

Hálózattervezés Alapjai

tavasz 2006

3: Access Hálózat Tervezés – Könnyű Közelítően Legrövidebb-Utak-Fája

Hálózattervezési Problémák

- A hálózattervezés különböző problémák sorozatát foglalja magába
- A cél általánosan:
 - Egy alacsony költségű hálózat megtervezése, amely adott forgalomigényeket kielégít.
 - A topológia és a routing meghatározása
 - Azon csomópontpárok meghatározása, melyeket egymással egy linkkel össze kell kötni.
 - A linkek kapacitásának meghatározása.
 - Minden forgalomkövetelményhez az útvonal meghatározása, melyet a routing hozzárendel.

Buy-at-Bulk Hálózattervezési Problémák

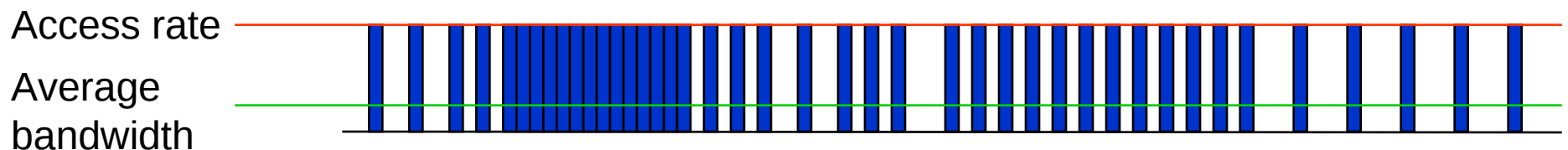
- A **buy-at-bulk** hálózattervezési probléma egy kábeltípussal (ND1K):
- Adott:
 - V : csomópontok n elemű halmaza, a csomópontok 1-től n -ig számozva vannak
 - $R=(r_{ij})$: Forgalomigény-mátrix
 - $r_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$: forgalom egy időegység alatt i -től j -be. Ez valamilyen alap-egységben adott (pl. 2Mbps).
 - F : Egy link installálásának fix alapköltsége.
Kapacitás-független, minden linknél azonos.
 - $A=(a_{ij})$: Költség-mátrix
 - $a_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$: Egy egységnyi kapacitású link installálásának a költsége i és j között.
 - A szimmetrikus és érvényes rá a háromszög-egyenlőtlenség:
 $\forall i, j, k: a_{ij} \leq a_{ik} + a_{kj}$
- Feladat: határozzunk meg minden r_{ij} forgalom-igényhez, $0 < i \leq j \leq n$, egy P_{ij} utat, úgy hogy
$$\sum_{e=\{i,j\} \in E'} (F + \lceil q(e) \rceil a_{ij})$$
 minimális,
ahol
 - $E' = E(\cup_{0 < i \leq j \leq n} P_{ij})$: az installált linkek halmaza,
 - $q(e) = \sum_{e \in P_{ij}} r_{ij}$: az igények összege, melyek útvonala az e linket tartalmazza

Buy-at-Bulk Hálózattervezési Problémák

Megjegyzés: Az előző fólián definiált probléma egy leegyszerűsítése a gyakorlatban fellépő hálózattervezési problémának

- Egy link kapacitás-függő költsége gyakran nem lineárisan függ a kapacitástól
- További korlátozások lehetségesek, pl.:
 - Hálózat átmérője
 - Csomópontok foka
- Egy link kapacitásának meghatározásánál gyakran van szerepük sztochasztikus faktoroknak is (különösen Access hálózatok esetén)

Packet level (TCP):



Buy-at-Bulk Hálózattervezési Problémák

Lemma 1: Legyen OPT az ND1K probléma optimális megoldásának a költsége. A következő alsó korlátok érvényesek OPT -ra:

- (1) $OPT \geq F \cdot (n-1) + MST$,
ahol MST egy minimális feszítőfa költsége az n csomópont által meghatározott teljes gráfban, melyben az (i,j) él súlya a_{ij} , $i,j \in V$, $i \neq j$.
- (2) $OPT \geq F \cdot (n-1) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} r_{ij} a_{ij}$

