadó;

    $c(e)$: a költség, ami akkor lép fel, ha az e linken adatot viszünk át. P.l.: 1/sávszélesség)
  - $T=(V',E')$ egy Steiner-fa G-ben, ha T egy részfája G-nek és $N\subseteq V'$. A $V'\backslash N$ beli csomópontokat Steiner-csomópontoknak nevezzük.
  - Amit keresünk: Egy T Steiner-fa G-ben, melynek a súlya $c(T):=\Sigma_{c\in E'}\, c(e)$ minimális.



Steiner-fák

- Speciális eset: *N*=*V*
  - Egy Steiner-fa feszítőfája *G*-nek.
  - Egy minimális Steiner-fa minimális feszítőfája *G*-nek.
  - Ekkor a Steiner probléma hatékonyan megoldható (Prim algoritmusa).
- Speciális eset: |N|=2
  - Egy Steiner-fa egy út a két terminál-csomópont között.
  - Egy minimális Steiner-fa egy kegrövidebb út.
  - Ekkor a Steiner probléma hatékonyan megoldható (Dijkstra algoritmusa).
- Általános esetben a Steiner probléma *NP*-nehéz.
  - Még akkor is, ha minden él súlya 1.
  - PTAS (polynomial time approximation scheme) sem létezik a Steiner problémához, ha $P \neq NP$.
    - Egy PTAS egy olyan algoritmus, ami minden konstans ε>0–hoz az optimális megoldás egy (1+ε)-approximatióját *n*-ben polinomiális idő alatt kiszámítja, azaz a kiszámított megoldás költsége az optimális megoldás költségének legfeljebb (1+ε)-szorosa.

Approximációs algoritmusok

- Legyen *P* egy optimalizálási probléma.
  Legyen *P*(*I*) a probléma optimális megoldása egy adott *I* instanciára (inputra).
  - A Steiner probléma esetén:
    - *I* = *G, c, N* [egy adott irányíttlan gráf, élsúlyok, terminálok]
    - *P*(*I*) = *c*(*T*) [a minimális Steiner fa súlya]

- A *P* probláma *g*(*n*) relatív approximációs rátával (röviden *g*(*n*) rátával) approximálható, ha létezik egy polinomiális idejű algoritmus *A*, úgy hogy minden *n* méretű *I* instanciára :

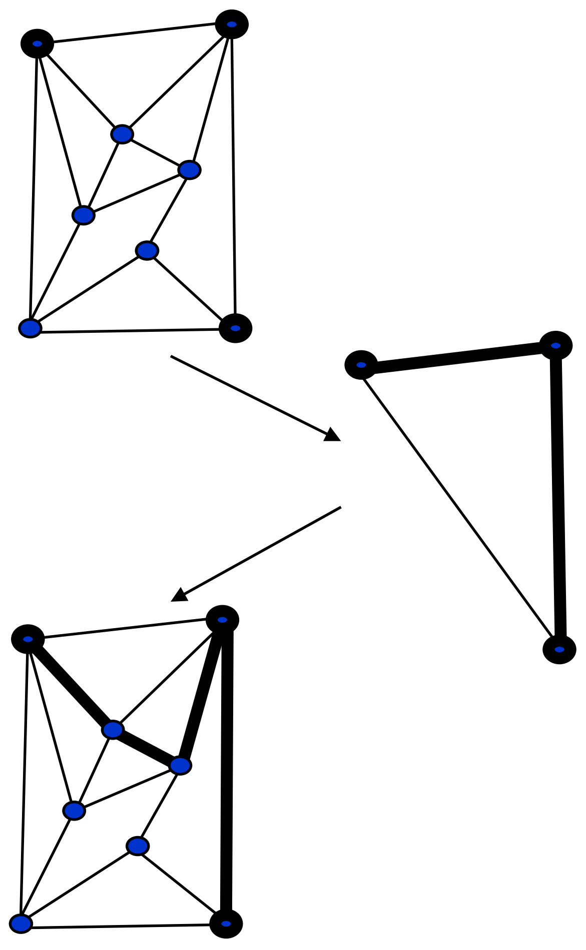
$$\max\left\{\frac{P(I)}{A(I)}, \frac{A(I)}{P(I)}\right\} \le g(n)$$

  ahol *A*(*I*) az *A* által kiszámított megoldás az *I* instanciára.
  Egy ilyen *A*-t egy *g*(*n*)-approximációs algoritmusnak nevezzünk a *P* problémához, a megoldást pedig *g*(*n*)-approximációnak.