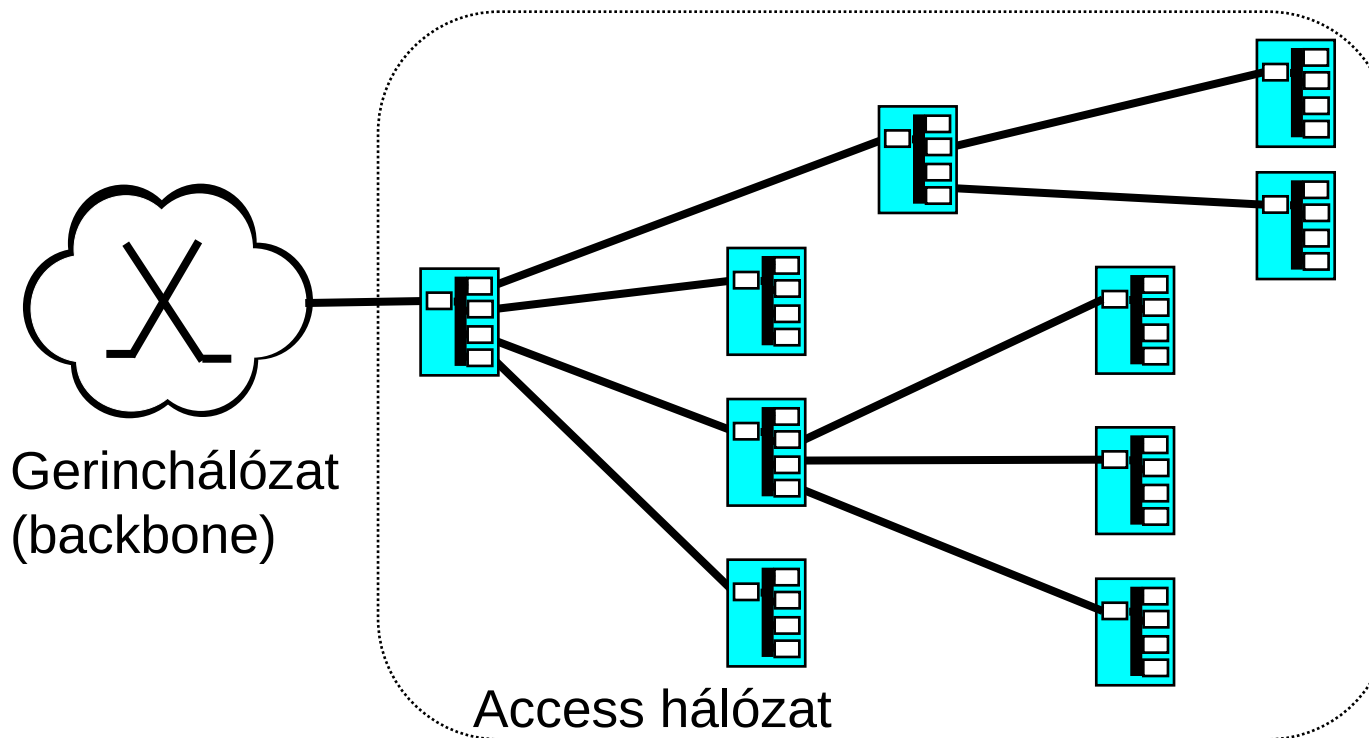
Biz.:

- (1) A hálózatnak összefüggőnek kell lenni, és tartalmaznia kell egy feszítőfát, melyben minden él kapacitása legalább 1. A kapacitás-független költsége $n-1$ élnek $F \cdot (n-1)$ és a kapacitás-függő legalább MST .
- (2) A hálózat legalább $n-1$ élet tartalmaz: a kapacitás-független költség így $\geq F \cdot (n-1)$. Minden r_{ij} igény legalább $r_{ij} a_{ij}$ kapacitásfüggő költséget okoz, mivel a háromszög-egyenlőtlenség miatt nincs olyan út i és j között, ami rövidebb mint a_{ij} .

□

Access Hálózattervezés

- A végfelhasználók egy access hálózaton keresztül csatlakoznak a gerinchálózathoz
- Az access hálózat u.n. koncentrátor csomópontokból áll



Access Hálózattervezés

- Access hálózattervezés egy kábeltípussal (AND1K)
- Minden forgalomigény egy kitüntetett csomópontot, mondjuk az 1-es csomópont, és egy másik csomópontot köt össze
- Az 1-es csomópontot forrásnak nevezzük
- Adott:
 - V : csomópontok n elemű halmaza, a csomópontok 1-től n -ig vannak számozva
 - Igények $r_{1i} > 0$, $2 \leq i \leq n$
 - F : Egy link installálásának fix alapköltsége
 - $A=(a_{ij})$: Költség mátrix: szimmetrikus és teljesíti a háromszög egyenlőtlenséget
- Feladat: határozzunk meg egy P_{1i} utat minden r_{1i} igényhez, $2 \leq i \leq n$, úgy hogy
$$\sum_{e=\{i,j\} \in E'} (F + \lceil q(e) \rceil a_{ij}) \text{ minimális,}$$
ahol
 - $E' = E(\cup_{2 \leq i \leq n} P_{1i})$: az installált linkek halmaza,
 - $q(e) = \sum_{i \in P_{1i}} r_{1i}$: az igények összege, melyek útvonala az e linket tartalmazza

Approximációs Algoritmus Access Hálózattervezéshez

[Khuller, Raghavachari, Young 95]

- Bemutatunk egy approximációs algoritmust a AND1K problémához
- Alapja: Egy könnyű közelítően legrövidebb utak fájának (light approximate shortest path tree LAST) kiszámítása
- Egy (α, β) -LAST T egy $G=(V, E)$ gráfhoz $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ élsúlyokkal és s kezdő csomóponttal egy feszítőfája G -nek, amely
 1. approximálja G -nek egy legrövidebb utak fáját s kezdő csomóponttal, azaz minden $v \in V$ csomópontra teljesül
$$d_T(s, v) \leq \alpha d_G(s, v),$$
ahol
 - $d_T(s, v)$ az út hossza s -től v -hez T -ben
 - $d_G(s, v)$ egy legrövidebb út hossza s -től v -hez G -ben
 2. könnyű: $c(T) \leq \beta c(T_M)$, ahol T_M egy minimális feszítőfája G -nek.

Access Hálózattervezés - LAST

Lemma 2: Legyen G az n csomópontú teljes gráf a_{ij} élsúlyokkal.

Legyen T egy (α, β) -LAST G -hez az 1-es kezdő csomóponttal.

Legyen P_{1i} az út az 1-es csomóponttól i -hez T -ben.

Akkor T hálózat költsége a fenti routinggal $\leq (\alpha + \beta)OPT$.

Biz.: Legyen $E' = E(T)$ a T hálózat éleinek halmaza.

Minden $e \in E'$ él legalább egy P_{1i} úton előfordul.

A T hálózat költsége, amely a routingból adódik:

$$C = F \cdot (n-1) + \sum_{e=\{i,j\} \in E'} \lceil q(e) \rceil a_{ij}.$$

Minden $e \in E'$ élhez legyen $\Delta(e) := \lceil q(e) \rceil - q(e)$.

$\Delta(e)$ az a kapacitás az e élen, amit megfizetünk, de nincs rá szükség.

Ekkor $C = C_1 + C_2$, ahol

$$C_1 = \sum_{e=\{i,j\} \in E'} q(e) a_{ij} \text{ und}$$

$$C_2 = F \cdot (n-1) + \sum_{e=\{i,j\} \in E'} \Delta(e) a_{ij}$$

Access Hálózattervezés - LAST

Egy r_{1i} igény $r_{1i} d_T(1,i)$ költséget ad C_1 -hez.

Mivel T egy (α, β) -LAST, $r_{1i} d_T(1,i) \leq r_{1i} \alpha d_G(1,i)$.

Mivel az élsúlyokra érvényes a háromszög-egyenlőtlenség, $d_G(1,i) = a_{1i}$.

Ezért

$$C_1 = \sum_{2 \leq i \leq n} r_{1i} d_T(1,i) \leq \alpha \sum_{2 \leq i \leq n} r_{1i} a_{1i}.$$

Így Lemma 1 (2) miatt $C_1 \leq \alpha OPT$.