Steiner-fák – Távolság-Heurisztika [Takahashi, Matsuyama 1980]

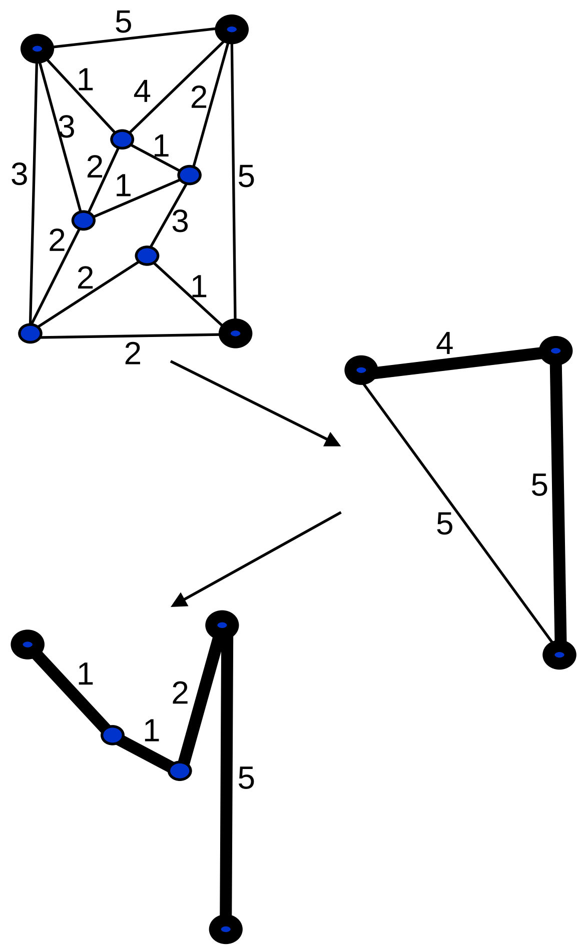
- Egy algoritmus a Steiner probléma 2-approximációjához

- Alapötlet:
  1. Visszavezetjük a problémát egy minimális feszítőfa M=(N,F) kiszámításának problémájára.
  2. Megmutatjuk, hogy a minimális feszítőfa M kötsége $c(M)$ legfeljebb 2-szer nagyobb, mint egy minimális Steiner-fa T költsége $c(T)$.
  3. A minimális feszítőfából M -ből konstruálunk egy Seiner-fát T'-t, úgy hogy $c(T') \leq c(M)$.



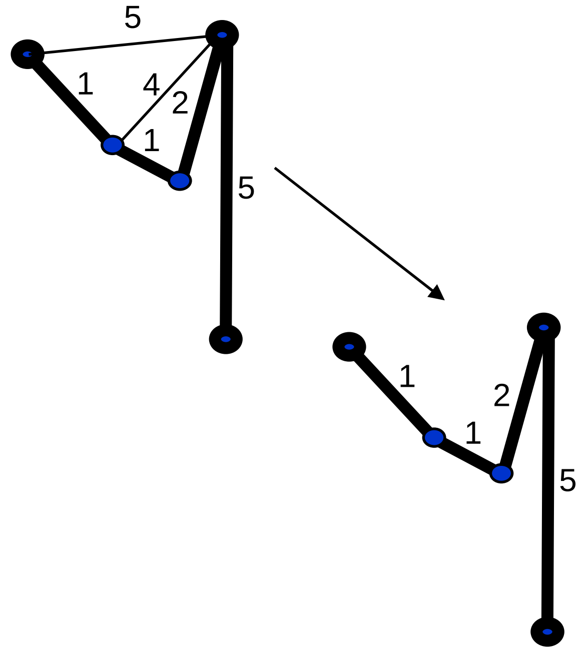
Steiner-fák – Távolság-Heurisztika

- 1. lépés: Kiszámítjuk a *G´*=(*N,F*) Távolság-gráfot *G*=(*V,E*)-hez:
  - Legyen minden *u,v*∈ *N* párhoz *d*(*u,v*) egy legrövidebb út hossza *u*-tól *v*-hez *G*-ben.
  - A távolság-gráf *G´*=(*N,F*) tartalmaz minden *u,v*∈ *N*, *u*≠*v*, párhoz egy *f*={*u,v*} élet, melynek súlya *c´*(*f*) := *d*(*u,v*).
- 2 lépés: Kiszámítunk egy *M* minimális feszítőfát *G´*-ben.
- 3 lépés: Kiszámítjuk *G* egy *H* részgráfját, amely *M* minden *f*={*u,v*} éléhez tartalmazza egy legrövidebb út csomópontjait és éleit *u*-tól *v*-ez *G*-ben.



Steiner-fák – Távolság-Heurisztika

- 4. lépés: Kiszámítjuk a *G* gráf *V*(*H*) által indukált részgráfját *H´*-t.
- 5. lépés: Kiszámítjuk *H´* egy minimális feszítőfáját *T´*-t
  - *T´* egy Steiner-fa *G*-ben.
  - Megjegyzés: Alternatív, ki lehetne egy minimális feszítőfát direkt *H*-hoz számítani ahhoz, hogy egy 2-approximációt kapjunk egy minimális. Azáltal, hogy *H´* -hoz számítunk ki egy minimális feszítőfát, bizonyos esetekben jobb eredményt lehet elérni.
- 6. lépés: Eltávolítjuk *T´*-ből azokat a Steiner-csomópontokat (*V*(*T´*)*N* azon csomópontjait), melyeknek a foka 1.



Steiner-fák – Távolság-Heurisztika

Futási idő:

- 1. lépés: $G´$ kiszámítása: $O(|N| (n \log n + m))$
- Minden $u \in N$ csomóponthoz számítsuk ki egy legrövidebb utak fáját Dijkstra algoritmusával
- 2. lépés: M kiszámítása: $O(|N|^2)$
  - $G´$-ben $|N|$ csomópont van és $O(|N|^2)$ él. Prim algoritmusával: $O(|N|^2)$ idő
- 3. lépés: H kiszámítása: $O(|N| n)$
  - Az M fa $|N|$-1 élének mindegyikét G-ben egy úttal helyettesítjük, amely utak mindegyikének hossza legfeljebb n-1
- 4. lépés: $H´$ kiszámítása: $O(m)$
  - G minden élénél teszteljük, hogy mindkét végpontja H-ban van-e
- 5. lépés: $T´$ kiszámítása: $O(n \log n + m)$
  - Prim algoritmusával
- 6. lépés: A Steiner-csomópontok eltávolítása, melyek foka 1: $O(n)$
- Összesen: $O(|N| (n \log n + m))$ idő

Steiner-fák – Távolság Heurisztika

Az approximációs ráta elemzése

- Jelölje *OPT* egy minimális Steiner-fa költségét.

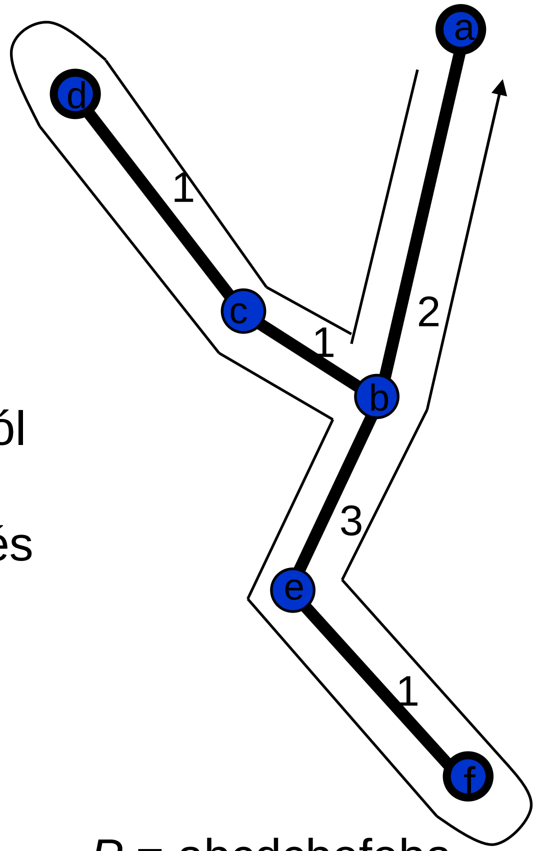
<u>Lemma 1</u>:

a) Legyen *W´* a távolság gráf *G´* egy *M* minimális feszítőfájának a súlya. Ekkor *W´* ≤ (2 – 2 / |*N*|)*OPT.*

b) *T´* súlya legfeljebb *W´*.

Biz. a):

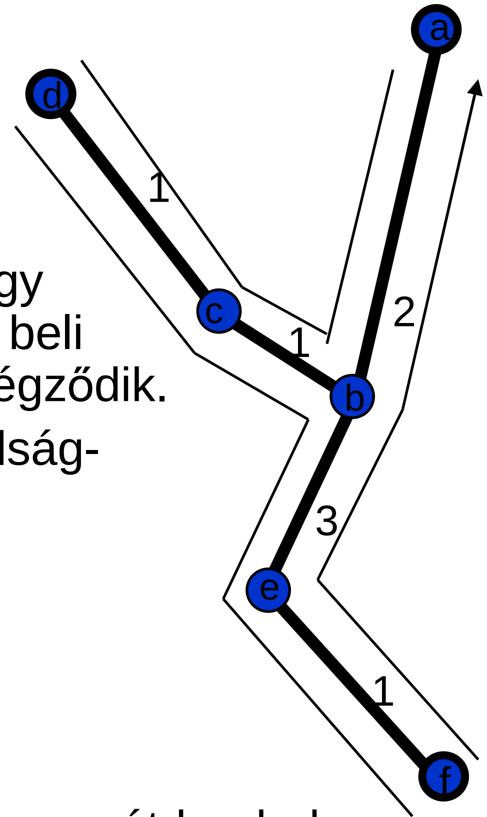
- Legyen *T* egy minimális Steiner-fa
- Legyen *P* egy út, amely egy tetszőleges *s* csomópontból indul és egyszer „körülfutja *T*-t“:
  - Kezdjük el *T* egy preorder bejárását s-ből indulva és adjuk hozzá P-hez az éleket abban a sorrendben, amelyben bejárjuk őket.
  - *T* minden éle kétszer fordul elő *P*-ben.
- Érvényes: $\Sigma_{e \in E(P)} c(e) = 2\ OPT$.