Mivel $\Delta(e) \leq 1$ minden $e \in E'$ élre és T egy (α, β) -LAST, érvényes hogy

$$C_2 \leq F \cdot (n-1) + \sum_{e=\{i,j\} \in E'} a_{ij} \leq F \cdot (n-1) + \beta MST.$$

Így Lemma 1 (1) miatt $C_2 \leq \beta OPT$, és ezért

$C \leq (\alpha + \beta) OPT$.

□

Egy (α, β) -LAST kiszámítása

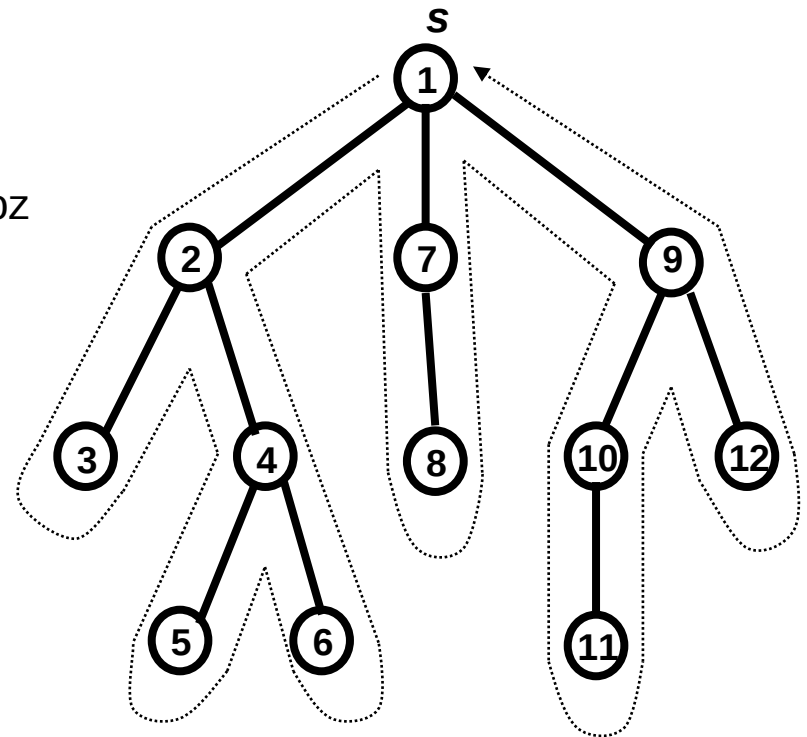
- Cél: Egy algoritmus, amely kiszámít egy (α, β) -LAST-ot lehetőleg kicsi α és β értékekkel.
- Egy LAST kiszámításához szükség lesz egy minimális feszítőfa csomópontjainak preorder számozására.

Algoritmus Preorder_számozás

Input: Baum $T=(V,E)$

Output: preorder szám $num[v]$ minden $v \in V$ csomóponthoz

```
1. procedure preorder(node  $v$ )
2. begin
3.    $num[v] := i; i := i + 1;$ 
4.   for all child  $w$  of  $v$  do
5.     preorder( $w$ );
6.   od;
7. end;
8.  $i := 1;$ 
9. preorder( $s$ );
```



Egy (α, β) -LAST kiszámítása

Lemma 3: Legyen T egy feszítőfája egy $G=(V,E)$ gráfnak $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ élsúlyokkal és legyen s a T gyökere. Legyen $z_0, z_1, \dots, z_k$ tetszőleges $k+1$ csomópont T -ben preorder szám szerint növekvő sorrendben. Ekkor