P = abcdcbefeba

Steiner-fák – Távolság-Heurisztika

- Vágjuk szét *P*-t azokon a helyeken, ahol egy *N* beli csomópont először fordul elő.
  - $|N|$ útdarabot kapunk.
- Távolítsuk el a legnagyobb súlyú útdarabot
  - A megmaradó $|N|$-1 útdarab súlya $\leq 2\,((|N|-1) / |N|)\, OPT = (2 - 2 / |N|)\, OPT.$
  - Minden útdarab egy *N* beli csomópontból indul és egy *N* beli csomópontban végződik, úgy hogy minden *N* beli csomópontban csak egy útdarab kezdődik és egy végződik.
- Tekintsük minden útdarabhoz a megfelelő élet a *G´* távolság-gráfban.
  - Legyen $P_{u,v}$ egy útdarab *u*-tól *v*-hez. Ekkor: $c'(\{u,v\}) \leq c(P_{u,v})$.
  - Ez az $|N|$-1 él egy feszítőfát képez *G´*-ben, melynek súlya $\leq (2 - 2 / |N|)\, OPT.$
- *G´* egy minimális feszítőfájának *M*-nek a súlya $W \leq (2 - 2 / |N|)\, OPT.$



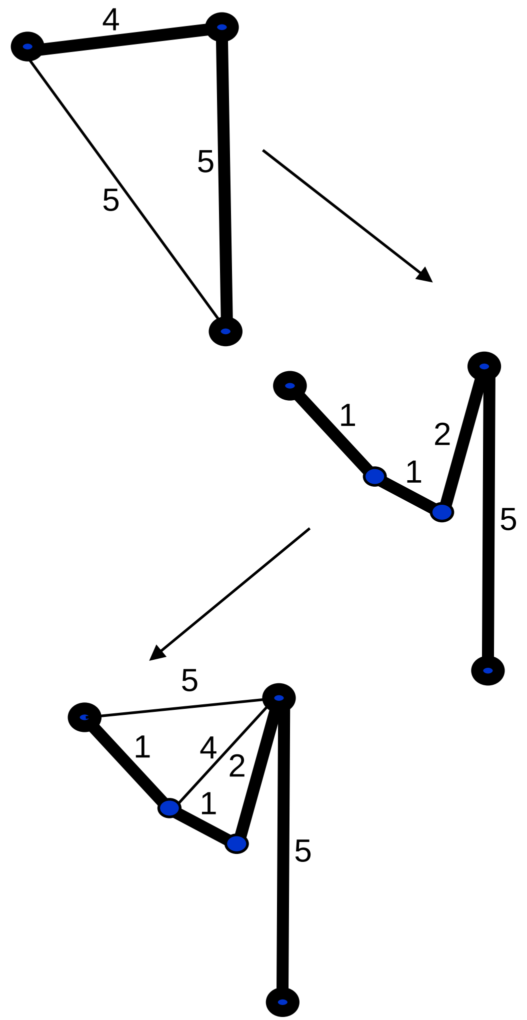
útdarabok:
abcd, dcbef, feba

Steiner-fák – Távolság-Heurisztika

Biz. b) (T' súlya $c(T') \leq W'$):

- A 3. lépésben az algoritmus helyettesíti M minden élét a végpontok közötti legrövidebb úttal G-ben.
- Ha alegrövidebb utak éldiszjunktak lennének, akkor H súlya $c(H)$ egyenlő lenne M súlyával $c'(M)=W'$-vel.
- Mivel a legrövidebb utak közös éleket is tartalmazhatnak, $c(H) \leq W'$.
- H egy minimális feszítőfájának T_H -nak a súlya $c(T_H)$ nem nagyobb mint $c(H) \leq W'$.
- Mivel $H \subseteq H'$, $c(T') \leq c(T_H) \leq W'$.
- Miután eltávolítottuk a Steiner-csomópontokat, melyek foka 1, a súly csak csökkenhet.

<u>Tétel1</u>: A bemutatott algoritmus $O(|N| (n \log n + m))$ idő alatt kiszámít egy Steiner-fát, melynek költsége legfeljebb $(2 – 2 / |N|)\ OPT < 2\ OPT$.



Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata [Mehlhorn 1988]

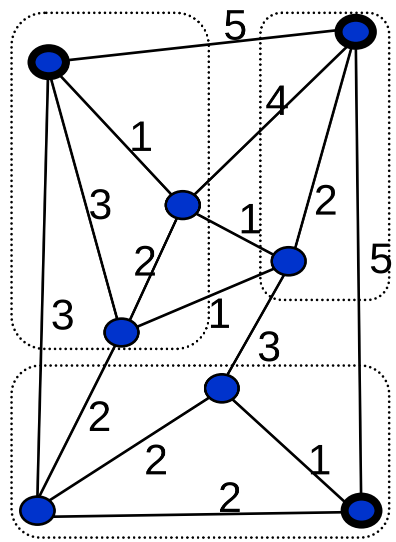
Alapötlet:

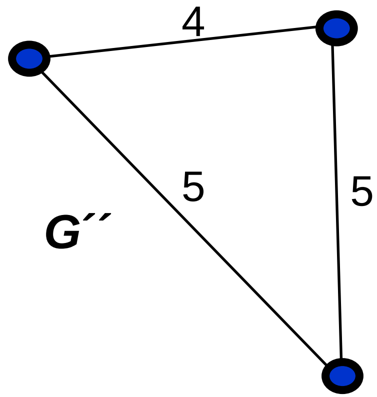
- Az 1. lépésben a G' távolság-gráf helyett egy G'' gráfot számítunk ki $c'':E(G'')\rightarrow R^+$ élsúlyokkal, úgy hogy
  - Minden minimális feszítőfa M'' a G'' gráfban a c'' élsúlyok szerint egyben egy minimális feszítőfa a G' gráfban c élsúlyok szerint, és $c''(M'') = c'(M'')$;
  - G'' kiszámítható $O(n \log n + m)$ időben.
- Kiszámítunk egy M'' minimális feszítőfát G'' -ben.
- Ezután végrehajtjuk az eredeti távolságheurisztika lépéseit M''-t használva.

Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

G'' következőképp definiált:

- Minden $z_i \in N$ csomóponthoz legyen
  $N(z_i) := \{z_i\} \cup \{\, v \in V \setminus N : d(v,z_i) = \min_{z' \in N} d(v,z')$ und
  $i = \min\{\, j : d(v,z_j) = \min_{z' \in N} d(v,z') \} \,\}$
  Vegyük észre: $N(z_i)$, $z_i \in N$, egy partíciót definiál V-ben.
- $E(G'') := \{\, \{z_i,z_j\} : z_i, z_j \in N,$
  $\exists\, \{u,v\} \in E(G)$ mit $u \in N(z_i)$, $v \in N(z_j) \}$
- $c''(z_i,z_j) := \min\{\, d(z_i,u) + c(\{u,v\}) + d(v,z_j) :$
  $\{u,v\} \in E(G),\ u \in N(z_i),\ v \in N(z_j) \,\}$





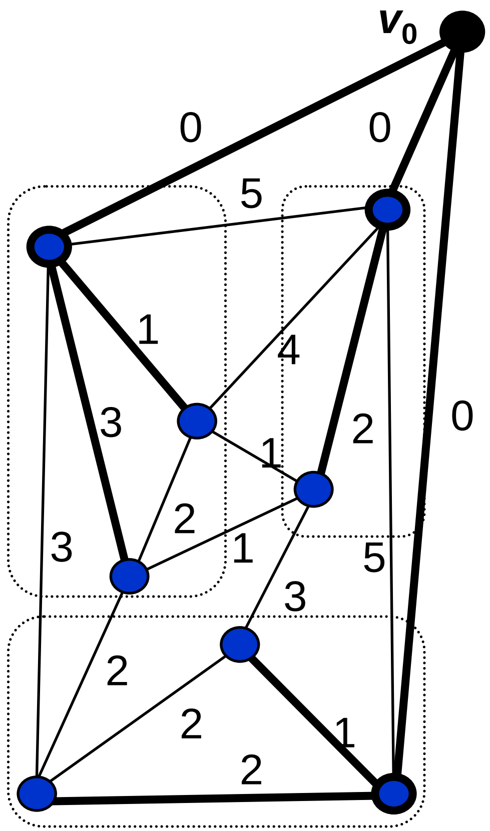
Figyeljük meg:

- G'' lehet G'-nek egy valódi részgráfja.
- Egy él súlya G''-ben lehet kisebb is mint G'-ben (nagyobb nem lehet).

Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

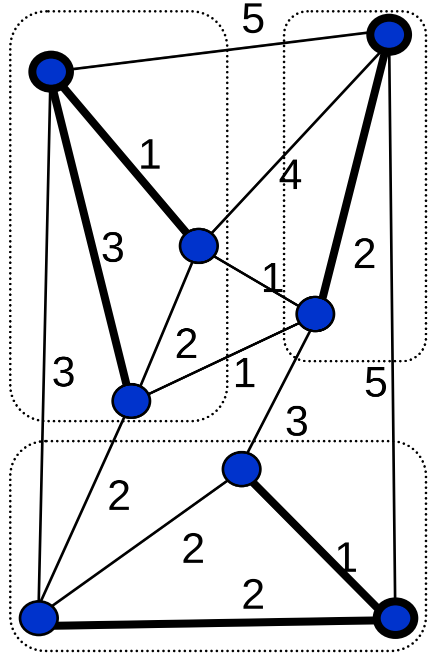
G´´ konstrukciója:

- Adjunk hozzá a G gráfhoz egy új $v_0$csomópontot és minden $z \in N$ -hez egy új $\{v_0,z\}$ élet $c(\{v_0,z\}) = 0$ élsúllyal.
- Feltétel: Az eredeti *G* gráf minden élének súlya >0.
- Számítsunk ki v_0 kezdőcsomóponttal egy legrövidebb utak fáját T_S -t Dijkstra algoritmusával.



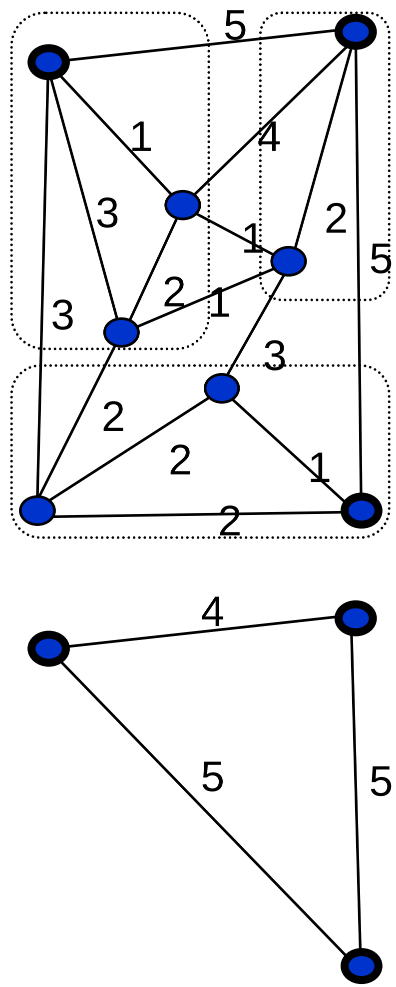
Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

- Töröljük v_0-t és minden hozzá incidens élet T_S-ből.
  - T_S részfákra esik szét.
  - Minden részfa pontosan egy terminalcsomópontot tartalmaz (ez a feltételből következik az eredeti gráf éleinek a súlyáról).
  - A $z \in N$ terminál részfája pontosan $N(z)$-t tartalmazza.
  - Minden $v \in V$ -re a kiszámitott legrövidebb út költsége $dist(v)$ pontosan a $d(v,z)$ érték, ahol $z \in N$, $v \in N(z)$.



Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

- $c'': E(G'') \rightarrow \mathbb{R}^+$ kiszámítása
  - Teszteljük G minden $\{u,v\}$ élére, hogy u és v különböző $N(z_i)$ és $N(z_j)$ halmazban van-e.
  - Ha igen, és $\{u,v\}$ az első él $N(z_i)$ és $N(z_j)$ között, vagy $d(u,z_i) + c(\{u,v\}) + d(v,z_j)$ kisebb mint az aktuális költség $c''(\{z_i,z_j\})$, akkor legyen $c''(\{z_i,z_j\}) := d(u,z_i) + c(\{u,v\}) + d(v,z_j)$.



Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

Lemma 2: Legyen M'' a G'' gráf egy minimális feszítőfája c'' élsúlyok szerint. Akkor M'' a G' gráfnak egy minimális feszítőfája c' élsúlyok szerint.

Biz.: Megmutatjuk:

(1) G'-nek van egy olyan M^* minimális feszítőfája, hogy M^* minden $\{z_i,z_j\}$ éle G''-ben is benne van és $c''(\{z_i,z_j\})=c'(\{z_i,z_j\})$.
Ha (1) teljesül, akkor

- M^* minimális feszítőfája G''-nek is és
- G'' minden más M'' minimális feszítőfájára teljesül, hogy $c''(M'') = c''(M^*) = c'(M^*)$, ezért M'' egy minimális feszítőfája G'-nek c' élsúlyok szerint.

Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

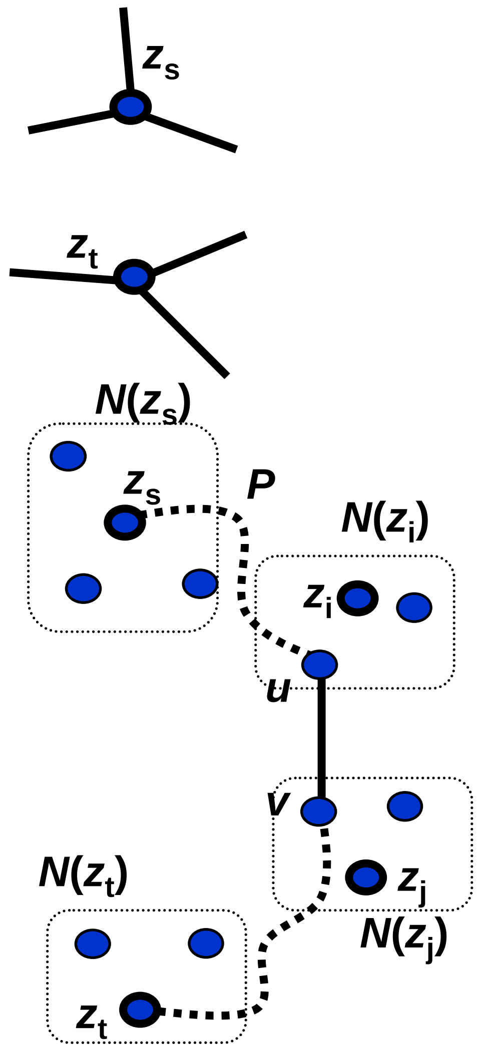
Tegyük fel: (1) nem teljesül. Legyen M° egy minimális feszítőfája G'-nek, amely

a) maximális számú G'' beli élet tartalmaz, azaz $|\, E(M^\circ) \cap E(G'') \,|$ maximális, és

b) az élek összköltsége $\sum_{E(M^\circ) \cap E(G'')} c''(e)$ minimális azon minimális feszítőfák között, amikre a) igaz.