$$\sum_{1 \leq i \leq k} d_T(z_{i-1}, z_i) \leq 2c(T).$$

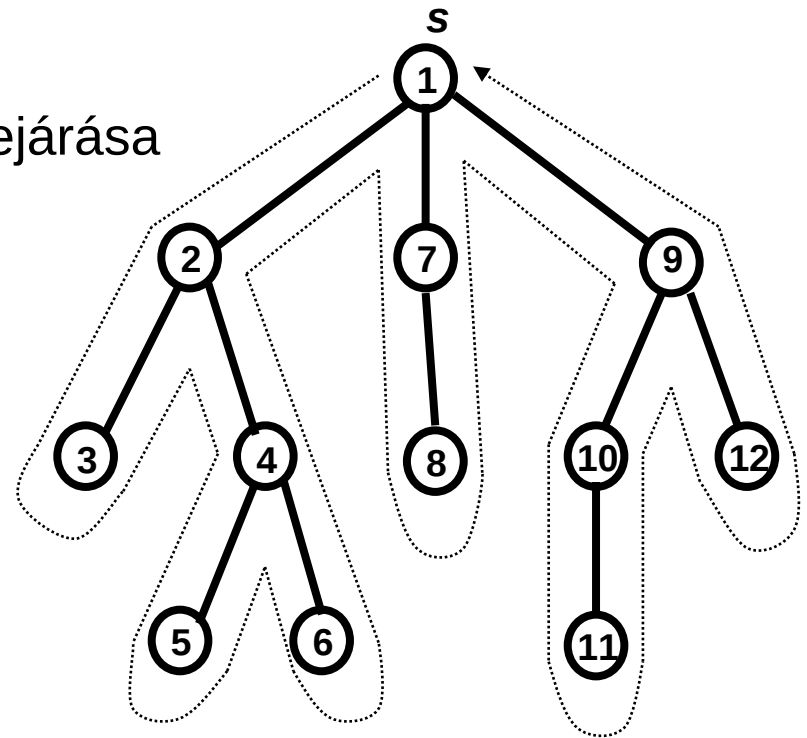
Biz.: Tekintsük a P utat, amelyet T preorder bejárása definiál. T minden éle pontosan kétszer fordul elő P -ben. Ezért

$$\sum_{e \in E(P)} c(e) = 2 c(T).$$

P tartalmaz minden i -hez, $1 \leq i \leq k$, egy részutat z_{i-1} első előfordulásától z_i első előfordulásáig.

E részút hossza $\geq d_T(z_{i-1}, z_i)$.

Mivel ezek a részutak diszjunkt részutak P -ben, következik az állítás. $\square$



Egy (α, β) -LAST kiszámítása

Algoritmus: (α, β) -LAST

Input: Egy összefüggő irányítatlan gráf $G=(V,E)$, kezdőcsomópont $s \in V$,
élsúlyok $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ és α, β értékek $\alpha > 1$ és $\beta = 1 + 2 / (\alpha - 1)$.

Output: (α, β) -LAST T .

1. Kiszámítunk egy T_M minimális feszítőfát G -ben;
Kiszámítjuk a legrövidebb utat s -től minden más csomóponthoz G -ben;
2. Kiszámítjuk T_M csomópontjainak preorder számozását s gyökérrel;
3. $H := T_M$;
4. for all $v \in V$ preorder szám szerint növekvő sorrendben do
 Kiszámítunk egy legrövidebb utat P -t s -től v -hez H -ban;
 if $c(P) \geq \alpha d_G(s, v)$ then
 Legyen P_i a legrövidebb út s -től v -hez G -ben;
 Adjuk hozzá P éleit H -hoz (azaz $E(H) := E(H) \cup E(P_i)$);
 fi;
 od;
5. Kiszámítunk H -ban s kezdőcsomóponttal egy legrövidebb utak fáját T -t;
6. return T ;

Egy (α, β) -LAST kiszámítása

Lemma 4: Legyen $\alpha > 1$ és $\beta = 1 + 2 / (\alpha - 1)$.

A H gráfra az (α, β) -LAST algoritmusban érvényes:

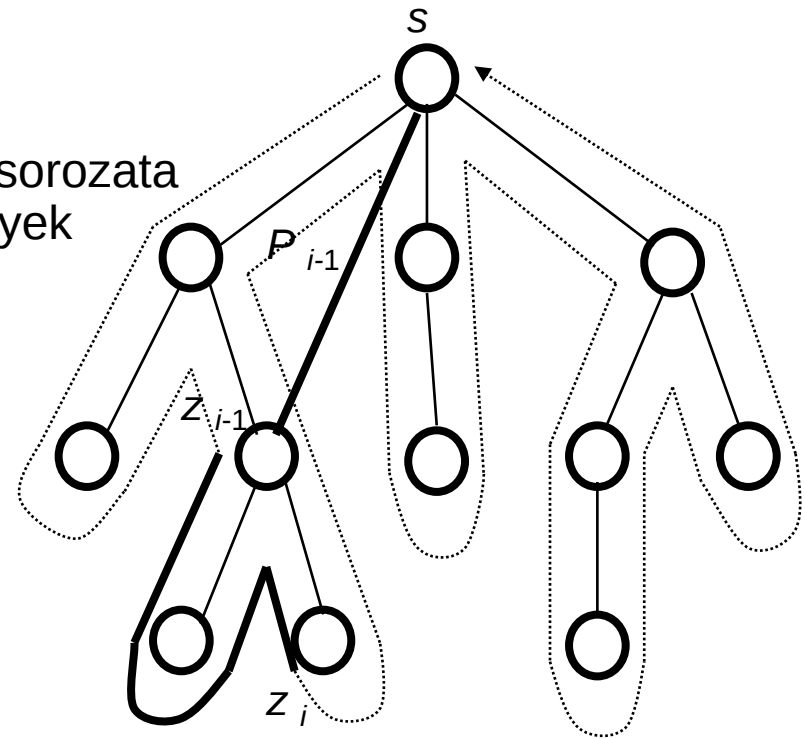
- (1) minden $v \in V$ csomópontra, egy legrövidebb út költsége s -től v -hez H -ban $\leq \alpha d_G(s, v)$, és
- (2) H összköltsége $c(H) \leq \beta c(T_M)$.

Bew.: A 4. lépés biztosítja, hogy (1) teljesül.

(2): Legyen $z_0 = s$ és $z_1, \dots, z_k$ azon csomópontok sorozata preorder szám szerint növekvő sorrendben, melyek a 4. lépésben P_i (egy legrövidebb út s -től z_i -hez G -ben) hozzáadását okozták H -hoz.

Amikor z_i ($i=1, \dots, k$) a 4. lépésben feldolgozásra kerül, H tartalmazza azt az utat, ami következőképp áll össze:

- P_{i-1} , egy legrövidebb út s -től z_{i-1} -hez G -ben kiegészítve
- T_M preorder bejárása által definiált út részútjával z_{i-1} -től z_i -hez.



Egy (α, β) -LAST kiszámítása

Ezen út költsége $d_G(s, z_{i-1}) + d_{T_M}(z_{i-1}, z_i)$.

Mivel egy legrövidebb P út s -től z_i -hez H -ban legfeljebb ekkora költségű és

$c(P) > \alpha d_G(s, z_i)$ (4. lépés miatt), teljesül hogy

$d_G(s, z_{i-1}) + d_{T_M}(z_{i-1}, z_i) > \alpha d_G(s, z_i)$, átrendezve:

$\alpha d_G(s, z_i) - d_G(s, z_{i-1}) < d_{T_M}(z_{i-1}, z_i)$.

Összeadva minden i -re, $i=1, \dots, k$ (mivel $d_G(s, z_0) = 0$):

$$\alpha d_G(s, z_1) - d_G(s, z_0) < d_{T_M}(z_0, z_1)$$

$$\alpha d_G(s, z_2) - d_G(s, z_1) < d_{T_M}(z_1, z_2)$$

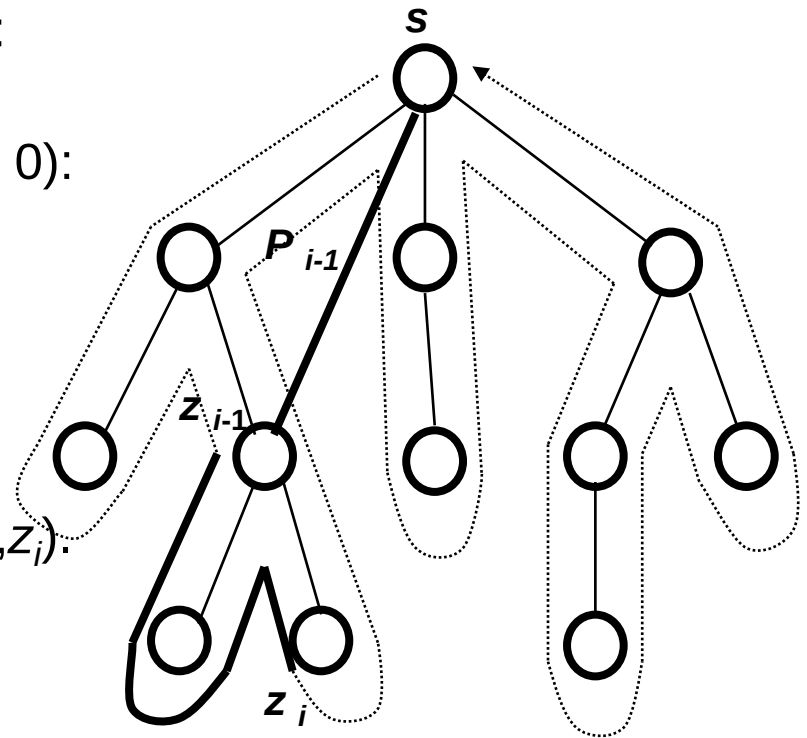
...