Ekkor teljesül:

- vagy létezik egy él $\{z_s,z_t\} \in E(M^\circ) \setminus E(G'')$,
- vagy egy olyan él létezik $\{z_s,z_t\} \in E(M^\circ)$, amelyre $c''(\{z_s,z_t\}) > c'(\{z_s,z_t\}) = d(z_s,z_t)$.



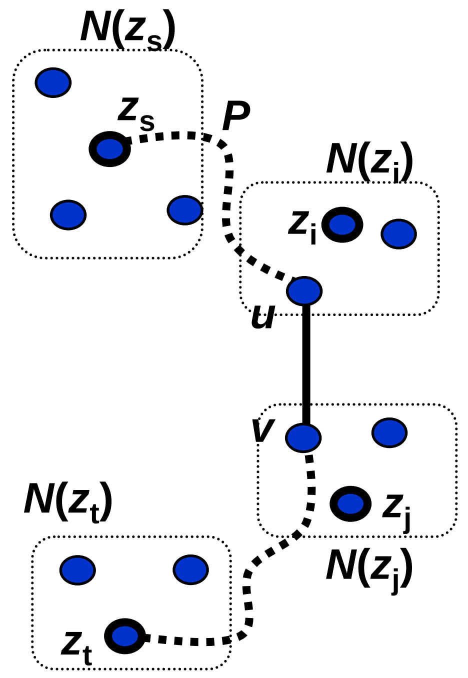
Legyen P egy legrövidebb út z_s-től z_t-hez G-ben c szerint. Tekintsünk egy olyan $\{u,v\}$ élet, hogy u és v különböző partícióban van: mondjuk $u \in N(z_i)$, $v \in N(z_j)$.

Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

- Definíció szerint teljesül $d(z_i,u) \leq d(z_s,u)$, $d(z_j,u) \leq d(z_t,u)$.
- Mivel $N(z_i)$ és $N(z_j)$ között G-ben legalább egy él van, pl. $\{u,v\}$, következik hogy $\{z_i,z_j\} \in E(G´´)$.
- $\{z_i,z_j\}$ költsége $G´´$-ben:

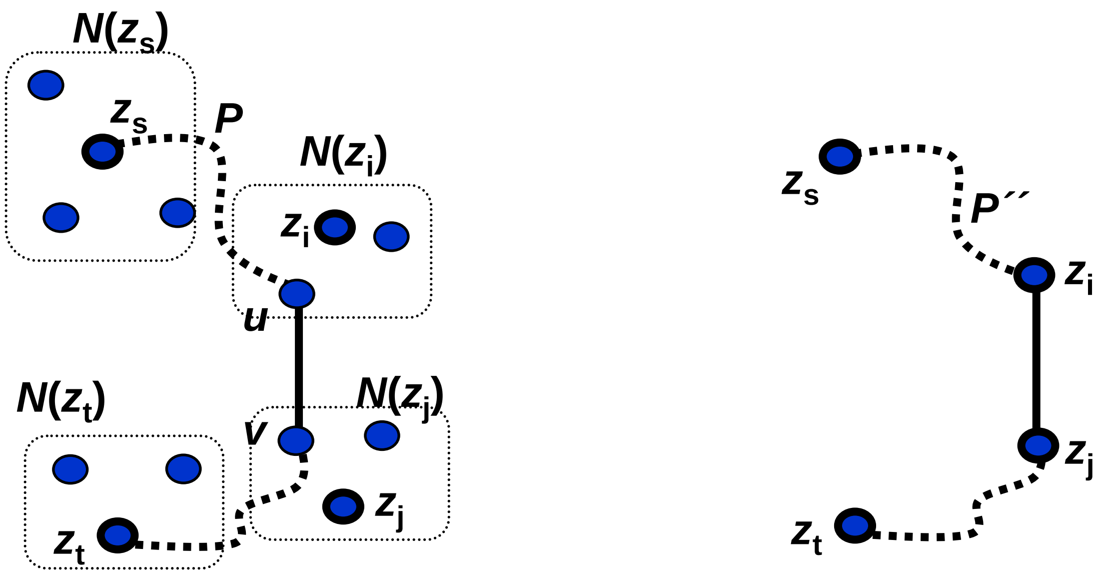
$$
\begin{aligned}
c´´(\{z_i,z_j\}) &= \min\{d(u^*,z_i) + c(\{u^*,v^*\}) + d(v^*,z_j) : \\
&\qquad u^* \in N(z_i),\ v^* \in N(z_j)\ \} \\
&\leq d(u,z_i) + c(\{u,v\}) + d(v,z_j) \\
&\leq d(u,z_s) + c(\{u,v\}) + d(v,z_t) \\
&= c(P) \\
&= d(z_s,z_t) \\
&= c´(\{z_s,z_t\}).
\end{aligned}
$$

- Ezért P minden $\{u,v\} \in P$ élre, melynek végpontjai különböző partícióban vannak, $u \in N(z_i)$, $v \in N(z_j)$, teljesül hogy $c´´(\{z_i,z_j\}) \leq c´(\{z_s,z_t\})$.