$$\alpha d_G(s, z_k) - d_G(s, z_{k-1}) < d_{T_M}(z_{k-1}, z_k)$$

$$\alpha d_G(s, z_k) + \sum_{1 \leq i < k} (\alpha - 1) d_G(s, z_i) < \sum_{1 \leq i \leq k} d_{T_M}(z_{i-1}, z_i).$$

Így

$$\sum_{1 \leq i \leq k} (\alpha - 1) d_G(s, z_i) < \sum_{1 \leq i \leq k} d_{T_M}(z_{i-1}, z_i)$$



Egy (α, β) -LAST kiszámítása

Lemma 3 miatt $\sum_{1 \leq i \leq k} d_{T_M}(z_{i-1}, z_i) \leq 2c(T_M)$.

Így

$$\sum_{1 \leq i \leq k} d_G(s, z_i) < (1 / (\alpha - 1)) \sum_{1 \leq i \leq k} d_{T_M}(z_{i-1}, z_i) \leq 2c(T_M) / (\alpha - 1).$$

Mivel

$$c(H) \leq c(T_M) + \sum_{1 \leq i \leq k} d_G(s, z_i) \leq (1 + 2 / (\alpha - 1)) c(T_M),$$

a bizonyítás teljes □

Satz 1: Legyen $\alpha > 1$ és $\beta = 1 + 2 / (\alpha - 1)$. A (α, β) -LAST algoritmus polinomiális idő alatt kiszámít egy (α, β) -LAST-ot G -ben, azaz egy T feszítőfát, amelyre

- $\forall v \in V : d_T(s, v) \leq \alpha d_G(s, v)$ és
- $c(T) \leq \beta c(T_M)$. □

Access Hálózattervezés

Megjegyzés: Az ANDK1K access hálózattervezés problémában

$(\alpha+\beta) = (\alpha + 1 + 2 / (\alpha-1))$ értéket kell minimalizálni ahhoz, hogy a legjobb approximációs rátát garantáljuk.

A minimum $\alpha = \beta = 1+\sqrt{2}$.

Ekkor az approximációs ráta $(\alpha+\beta) = (2+2\sqrt{2}) \approx 4,82$.

Algoritmus: AND1K

Input: csomópontok n elemű halmaza V , (csomópont 1 a forrás);

forgalomigények r_{1i} , $2 \leq i \leq n$; fix költség F , költség mátrix $A = (a_{ij})$

Output: Utak P_{1i} , $2 \leq i \leq n$.

1. Kiszámítunk egy $(1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ -LAST-ot T -t az 1-es kezdőcsomóponttal a teljes gráfban, melynek csomóponthalmaza V és az élsúlyok a_{ij}
2. $P_{1i} :=$ az út 1-től i -hez T -ben, $2 \leq i \leq n$.

Access Hálózattervezés

Tétel 2: Az AND1K algoritmus kiszámítja polinomiális idő alatt az AND1K probléma egy megoldását, melynek költsége legfeljebb $(2+2\sqrt{2}) OPT$. □

Irodalom

- S. Khuller, B. Raghavachari, and N. Young: **Balancing minimum spanning and shortest path trees**. *Algorithmica*, Vol. 14, 305-322, 1995.
- F. Salman, J. Cheriyan, R. Ravi, and S. Subramanian: **Buy-at-bulk network design: approximating the single-sink edge installation problem**. *Proc. ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA'97)*, 1997.