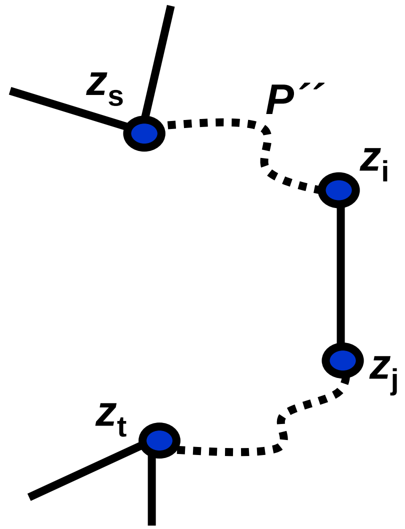
Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

- Tekintsük a P'' utat z_s-től z_t-hez G''-ben, ami következőképp definiált:
- $\{z_i,z_j\} \in E(P'') \;\Leftrightarrow\; \exists\; \{u,v\} \in E(P)$, amelyre $u \in N(z_i)$, $v \in N(z_j)$, $i \neq j$.



Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

- Ha az $\{z_s,z_t\}$ élet a G' gráf $M°$ minimális feszít őfájából eltávolítjuk, $M°$ két részfára $M_s°$ és $M_t°$ esik szét.
- Mivel P'' egy út z_s-től z_t-hez G''-ben, letezik legalább egy $\{z_i,z_j\}$ 2 P'' él, úgy hogy
  $z_i \in V(M_s°)$ és $z_j \in V(M_t°)$.
- Ha $\{z_s,z_t\}$-t $M°$-ben $\{z_i,z_j\}$-vel kicseréljük, kapunk egy másik feszítőfát M^*-t, amelyre
  - $c'(M^*) = c'(M°) - c'(\{z_s,z_t\}) + c'(\{z_i,z_j\}) \leq c'(M°)$
    Ezért M^* egy minimális feszítőfája G'-nek.
- A feltételünk miatt:
  - vagy $\{z_s,z_t\} \notin E(G'')$, ekkor
    $|E(M^*) \cap E(G'')| < |E(M°) \cap E(G'')|$;
  - vagy $\{z_s,z_t\} \in E(G'')$ úgy hogy $c''(\{z_s,z_t\}) > c'(\{z_s,z_t\})$, ekkor
    $c''(\{z_s,z_t\}) > c'(\{z_s,z_t\}) \geq c''(\{z_i,z_j\})$, és $c''(M^*) < c''(M°)$.



Távolság-Heurisztika – Mehlhorn változata

Tétel 2: Mehlhorn változata a távolság-heurisztikának $O(n \log n + m))$ idő alatt kiszámít egy Steiner-fát, melynek költsége legfeljebb $(2 - 2 / |N|)\ OPT < 2\ OPT$.

Steiner-fák – Dinamikus Programozás

[Dreyfus, Wagner 1972]

- Exakt algoritmus a Steiner probléma megoldásához.
- Az időigény exponencialis |*N*|-ben.
- Egy $D \subseteq V$ halmazra és egy $v \in V$ csomópontra jelölje $S(v,D)$ egy minimális Steiner-fa költségét a terminálok halmaza $D \cup \{v\}$.
- $S(v,D)$ a következő rekurzióval kiszámítható:
  - $S(v,D) = \min_{w \in V}\{\, d(v,w) + \min_{\emptyset \neq D' \subset D}\{S(w,D')+S(w,D \setminus D')\}\}$
  - *w*-t összekötő csomópontnak nevezzük
  - *w* foka ≥3
  - Lehetséges, hogy $w=v$

Steiner-fák

Megjegyzések:

- Legjobb ismert polinomiális idejű approximáció a Steiner problemához: approximatiós ráta $1+ \frac{1}{2} \ln 3 \approx 1{,}55$ [Robins, Zelikovsky 2000]

- Egy algoritmus, ami a gyakorlatban nagyon jól működik, az u.n. iterált 1-heurisztika [Kahng, Robins ´95]:

1. Legyen S:=Ø (S a kényszerített Steiner-csomópontok halmaza)
2. Számítsunk ki a távolság-heurisztikával egy T Steiner-fát N U S terminálokkal
3. <u>do</u>
4. Minden $v \in V \setminus (N \cup S)$-hez számítsunk ki egy T_v Steiner-fát $N \cup S \cup \{v\}$ terminálokkal a távolság-heurisztikával;
5. Legyen u egy csomópont, amelyre $c(T_u)$ minimális;
6. <u>if</u> ($c(T_u) < c(T)$) <u>then</u> $S := S \cup \{u\}$; $T := T_u$; <u>fi</u>;
7. <u>until</u> (T-t nem tudtuk megjavítani)

Irodalom

- H. Takahashi and A. Matsuyama: **An approximate soplution for the Steiner problem in graphs**. *Math. Japonica*, Vol. 24, 573-577, 1980.
- K. Mehlhorn: **A faster approximation algorithm for the Steiner Problem in graphs.** *Information Processing Letter*, Vol. 27, 125-128, 1988.
- A. B. Kahng and G. Robins: **A new class of iterative Steiner tree heuristics with good performance**. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design*, Vol. 11(7), 893-902, 1992.
- G. Robins and A. Zelikovsky: **Improved Steiner tree approximation in graphs**. *Proceedings of the 11th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, 770-779, 2000.